INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEONARDO SIMÕES DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

VOLTA REDONDA

2014

Leonardo Simões da Silva

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Professor de Matemática e a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Msc José Ricardo Ferreira de Almeida.

Volta Redonda
2014

S586s

Silva, Leonardo Simões da.
Uma sequência didático-pedagógica para o ensino das cônicas no Ensino Médio / Leonardo Simões da Silva, 2014.
95f.

Orientador: Prof. MSC: José Ricardo Ferreira de Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)- Instituto Federal do Rio de Janeiro, Volta Redonda, 2014.

1. Cônicas. 2. TIC. 3. GeoGebra. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro. Licenciatura em Matemática. II. Almeida, José Ricardo Ferreira de.

CDU: 004:51

Leonardo Simões da Silva

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Professor de Matemática e a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro.

Data da Aprovação: 23/10/2014

Prof. Msc José Ricardo Ferreira de Almeida (Orientador)
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Prof. Msc Isaque de Souza Rodrigues (Banca)
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Prof. Msc Rafael Vassallo Neto (Banca)
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Prof$_a$. Dr$_a$ Renata Arruda Barros (Suplente)
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2014

Dedico aos que mais amo, minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por iluminar meu caminho e ser autor do meu destino.

A minha família, Luiz Antonio, Elisabete e Luiz Eduardo, que sempre me apoiaram e incentivaram nesta caminhada, não medindo esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

A minha namorada, Juliana, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

A minha tia Marlene por me receber carinhosamente em sua residência durante toda minha formação acadêmica.

Ao professor Msc. José Ricardo Ferreira de Almeida pelo companheirismo na orientação deste trabalho.

Ao professor Msc. Rafael Vassallo Neto pelos conselhos em várias etapas da minha vida acadêmica.

À banca examinadora, pelas sugestões que puderam aperfeiçoar este trabalho.

Ao Curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ, *campus* Volta Redonda e às pessoas com quem convivi nesse espaço ao longo desses anos.

“Toda unanimidade é burra. Quem pensa com a unanimidade não precisa pensar”.

Nelson Rodrigues

SILVA, Leonardo Simões da. *Uma sequência didático-pedagógica para o ensino das cônicas no Ensino Médio.* – 95 f. Programa de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), campus Volta Redonda, Volta Redonda/RJ, 2014.

RESUMO

Apresenta-se nesse trabalho fundamentação teórica sobre a necessidade de uma proposta educacional que envolva a tecnologia no ensino de Matemática, em específico no ensino das cônicas no Ensino Médio. Com base nessa fundamentação, propõe-se uma sequência didático-pedagógica de ensino destas curvas no plano sob três abordagens: duas delas geométricas e uma analítica. As abordagens geométricas são propostas por dois procedimentos metodológicos distintos: um em que se utilizam objetos manipulativos para a construção e obtenção das cônicas e, outro, que se utiliza o *software GeoGebra*, como recurso computacional, para a construção das cônicas de maneira similar a construção realizada com objetos manipulativos. A partir das construções, desenvolvem-se reflexões sobre regularidades das figuras geométricas obtidas. Apresenta-se a terceira abordagem que se utilizam as equações algébricas obtidas nas reflexões realizadas. Das manipulações algébricas dessas equações, obtêm-se demonstrações analíticas das equações que representam cada curva.

PALAVRAS-CHAVE: *Cônicas, TIC, GeoGebra.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Com o contínuo avanço da tecnologia, surge a necessidade do professor se adequar e levá-la para dentro da sala de aula. Assim, acredita-se que o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), como recursos didáticos, ajudam no ensino-aprendizado de forma dinâmica e atraente e, portanto, o aluno poderá desenvolver seu conhecimento e o professor terá possibilidade de atuar como mediador.

Apresenta-se nesse trabalho uma forma de utilização de TICs como recursos facilitadores ao ensino das cônicas em Geometria Analítica, a fim de propiciar um ambiente colaborativo com interação entre aluno e professor durante o processo de ensino aprendizagem. Dessa maneira, visa-se:

- Pesquisar como as TICs podem influenciar positivamente no processo de ensino aprendizagem de Matemática.
- Verificar a possibilidade do *software GeoGebra* como uma TIC a ser utilizada no ensino de Matemática.
- Apresentar os recursos oferecidos pelo *software GeoGebra* para ensinar cônicas durante atividades no Ensino Médio.
- Propor metodologias e atividades de ensino com utilização de recursos manipulativos e do *software Geogebra* para a exploração deste assunto.
- Observar o tratamento geométrico das atividades de construções experimentais e computacionais, reconhecendo ao fim uma representação analítica para cada cônica.

A fim de que os objetivos sejam alcançados é proposta uma metodologia alternativa de ensino das cônicas através de três abordagens que geralmente não são apresentadas aos alunos no Ensino Médio. Esse conteúdo pode ser representado de forma geométrica ou analítica, sendo assim, as duas primeiras abordagens metodológicas referem-se ao tratamento geométrico dessas cônicas em que serão tratadas cada uma delas com experimentos concretos e computacionais que se faz necessário devido à integração das novas TICs à educação Matemática.

Com objetos manipulativos apresentam-se atividades que permitirão as construções das cônicas e, na parte computacional, utiliza-se o *software GeoGebra*, como recurso didático, a fim de possibilitar a exploração com atividades construtivistas e reflexivas que são propostas sobre cada cônica.

Espera-se que a utilização do *GeoGebra* para o ensino das cônicas, o professor adquira mais confiança no trabalho, não se preocupando com a habilidade ou o manejo para desenhar, pois tudo é feito pelo próprio *software* quando se seleciona um botão referente à construção desejada.

A terceira abordagem metodológica refere-se ao tratamento analítico que poderá ser feito após os alunos terem observado e compreendido as construções geométricas, facilitando assim sua aprendizagem.

O primeiro capítulo, intitulado tecnologia na escola e ensino de Matemática, apresenta análise de fundamentação teórica onde se pode observar a influência exercida pela tecnologia na sociedade contemporânea. Com isso, diante dessa influência, apresentam-se algumas deficiências no ensino de Matemática e acredita-se que a utilização de recursos tecnológicos podem minimizar tais deficiências no ensino de Matemática, podendo assim utilizar um *software* educativo como recurso didático para o ensino.

Verifica-se, ainda, a necessidade do estudo de Geometria Analítica, servindo como justificativa para a escolha do tema desse trabalho como uma proposta específica para o estudo das cônicas, que é um assunto abordado no Ensino Médio. Ainda neste capítulo é justificada a escolha do *software GeoGebra* para executar as propostas desse trabalho, dentre outros *softwares* existentes.

No capítulo seguinte constam os procedimentos metodológicos propostos pelo trabalho para o ensino das cônicas, em que cada uma delas, elipse, parábola e hipérbole são tratadas separadamente nas formas geométrica e analítica, sendo o tratamento geométrico abordado em uma parte concreta e outra parte computacional. Na parte computacional as atividades propostas envolvem construções e reflexões de maneira a proporcionar melhor compreensão das definições e propriedades destas curvas.

Em anexo, encontra-se de maneira detalhada, um breve tutorial sobre o *software GeoGebra*, com as principais ferramentas disponíveis que são necessárias para as construções geométricas computacionais.

A pesquisa está baseada numa perspectiva teórico-metodológica de modo a possibilitar a melhora do ensino de Matemática com uso de recursos tecnológicos, defendido por autores como Borba e Penteado (2010), Lopes (2011), Pereira (2012), Araújo e Gomes (2011), Brandt e Montorfano (2008), Ferreira Lopes (2011), Quaranta, Costa e Guimarães (2007), Neto (2011), entre outros.

A fim de facilitar a leitura e entendimento dos termos utilizados, são apresentados os formatos para objetos. Nomes dos pontos são indicados por letras latinas maiúsculas, os nomes de retas e segmentos de retas por letras latinas minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas. Se A e B são pontos distintos e extremos de um segmento, este é citado como segmento $\overline{AB}$. A notação $A\hat{B}C$ é usada para indicar o ângulo convexo de vértice B, cujos lados estão contidos nos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

2. TECNOLOGIA NA ESCOLA E ENSINO DE MATEMÁTICA

2.1. INFLUÊNCIA DAS TECNOLOGIAS NA SOCIEDADE E NA ESCOLA

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM, 2006, p.87) não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual.

Frequentemente, o avanço acelerado da tecnologia pode ser considerado como normal e, segundo Kenski (2007) apud Pereira (2012, p.19), ela está tão próxima que às vezes a sua presença se passa despercebida, pois está em todo lugar e já faz parte de nossas vidas. Nessa mesma perspectiva, Lévy (1993) apud Pereira (2012, p.19) afirma que “as tecnologias habitam o cotidiano de tal forma que já fazem parte de nossa natureza humana”.

Segundo Bona (2010, p.15), o avanço da tecnologia tem transformado o dia-a-dia das crianças, pois o interesse por ela atualmente tem sido disputado lado a lado entre bolas e bonecas contra os jogos eletrônicos e demais mídias digitais.

E ainda, Bona (2010, p.36) aponta que a presença da tecnologia se estendeu exercendo influência em quase todos os campos do agir humano e saber social, sendo evidente quando se olha para a sociedade contemporânea.

De acordo com Souza e Souza (2010, p.128), as ferramentas tecnológicas facilitam o acesso a novos conhecimentos e servem como base de novas adaptações aos diversos sistemas de transmissão de conhecimento, em que surgem melhorias modificando os fatos complicados em fatores acessíveis e sedimentados, transformando a teoria em prática.

Para Bona (2010, p.27), o acesso à informação e comunicação está determinado por novos modos associados à época, conforme a predominância das tecnologias que caracterizam a sociedade atual, em especial as digitais, gerando interação mediada por uma máquina.

Gonçalves (1994, p.64) afirma que as novas tecnologias sempre irão provocar nos ambientes sociais mudanças em sua organização, sendo dificilmente possível imaginar uma inovação tecnológica que não provoque algum efeito quando introduzida em um ambiente.

Diante de tantas considerações propiciadas pela tecnologia, acredita-se que o adolescente pode ser um confrontador, em que está sempre buscando conhecer inovações a partir dos recursos tecnológicos cada vez mais atuais.

Entretanto, atualmente, as TICs estão cada vez mais presentes no ambiente escolar, aparecendo como recursos que desafiam o adolescente e que causa o interesse deste em manipular e obter conhecimento. Mas, para Almeida (2001, p.71), inserir-se na sociedade da informação não quer dizer apenas ter acesso à TIC, mas principalmente saber utilizar essa tecnologia para a busca e a seleção de informações que permitam a cada pessoa resolver os problemas do cotidiano, compreender o mundo e atuar na transformação de seu contexto.

Dessa forma, "as TICs servem de auxílio ao estudo e facilitam a aprendizagem trazendo o conhecimento de forma mais estruturada" (SOUZA e SOUZA, 2010, p.128). E, de acordo com Gonçalves (1994, p.64), atualmente é necessário incorporar as tecnologias ao processo de trabalho, a fim de proporcionar a modernização da escola, prestando melhor ensino aos alunos e possibilitando um sistema de informações.

Para Kenski (2007) apud Pereira (2012, p.18), "a escolha de determinado tipo de tecnologia altera profundamente a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes".

Assim, a informática pode ser um recurso didático facilitador para a aprendizagem do aluno, causando nele motivações. Portanto, o uso da informática na escola pode ser um mecanismo de grande potencial, amenizando as dificuldades e influenciando positivamente o processo de ensino aprendizagem.

Ferreira (2010, p.2) aponta que a educação contemporânea é composta por um sistema onde temos a grande maioria dos alunos com conhecimento dos recursos tecnológicos, sobre tudo o computador, e professores que não tiveram o contato com essas tecnologias durante sua formação, ou que tiveram apenas noções básicas e pouca ou nenhuma metodologia de sua aplicabilidade.

> Estar preparado para utilizar a tecnologia e saber como ela pode dar suporte ao aprendizado são habilidades necessárias no repertório de qualquer profissional docente. Os professores precisam estar preparados para ofertar autonomia a seus alunos com as vantagens que a tecnologia pode trazer (UNESCO, 2009, p.1).

Conforme Roldão (1999) apud Araújo e Gomes (2011, p.3), percebe-se que mudanças ocorrem rapidamente na sociedade em função das novas tecnologias da informação e comunicação, exigindo que o professor tenha uma capacitação adequada para utilizar as tecnologias cada vez mais sofisticadas.

2.2. O ENSINO DE MATEMÁTICA DIANTE DA TECNOLOGIA

Conforme afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 2002, p.111), diante de uma diversidade de situações contidas em nossa sociedade atual, o conhecimento matemático se torna necessário, onde atuará como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Segundo a OCEM (2006, p.94), a articulação da Matemática é possível e necessária para ser ensinada no Ensino Médio, através de temas atuais da ciência e da tecnologia.

Sem dúvida, os conhecimentos matemáticos são essenciais na vida pessoal e profissional de qualquer cidadão, com isso, é um direito de todos poder adquiri-lo, sendo a escola a instituição responsável por mediar caminhos para a aquisição desse conhecimento, como aponta Lopes (2011, p.6).

> [...] a discussão sobre informática na educação matemática deve ser compreendida. O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica (BORBA, PENTEADO, 2010, p.17).

Portanto, D'Ambrosio (2001) apud Lopes (2011, p.8) salienta que a forma como a Matemática tem sido ensinada não está capacitando os estudantes para os desafios com os quais estes se deparam hoje. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 2000, p.41), o impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Dessa forma, Lopes (2011, p.8) entende que não seja possível trabalhar com a Matemática de forma descontextualizada, fragmentada e repetitiva, sem considerar a realidade em que a escola está inserida.

Assim, Gómez (1997) apud Araújo e Gomes (2011, p. 4) afirma que, mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em agente catalisador do processo de mudança na educação Matemática.

> A incorporação da mídia informática em sala de aula implica em um esforço permanente por parte do professor, pois este será capaz de proporcionar o uso ou não uso de *software*s, se optar pelo uso será capaz de promover uma proposta diferenciada, a fim de que o aluno possa fazer experimentações e visualizar

> melhor o conteúdo que lhe é proposto e no acesso a informações permitindo que revisem e monitorem suas atividades repensando em mudanças (CONTRI et al, 2011, p.1).

E se pensando na tecnologia para a Matemática, conforme a OCEM (2006, p.88), há *softwares* nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Esses *softwares* apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas e criam estratégias para resolver problemas.

Para Araújo e Gomes (2011, p.4), ministrar aulas ou atividades fazendo uso de um *software* educativo, como recurso didático, trás a tona a possibilidade de mostrar o quanto a informática pode ser útil no ensino da Matemática, ressaltando os efeitos deste uso de forma qualitativa e possibilitando aos alunos a criarem oportunidades para que possam explorar seus conhecimentos através de atividades no laboratório, de modo a proporcionar momentos enriquecedores de estudo e construção de aprendizado.

> Para nós, entretanto, sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento. Dessa forma, essa dependência sempre existirá e estará bastante relacionada ao contexto educacional em que nos encontremos. Esse contexto está sempre geográfica e historicamente determinado e sua constituição depende também da disponibilidade de mídias como oralidade, lápis-e-papel e a informática. Em Matemática, por exemplo, as demonstrações são fruto da disponibilidade da escrita em diversas sociedades (BORBA, PENTEADO, 2010, p.13).

Dessa forma, entende-se que a informática, especificamente o uso de *softwares* para o ensino de Matemática, não substituirá o papel do professor e seus recursos tradicionais como o quadro e giz, mas sim complementará no ensino-aprendizagem, pois um recurso estará sempre dependendo do outro.

2.3. O ESTUDO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Segundo o PCN (2000, p.44), o currículo do Ensino Médio deve garantir o espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números, álgebra e Geometria. Nesse sentido, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

De fato, perceber as relações entre as representações planas na tela do computador com os objetos que lhes deram origem e conceber novas formas planas e suas propriedades a partir dessas representações, é essencial para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências.

Sendo assim, o trabalho com a Geometria Analítica se torna necessário, pois ela permite a articulação entre Geometria e álgebra. Nesse sentido, "para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas" (OCEM, 2006, p.77).

O ensino de Geometria Analítica abrange vários conteúdos e entre esses existem as cônicas[1] que, segundo Neto (2011, p.2), o estudo dessas no Ensino Médio no Brasil, provavelmente, não acontece para a maioria dos alunos. E, quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) no terceiro ano do Ensino Médio.

Conforme aponta Ferreira Lopes (2011, p.25), as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) compõem um assunto da Matemática sobre o qual as exposições gerais são conhecidas antes da época de Euclides (325 - 265 a.C). Salienta, ainda, que o interesse pelo estudo das cônicas provavelmente surgiu por volta do século IV a.C. e muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo destas curvas no decorrer da história.

Para Quaranta et al (2007, p.1) suas propriedades desempenham um papel importante em vários domínios da Física, como Astronomia, Ótica e Acústica, da Engenharia e Arquitetura e, atualmente, exercem um papel de primordial importância no desenvolvimento da tecnologia moderna.

Podem-se notar, por exemplo, em nosso dia-a-dia que as superfícies cônicas têm importantes aplicações tecnológicas e, entre elas existem as antenas parabólicas, o forno solar, os telescópios, entre outros.

Segundo Ferreira Lopes (2011, p.33), praticamente todas as definições e propriedades hoje abordadas sobre estas curvas já haviam sido apresentadas na linguagem geométrica por Apolônio por volta do século III a.C.. Apesar desse fato, Ferreira Lopes (2011, p.25), ao analisar diversos livros de Matemática do Ensino Médio, observou que muitos não tratam destes tipos de aplicações. Além disso, a maioria apresenta um estudo das curvas apenas sob o ponto de vista de equações algébricas, sendo que o tratamento

[1]Curvas obtidas pela variação da inclinação de um plano que intercepta um cone circular.

geométrico é de suma importância para a melhor compreensão das definições e demonstrações no tratamento analítico.

> Apesar de toda a sua importância histórica e de seu relevante papel no desenvolvimento tecnológico moderno, o estudo das cônicas na nossa escola básica acabou ficando restrito ao Ensino Médio, a favor de uma única abordagem a partir da Geometria Analítica, e reduzindo-se a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas. (QUARANTA et al, 2007, p.1).

Ainda, conforme Habib (2013, p.19), nem todos os professores de Matemática ensinam, orientam, trabalham da mesma maneira o conteúdo de cônicas com seus alunos no Ensino Médio. Alguns fatores podem contribuir para esse caso, por exemplo, a falta de habilidade para desenhar no quadro, a insegurança em conciliar a álgebra com Geometria ou até mesmo por achar que não seja necessária esta abordagem pelo fato dos alunos estudarem a parábola em funções quadráticas ou em disciplinas, como Física e Geografia, em que se estuda a trajetória do sistema solar, formando uma elipse.

A partir dos fatos acima descritos pode-se concluir que o estudo dessas curvas não deve ser reduzido e considerado como conhecidas apenas com essas passagens, mas sim, a partir delas, servir como justificativa de onde elas são diversamente aplicadas, merecendo assim, um estudo detalhado e compreensível de suas propriedades e favorecendo uma abordagem significativa do tema no Ensino Médio.

2.4. *SOFTWARE* DE GEOMETRIA DINÂMICA

Conforme a OCEM (2006, p.81), o processo de ensino-aprendizagem constante no sistema de ensino atual ainda é pouco explorado, devendo transferir para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo.

> Para o aprendizado da Geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da Geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura – daí serem denominados programas de Geometria dinâmica (OCEM, 2006, p.88).

Existem vários *softwares* para se trabalhar com a Geometria, porém, neste trabalho foi utilizado o *GeoGebra*[2], versão 4.4.43.0, um *software* educativo de Geometria dinâmica que serve como recurso didático.

---

[2]*Software* de Geometria dinâmica disponível em: <http://www.geogebra.org>.

Segundo Brandt e Montorfano (2008, p.2), o uso do *GeoGebra* poderá propiciar por meio de suas ferramentas, a execução de atividades matemáticas, enriquecendo o ambiente de aprendizagem e servindo como auxílio do professor e do aluno no processo de desenvolvimento do conhecimento. Além disso, sua utilização poderá dar condições necessárias para que se diminua a distância entre o professor e o computador, de modo que se sinta à vontade com seu manuseio e não ameaçado por esta tecnologia. Assim, o professor poderá diminuir suas limitações quanto ao uso de *software*s no ensino da Matemática, se sentindo estimulado para utilizar computadores durante a prática docente.

Hohenwarter (2007) apud Brandt e Montorfano (2008, p.9), idealizador do *software*, diz que “a característica mais destacável do *GeoGebra* é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na zona de gráficos e vice-versa”.

Desse modo, a escolha desse *software* se deu pelo fato de possibilitar ao aluno a aprender desenvolvendo seu próprio conhecimento, quando forem feitas as atividades propostas.

Acredita-se ainda que a utilização do *GeoGebra* no ensino de Matemática dê a oportunidade ao aluno de usar suas intuições durante as construções geométricas das cônicas, tendo em vista que este *software* garante a construção de formas geométricas possibilitando ver suas diferentes representações, além de permitir interações do aluno com os objetos através de movimentos nas construções dos diferentes modos sem a alteração de suas propriedades iniciais.

Hebenstreint (1987) apud Gravina e Santarosa (1998, p.8) afirma que o uso de um *software* no ensino permite criar um novo tipo de objeto, em que denomina como objetos concretos abstratos. Concretos porque existem na tela do computador, podendo ser manipulados e abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais.

3. METODOLOGIAS DE IMPLEMENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

A seguir são propostas atividades para o ensino da elipse, da parábola e da hipérbole no Ensino Médio. Para isso, cada uma das cônicas é tratada separadamente, sendo analisadas na forma geométrica e posteriormente na forma analítica. Assim, espera-se que os alunos possam verificar as propriedades e compreender melhor a definição dessas curvas.

Os procedimentos metodológicos propostos nesse trabalho foram elaborados de forma que desperte nos alunos o interesse pelo tema, são apresentados de uma maneira que propicie um ambiente colaborativo com interação entre aluno e professor durante o processo de ensino aprendizagem. Com isso, o aluno poderá desenvolver seu conhecimento cognitivo e o professor terá possibilidade de atuar como mediador.

Para o acompanhamento do ensino das cônicas é necessário que o aluno tenha conhecimento prévio necessário à realização e bom desempenho das atividades, sendo estes de Geometria Plana, tais como: mediatriz, congruência de triângulos, lugar geométrico, relações trigonométricas e noções superficiais de Geometria descritiva, parametrização de curvas, coordenadas de pontos e distância entre pontos e retas no plano.

> [...] a verdadeira aprendizagem em Matemática, particularmente em Geometria, deve passar necessariamente pelas etapas da exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas (QUARANTA et al, 2007, p.2).

Nesse sentido, a forma geométrica das cônicas será tratada através de dois procedimentos metodológicos distintos, em que haverá atividades construtivistas e reflexivas.

A primeira ação consiste numa exploração concreta da curva que será construída através do método criado por Kleper (1571-1630) descrito em sua obra *Ad Vitellionem Paralipomena* em que se utilizam instrumentos com barbantes esticados.

Os alunos receberão uma peça retangular de madeira similar a um plano, alguns instrumentos para construírem as cônicas e poderem visualizar diferentes possibilidades em que a construção poderá ser feita. Portanto, os alunos serão levados a elaborar a definição que contempla cada curva segundo características do lugar geométrico esboçado pelos pontos que as compõem e poderão analisar as propriedades de simetria estabelecidas pelas curvas.

A segunda ação consiste na construção das formas geométricas de maneira similar as construídas com material manipulativo, porém, a apresentação das cônicas será vista com utilização de TICs. Cada uma dessas curvas será construída sobre simulações computacionais através do *software* $GeoGebra$, além de reflexões que poderão ser realizadas, de modo a explorar conceitos a respeito de cada uma delas. Para isso, os alunos deverão estar diante de um computador e abrir o *software* para iniciar a construção das cônicas, conforme os passos que serão dados.

Durante o processo de construção das curvas e das reflexões, o professor deverá fazer questionamentos e os alunos poderão responder conforme seu entendimento. E, se possível, o professor poderá fazer as construções geométricas com auxílio de um computador e um projetor multimídia para que, os alunos, visualizem e recebam apoio caso tenham dúvidas. Assim, a partir da observação das atividades, o aluno construirá seu próprio conhecimento e, em seguida, poderá ser formalizado o conceito para concluir o seu raciocínio.

A terceira ação consiste na apresentação da forma analítica das cônicas que serão dadas a partir dos resultados obtidos com os experimentos reais e computacionais. Assim, ter-se-á a oportunidade de construir em conjunto as fórmulas referentes às cônicas segundo as definições.

3.1. ELIPSE

Definição: "Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, seja constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os focos ($2a > 2c$), com $\overline{F_1F_2} = 2c$", onde a é a metade do eixo maior e c é a distância do centro da elipse até um dos focos (DANTE, 2010, p.114).

3.1.1. **Tratamento geométrico da elipse**

A partir das construções concreta e computacional o aluno poderá formular a definição teórica dessa cônica e analisar geometricamente através de atividades reflexivas, conforme segue abaixo.

3.1.1.1. Parte concreta da elipse

A proposta inicial do trabalho se dá através da construção dessa cônica sobre um plano. Para isso, será dado, aos alunos, uma peça retangular de madeira, uma cartolina, um barbante inextensível, dois pregos e um lápis para que realizem a construção e identifiquem alguns aspectos da elipse.

Assim, para realizarem a construção desse experimento devem seguir os passos abaixo:

1) Coloque a cartolina acima da peça retangular de madeira e marque com o lápis dois pontos distintos quaisquer sobre a cartolina. Fixe os pregos nos dois pontos marcados.

Figura 1: Pregos fixados nos pontos escolhidos

2) Tome um barbante inextensível de comprimento maior que a distância entre os dois pontos marcados e fixe cada uma de suas extremidades aos pregos.

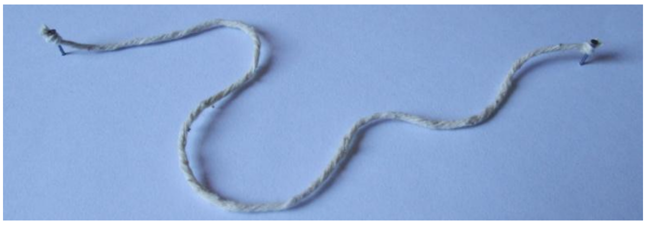


Figura 2: Barbante com extremidades fixadas aos pregos

3) Com a ponta do lápis estenda o barbante no plano mantendo-o sempre esticado ao máximo e, ficando sua ponta sobre a cartolina, movimente o lápis de um lado para outro, dando uma volta inteira.

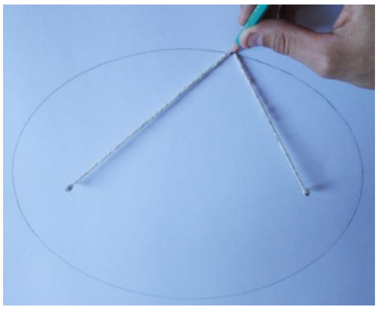


Figura 3: Procedimento final de construção da elipse concretamente

Na figura obtida, os alunos poderão observar a forma geométrica construída, que será denominada de elipse, sendo possível identificar os elementos necessários para essa construção e podendo assim, o professor denominar cada item como a seguir:

Os pontos onde foram fixados os pregos são denominados de focos da elipse, representados em azul na figura abaixo por F_1e F_2, e a distância determinada por esses dois pregos é denominado de segmento focal, representado por $2c$.

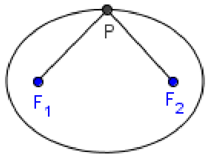


Figura 4: Elipse e seus elementos

A elipse é formada pelo contorno dos pontos feitos pelo lápis em volta dos focos, sendo esse ponto representado em preto por P.

Nesse momento, através desse experimento, pode-se notar que a elipse é formada por infinitos pontos $\{P_{1,}P_2, P_3, P_{4,} \dots, P_n, \dots\}$, sendo assim, o professor poderá questionar ao aluno o que se pode notar sobre os pontos P*'s* em relação aos dois pontos marcados inicialmente.

Os alunos devem notar que todo ponto P dessa curva satisfaz uma soma em que as distâncias de qualquer ponto P aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento do barbante, que é um valor constante e maior que a distância entre esses dois pontos, como solicitado anteriormente. Com isso, poderão notar que a elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.

Aqui, pode-se então se construir diversas elipses em que o comprimento do barbante seja maior que o segmento focal determinado por dois pontos quaisquer escolhidos. É possível verificar nessa etapa que todas as elipses construídas seguem um padrão, podendo conceituar a elipse formalmente conforme mostra o experimento.

3.1.1.2. Parte computacional da elipse

Após a apresentação da construção da elipse através do experimento concreto, espera-se que o aluno tenha adquirido conhecimento básico que lhe permita, com o auxílio do professor, construir computacionalmente uma elipse e desenvolver atividades reflexivas a fim de conhecer as propriedades e os elementos dessa cônica.

3.1.1.2.1. Construção da elipse no *software*

Com a janela do $GeoGebra$ aberta, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização e ao abrir uma caixa de opções, selecione a opção $Eixos$. Note que o eixo existente foi ocultado e assim os alunos poderão dar início à atividade de construção da elipse da seguinte forma:

1) Selecione o botão $Segmento$  e, no canto da janela de visualização, construa um segmento de qualquer comprimento, que será o tamanho do barbante. Note que o segmento construído recebeu o nome a e possui extremidades determinadas pelos pontos A e B, podendo ser chamado também de segmento $\overline{AB}$. Renomeie o segmento a para $barbante$.

Figura 5: Barbante representado por segmento

2) Com botão $Círculo\ dados\ centro\ e\ raio$  construa uma circunferência de modo que o centro seja um ponto qualquer não pertencente ao segmento $barbante$ e o raio de comprimento $barbante$. Renomeie a circunferência para λ e o centro para F_1.

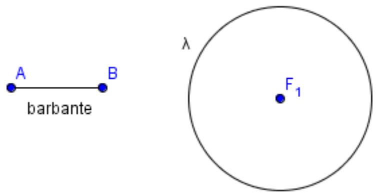


Figura 6: Circunferência λ de raio barbante

3) Com botão $Segmento$  construa um segmento de modo que seus extremos sejam o centro F_1 e um ponto qualquer pertencente a circunferência λ. Note que esse extremo que pertence a λ será representado pelo ponto C, renomeie para F, formando o segmento $\overline{F_1F}$, que receberá o nome a.

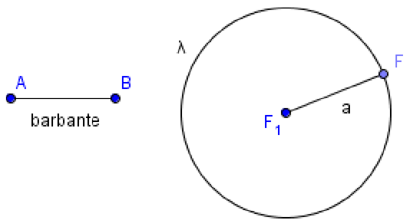


Figura 7: Circunferência λ de raio $\overline{F_1F} = a$

Os alunos podem nesse momento movimentar os objetos construídos e verificar quais são as regularidades existentes. O professor deve questionar o aluno sobre os acontecimentos e espera-se que eles percebam que à medida que se aumenta ou diminui o tamanho do barbante, pelos pontos A ou B, altera-se o tamanho da circunferência, pois o comprimento do barbante é igual ao segmento $\overline{F_1F}$, que é o raio.

Ao movimentar os pontos dados, o ponto F permite alterar o posicionamento do raio sem que altere seu tamanho, estando sempre sobre a circunferência λ e o ponto F_1

desloca o centro da circunferência, sendo movida sem que se altere seu comprimento. Também é possível perceber que os segmentos, barbante e raio da circunferência, são iguais através da janela de visualização que $\overline{AB} = \overline{F_1F}$ ou através da janela de álgebra que $a = barbante$, sendo este com valor numérico exposto.

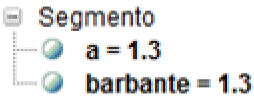


Figura 8: Visualização dos segmentos a e $barbante$ na janela de álgebra

4) Oculte o nome do segmento a e com o botão $Ponto$  marque um ponto qualquer interno a circunferência λ. Este ponto receberá o nome C, renomeie para F_2.

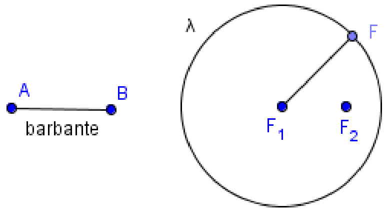


Figura 9: Ponto F_2 interno a circunferência λ

5) A fim de obter uma construção da elipse semelhante ao experimento concreto[3], pode-se observar até o momento a marcação dos dois focos , F_1 e F_2, e o barbante representado pelo segmento $\overline{AB} = \overline{F_1F}$. Para que se tenha o barbante esticado até um ponto e seus extremos nos focos, mantendo seu comprimento, é preciso que se trace a reta mediatriz relativa aos pontos F_2 e F com o botão $Mediatriz$  que receberá o nome de b. Renomeie para m e os alunos poderão notar que essa reta permite observar o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos F e F_2.

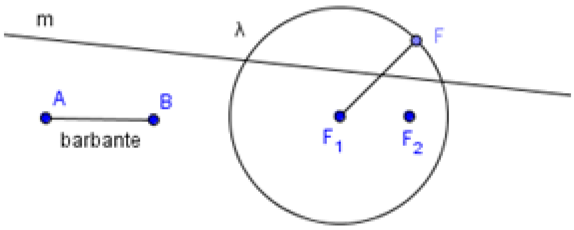


Figura 10: Mediatriz m de F e F_2

6) O ponto de interseção da mediatriz m com o segmento $\overline{F_1F}$ estabelece a garantia de que a distância até o ponto F é a mesma até o F_2, portanto, com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque o ponto de interseção da mediatriz m com o segmento $\overline{F_1F}$. O ponto receberá o nome C, renomeie para P.

[3]Esse experimento encontra-se detalhado na página 26 deste trabalho.

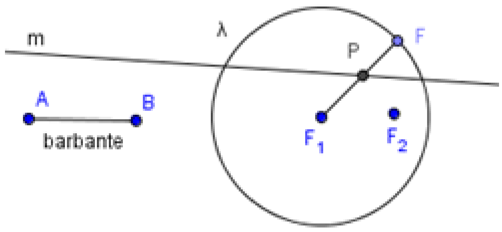


Figura 11: Ponto P de interseção entre mediatriz m e raio $\overline{F_1F}$

7) Construa os segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ com o botão $Segmento$  e observe que eles receberão os nomes b e c.

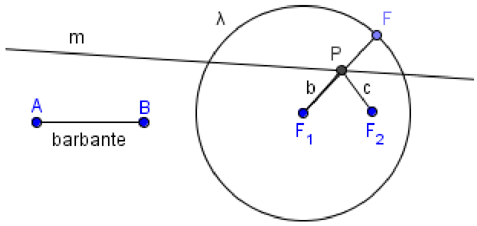


Figura 12: Criação dos segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$

O aluno deverá movimentar a construção a partir do ponto F_1 ou F_2 de modo que se tenha o ponto F_2 sempre interno à λ. Assim, espera-se que ele observe que $\overline{PF}$ será sempre igual a $\overline{PF_2}$.

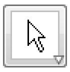
Para melhor visualização, oculte o nome dos segmentos criados, a reta mediatriz m, a circunferência λ e o segmento $\overline{F_1F} = a$.

Figura 13: Procedimento final de construção da elipse computacionalmente

Os alunos poderão notar nesse momento que a construção realizada até aqui é semelhante ao que foi visto na parte concreta, em que os pontos F_1 e F_2 são os pontos quaisquer escolhidos e que P é o ponto quando o barbante está esticado ao máximo com o lápis.

Sendo assim, o ponto F permite que o ponto P seja movido de maneira que se tenha sempre P como o momento em que o barbante está totalmente esticado.

Selecione a opção $Habilitar\ Rastro$  do ponto P. Assim, os pontos P's, que são rastros de P, serão marcados de acordo com que ele seja movido. Para isso, siga o passo abaixo:

Com o botão $Mover$  movimente o ponto F que possibilitará mover o ponto P.

À medida que o ponto P se movimenta é possível notar que os rastros desse ponto são marcados, formando-se uma elipse, como se fosse o rastro do lápis no experimento concreto.

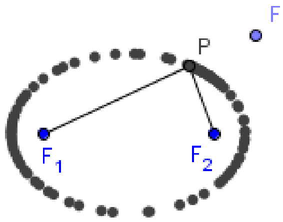


Figura 14: Elipse formada pelos rastros do ponto P

E, por definição, a elipse é o lugar geométrico de todos os pontos que satisfazem uma propriedade, assim, com o botão $Lugar\ Geométrico$  pode-se identificar o lugar geométrico clicando no ponto F e P, sucessivamente, que coincidirá com o rastro marcado pelo ponto P, conforme a Figura 15.

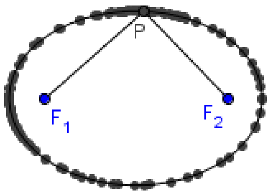


Figura 15: Elipse formada pelo lugar geométrico

Outra forma de obter a elipse é a partir da reta mediatriz construída anteriormente, pois se sabe que esta reta passa pelo ponto P. Para isso, desabilite o rastro do ponto P, oculte o lugar geométrico e exiba a reta mediatriz m.

Habilite o rastro da reta mediatriz e mova o ponto F para que a elipse seja formada como segue a Figura 16 abaixo:

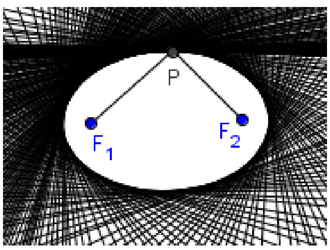


Figura 16: Elipse formada pela reta mediatriz m

3.1.1.2.2. Reflexões sobre a elipse

Desabilite a opção rastro da reta mediatriz m e exiba o lugar geométrico.

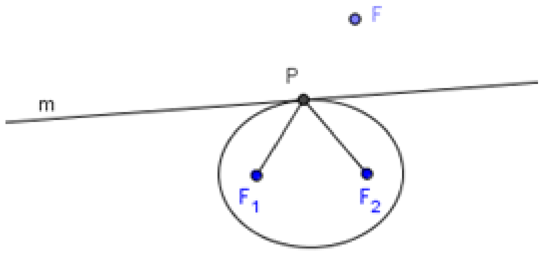


Figura 17: Lugar geométrico e reta mediatriz m

Ao mover o ponto F o aluno deverá observar que a reta mediatriz m contorna a curva formada pela elipse sem cortá-la, sempre compartilhando um único ponto, dessa forma, o professor deve questioná-los sobre qual nome se dá a essa relação entre objetos geométricos. Assim, espera-se que eles se lembrem que, neste caso, trata-se uma reta tangente à curva.

Exiba a circunferência λ e o segmento a. Oculte a reta mediatriz m, construa um segmento $\overline{PF}$ com o botão $Segmento$  e oculte seu nome que receberá nome d.

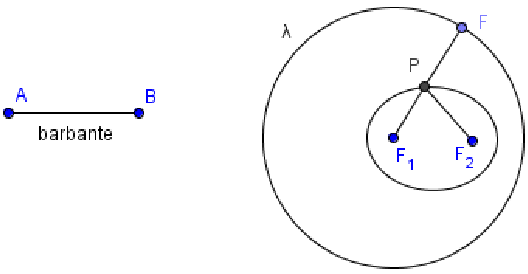
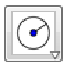


Figura 18: Exibição da circunferência λ, segmento a e criação do segmento $\overline{PF}$

Com o botão $Círculo\ dados\ Centro\ e\ Raio$  construa uma circunferência com centro em P e raio $\overline{PF} = d$. Renomeie a circunferência para α.

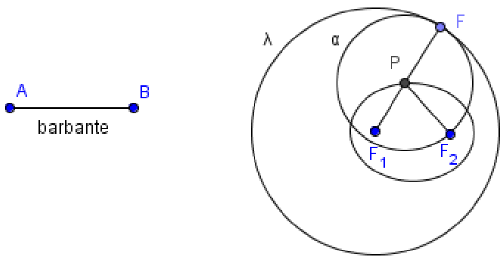


Figura 19: Construção da circunferência α

Clique para exibir nome e valor dos segmentos $barbante = \overline{AB}$ e $a = \overline{F_1F}$.

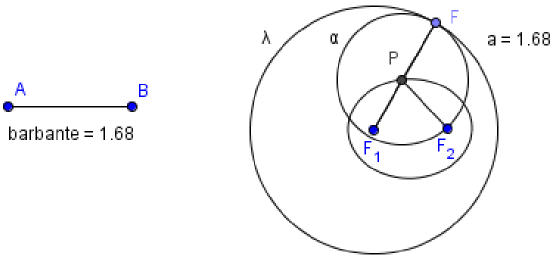


Figura 20: Exibição do nome e valor dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{F_1F}$

Com essa construção, os alunos deverão mover o ponto F e aumentar ou diminuir o segmento $barbante$, sendo possível eles visualizarem a propriedade da elipse em que a soma das distâncias do ponto P aos dois pontos fixos, F_1 e F_2, será sempre igual a constante de comprimento $barbante$. Isso pode ser observado porque a circunferência λ foi criada inicialmente com centro F_1 e raio de comprimento $barbante$. Portanto, $\overline{F_1F} = \overline{AB}$ e pode-se notar esse fato ao verificar que os valores dos segmentos se mantêm iguais à medida que se altera o segmento $barbante$. A partir da circunferência α é possível observar que o raio $\overline{PF} = \overline{PF_2}$.

Oculte a circunferência α, os segmentos a e d para que se possa analisar mais um caso.

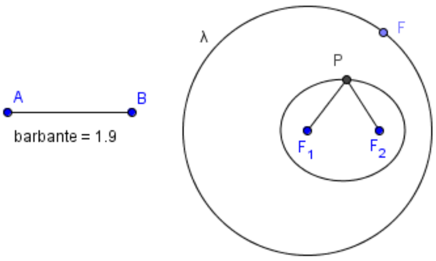


Figura 21: Ocultação da circunferência α e segmentos a e d

Utilizando o botão $Mover$ mova qualquer um dos focos, F_1ou F_2, de modo que F_2 se torne um ponto exterior a λ. Nesse momento, será possível o aluno observar que quando a distância entre os focos for maior que o segmento $\overline{AB}$, de comprimento $barbante$, a elipse deixará de existir.

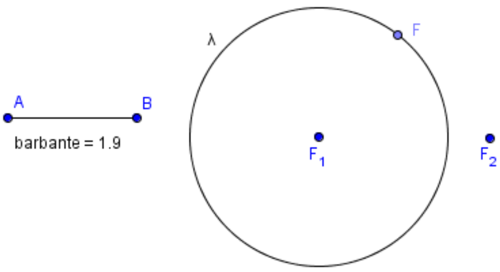


Figura 22: Inexistência da elipse

Analisando geometricamente o aluno poderá confirmar a definição de elipse, pois para sua existência é necessário que a soma dos pontos P's aos dois focos seja sempre maior que a distância entre eles. Ao retornar com o ponto F_2 interior a circunferência λ nota-se novamente a existência da elipse.

Oculte a circunferência λ e utilize o botão $Elipse$  e clique sucessivamente, nos pontos F_1, F_2 e P e note que a elipse construída é exatamente o lugar geométrico já existente, que receberá nome f. Renomeie para elipse.

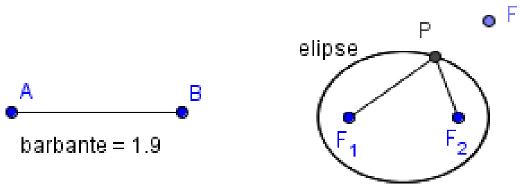


Figura 23: Cônica construída a partir do botão elipse

Agora oculte o lugar geométrico e com o botão $Reta$  construa uma reta passando por F_1e F_2, que receberá o nome e como a Figura 24 a seguir:

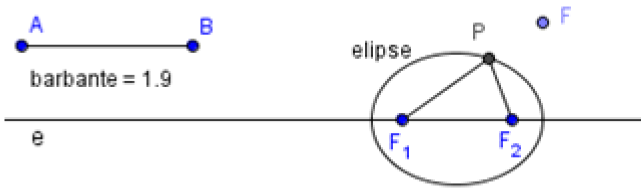


Figura 24: Reta passando pelos focos da elipse

Utilizando o botão $Ponto\ Médio\ ou\ Centro$  clique na elipse e note que o centro dela será marcado, o ponto C. Esse fato pode ser observado selecionando sucessivamente os dois focos, em que será marcado o ponto médio entre eles que coincidirá com o centro da elipse. Renomeie o ponto C para O.

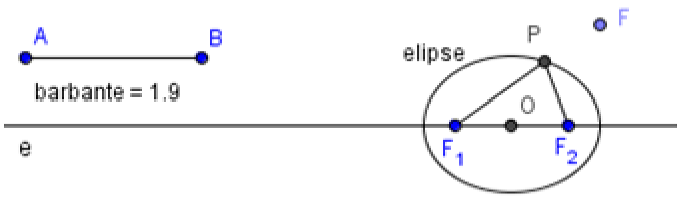


Figura 25: Marcação do centro O da elipse

Com o botão $Reta\ Perpendicular$  clique na reta e e arraste até o centro O da elipse para construir a reta f. Nesta construção o aluno deverá notar que haverá dois eixos, as retas e e f, perpendiculares entre si. O ponto de interseção desses eixos é o centro da elipse.

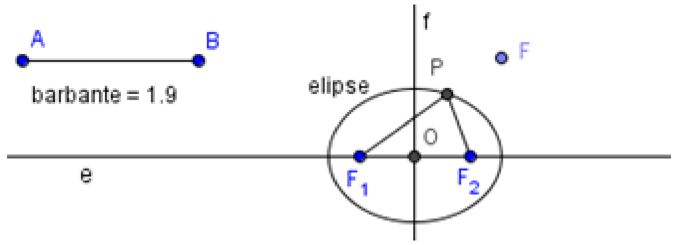


Figura 26: Reta f perpendicular à reta e

A partir dessa construção, poderá ser explorado o comprimento dos eixos da elipse e verificar algumas de suas propriedades.

Para isso, oculte os dois segmentos internos da elipse, b e c e o ponto P.

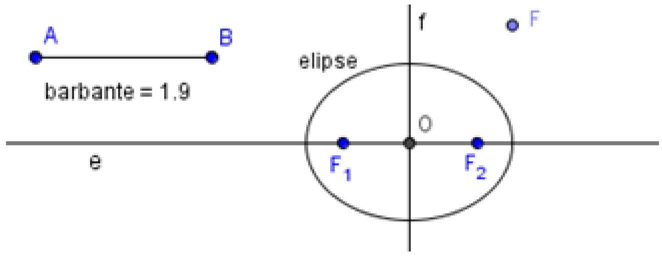


Figura 27: Ocultação dos segmentos b e c e ponto P

Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$ clique no eixo horizontal, reta e, na elipse e depois no eixo vertical, na reta f, e na elipse para que os pontos de interseções sejam marcados. Renomeie os pontos para A_1, A_2, B_1 e B_2 como a Figura 28 abaixo.

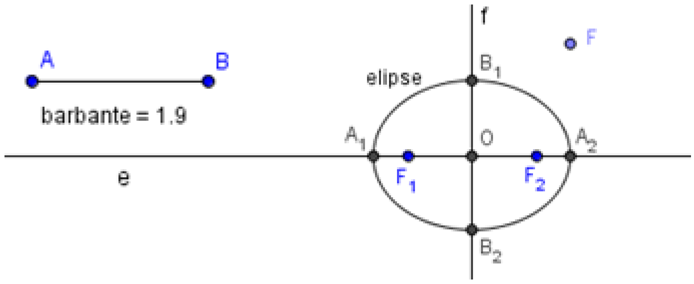


Figura 28: Pontos de interseção entre a reta e e elipse e reta f e elipse

Oculte as retas e e f e com o botão $Segmento$ crie os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, que serão os eixos da elipse e receberão nomes g e h. Oculte o nome desses segmentos criados.

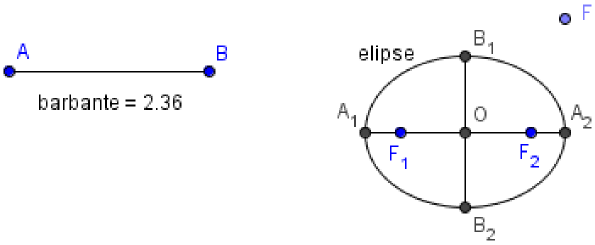


Figura 29: Criação dos segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$

Com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$  meça o comprimento dos segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

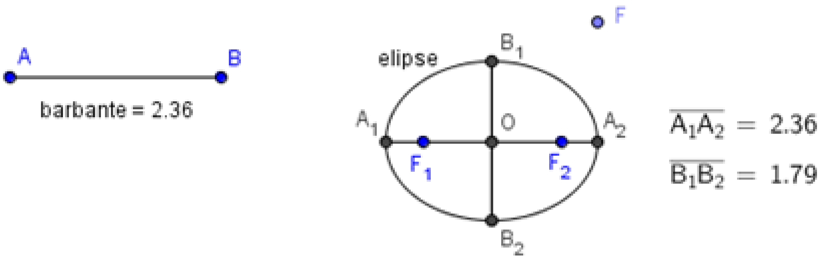


Figura 30: Comprimento dos segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$

Neste momento, com os valores exibidos, os alunos devem ser questionados sobre o que acontece ao mover os focos. Espera-se que verifiquem que eles sempre pertencerão ao eixo que possui o maior comprimento, devendo o professor denominar estes eixos como eixo maior e eixo menor, representados respectivamente por $2a$ e $2b$.

Pode ser notado, ainda, que os eixos da elipse são perpendiculares e se encontram no ponto médio, e assim, um eixo está contido sobre a mediatriz do outro eixo, podendo concluir que a distância do centro até uma extremidade do eixo maior mede a e do centro até uma extremidade do eixo menor mede b.

Oculte os valores dos eixos e com o botão $Distância, Comprimento\ ou$ $Perímetro$  meça a distância dos focos até o centro da elipse, ou seja, os segmentos $\overline{F_1O}$ e $\overline{OF_2}$.

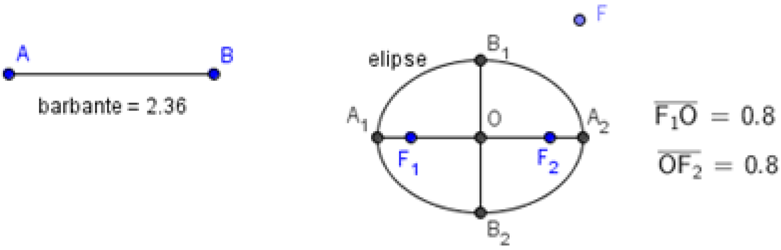


Figura 31: Distância do centro O aos focos da elipse

Ao movimentar os focos, os alunos podem notar que, além de pertencerem ao eixo maior, eles sempre serão equidistantes do centro da elipse, que coincide com o ponto médio deste eixo.

Assim, como visto no experimento concreto, a distância entre os dois focos, que eram os pregos fixados, representa o comprimento do segmento focal, denominado por $2c$. Com isso, pode-se analisar a veracidade da definição de elipse, pois o segmento focal será sempre menor que o eixo maior ($2a > 2c$), além de concluir que a distância do centro da elipse até um dos focos mede c.

Oculte os valores dos segmentos $\overline{F_1O}$ e $\overline{OF_2}$ exibidos e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{B_1F_1}$, $\overline{B_1F_2}, \overline{B_2F_1}$ e $\overline{B_2F_2}$. Oculte o nome desses segmentos criados.

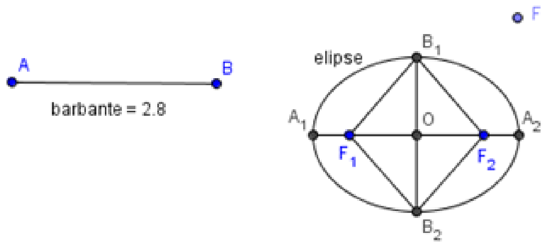


Figura 32: Criação dos segmentos $\overline{B_1F_1}$, $\overline{B_1F_2}, \overline{B_2F_1}$ e $\overline{B_2F_2}$

Com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$ 

meça o comprimento dos segmentos $\overline{B_1F_1}$, $\overline{B_1F_2}, \overline{B_2F_1}$ e $\overline{B_2F_2}$.

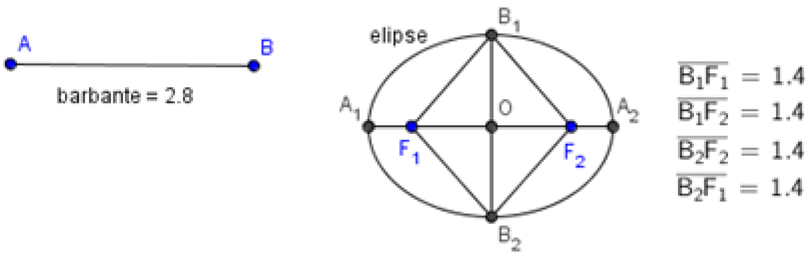


Figura 33: Comprimento dos segmentos $\overline{B_1F_1}$, $\overline{B_1F_2}, \overline{B_2F_1}$ e $\overline{B_2F_2}$

Ao movimentar o segmento $\overline{AB}$ para alterar o tamanho dos eixos, o aluno poderá notar que os extremos do eixo menor estão sempre a uma mesma distância dos focos, constituindo-se um losango $B_1F_1B_2F_2$. É importante lembrar que os vértices B_1 e B_2 do losango são exatamente um dos pontos $P's$ da construção da elipse em que o barbante está esticado.

Com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$ 

meça a distância do centro O até o extremo do eixo maior A_2, ou seja, o segmento $\overline{OA_2}$.

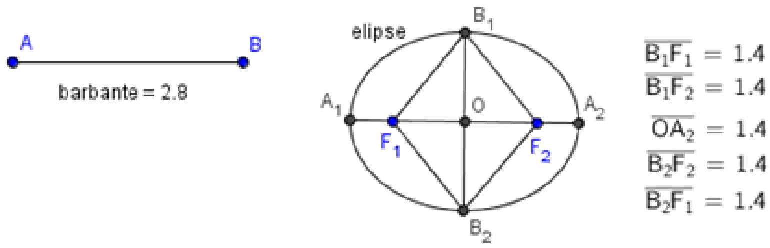


Figura 34: Distância do centro O ao extremo do eixo maior

Movimentando a construção, pode-se verificar que os vértices do eixo menor estão a uma distância do foco que corresponde à metade do eixo maior.

Assim, pode-se dizer que $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}, = \overline{B_2F_1} = \overline{B_2F_2} = a$.

Oculte os segmentos $\overline{B_1F_1}$, $\overline{B_2F_1}$ e $\overline{B_2F_2}$. Com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{B_1O}$ e $\overline{OF_2}$ que receberão nomes, respectivamente, n e p e substitua o estilo dos segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ para pontilhado, conforme a Figura 35 abaixo.

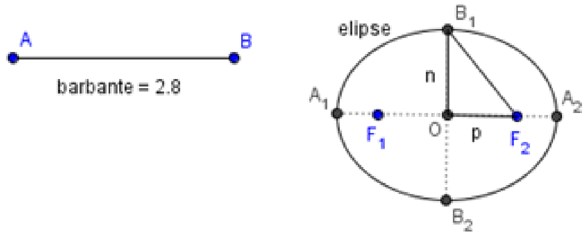
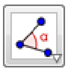


Figura 35: Segmentos $\overline{B_1O}$ e $\overline{OF_2}$ criados e estilo do $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ alterado

Com o botão $Ângulo$  construa o ângulo $F_2\hat{O}B_1$, renomeie para θ e verifique seu valor.

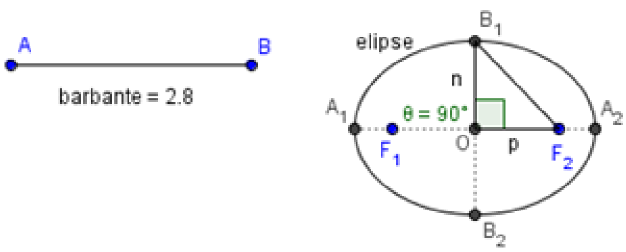


Figura 36: Ângulo $F_2\hat{O}B_1$

Sabe-se, até aqui, que metade do segmento focal é igual a c, metade do eixo menor é igual a b e que metade do eixo maior é igual à distância de um dos focos até um extremo do eixo menor, que mede a. Pode-se notar que o ângulo $B_1\hat{O}F_2$ é reto, assim é visível a existência de um triângulo retângulo B_1OF_2 com lados iguais a a, b e c.

Exiba o nome do segmento $\overline{B_1F_2}$ e conforme visto acima, renomeie os segmentos para seus respectivos valores e oculte o nome e valor do ângulo θ como na Figura 37 a seguir.

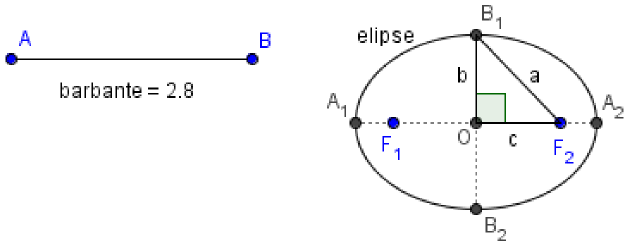
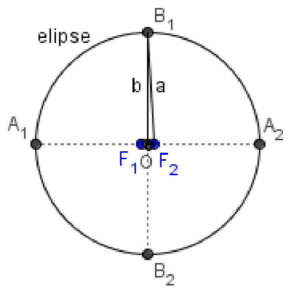


Figura 37: Segmentos renomeados

O aluno pode alterar o tamanho do segmento $\overline{AB}$ ou dos focos e verificar que a propriedade do triângulo retângulo será sempre mantida. Assim, pode-se notar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Além dessa relação, existe outra fundamental que se chama excentricidade, onde a $excentricidade = \frac{c}{a}$. Dessa forma, digite na caixa de entrada do $GeoGebra$ essa relação.

Os alunos devem movimentar a construção e verificar o que acontece. Espera-se que eles notem que ao aproximar os focos de modo que se tenha $F_1 \neq F_2$, a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência, pois o eixo menor aumenta até que tenha seu tamanho próximo do eixo maior e, caso contrário, ao afastar os focos, nota-se que o eixo menor diminui e o limite de afastamento dos focos é até que a distância entre eles seja menor que eixo maior. Neste caso, a excentricidade se aproxima de 1 e para todos os casos sempre $0 < e < 1$.



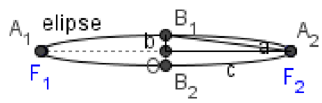


Figura 38: Aproximação dos focos Figura 39: Afastamento dos focos

Por fim, o professor deve formalizar dizendo que a excentricidade indica quanto a elipse se aproxima de um segmento ou de uma circunferência, conforme seu valor se aproxima de 1 ou de 0, respectivamente.

3.1.2. **Tratamento analítico da elipse**

A partir dos experimentos concretos e computacionais vistos acima, pode-se fazer a análise algébrica da elipse.

Inicialmente considera-se a elipse com seu centro O em $(0,0)$. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a elipse era formada por extremidades do eixo maior nos pontos de coordenadas $A_1\ (-a,0)$, $A_2\ (a,0)$, do eixo menor nos pontos $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ e focos $F_1\ (-c,0)$, $F_2\ (c,0)$. Portanto, pode ser visto que a elipse possui seus focos no eixo Ox, como na Figura 40 abaixo:

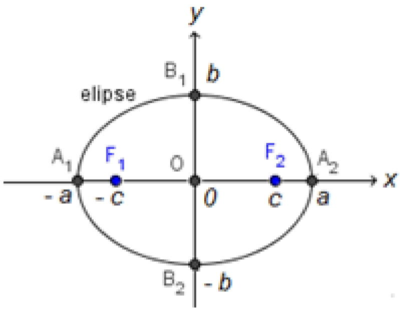


Figura 40: Elipse com centro em O e focos no eixo Ox

Considera-se um ponto $P(x,y)$ qualquer da curva e, pela definição, tem-se o seguinte:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$$

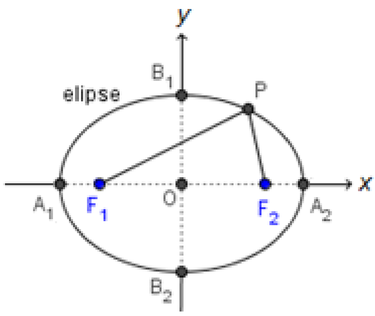


Figura 41: Elipse e um ponto P pertencente a ela

Daí tem-se:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Utilizando a definição de distância entre dois pontos e sabendo que $P(x,y)$, $F_1\ (-c,0)$, $F_2\ (c,0)$, tem-se o seguinte:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \implies$$

$$\implies \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \implies$$

$$\implies \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Numa igualdade, podem-se realizar operações iguais em cada lado de modo que seja mantida. Com isso, subtraindo $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ de cada lado, tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os termos de cada lado da igualdade ao quadrado, tem-se:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 - x^2 - 2cx - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Na parte direita da igualdade, tem-se um termo em comum que se pode por em evidência, assim tem-se:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4(a^2 - cx)$$

Dividindo os termos de cada lado da igualdade por 4, tem-se:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Novamente, elevam-se os termos de cada lado da igualdade ao quadrado, assim tem-se:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (*)$$

Na elipse, viu-se que existe a propriedade do triângulo retângulo e a partir disso obtém-se o seguinte:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Subtraindo c^2 dos dois lados da igualdade, obtém-se:

$$a^2 - c^2 = b^2 + c^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 \qquad (**)$$

Substituindo $(**)$ na equação $(*)$, obtém-se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Sendo $ab \neq 0$, dividi-se por a^2b^2 dos dois lados da igualdade e tem-se:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Simplificando, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (I)$$

Em que $a = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, $c = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ e b tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

Essa equação é denominada equação reduzida da elipse, com centro O na origem e focos no eixo Ox.

Pode-se analisar agora quando a elipse possui seu centro O na origem e seus focos no eixo Oy. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a elipse será formada por extremidades do eixo maior nos pontos de coordenadas $A_1\,(0\,,\,a)$, $A_2\,(0,-a)$, do eixo menor nos pontos $B_1(-b,0)$, $B_2(b,\ 0)$ e focos $F_1\,(0,\ c)$, $F_2\,(0,\ -c)$, conforme a Figura 42:

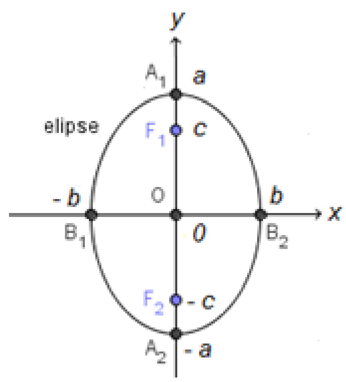


Figura 42: Elipse com centro em O e focos no eixo Oy

Do mesmo modo realizado para encontrar a equação (I), a equação reduzida da elipse para este caso, ou seja, com centro na origem e focos no eixo Oy será dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Em que $a = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, $c = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ e b tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

Analogamente, podem-se encontrar as equações da elipse com centro O qualquer. Para isso, chega-se a elas considerando o centro da elipse sendo um ponto qualquer $O(x_0, y_0)$ e os eixos paralelos aos eixos x e y. Sendo assim, para efetuar a translação dos eixos deve-se tomar a diferença dos pontos $P(x, y)$ e $O(x_0, y_0)$, obtendo-se:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ paralelo ao eixo x, $a = \overline{OA_1}$, $b = \overline{OB_1}$ e $a > b$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2ª) $\overline{F_1F_2}$ paralelo ao eixo y, $a = \overline{OA_1}$, $b = \overline{OB_1}$ e $a > b$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

3.2. PARÁBOLA

Definição: "A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa, chamada $diretriz$, e de um ponto fixo F, não pertencente à diretriz, chamado foco". (DANTE, 2010, p.105)

3.2.1. **Tratamento geométrico da parábola**

A partir das construções concreta e computacional o aluno poderá formular a definição teórica dessa cônica e analisar geometricamente através de atividades reflexivas.

3.2.1.1. Parte concreta da parábola

Nessa atividade será construída uma parábola sobre um plano. Para isso, será dado, aos alunos, uma peça retangular de madeira, uma cartolina, um barbante inextensível, um prego, uma régua, um esquadro no formato de triângulo retângulo escaleno e um lápis para que realizem a construção e identifiquem alguns aspectos da parábola.

Assim, para realizarem a construção desse experimento deve-se seguir os passos abaixo:

1) Coloque a cartolina acima da peça retangular de madeira e trace uma reta qualquer utilizando o lápis e a régua.

Figura 43: Reta qualquer traçada

2) Marque, com o lápis, um ponto sobre a cartolina não pertencente a reta traçada e de modo que a distância entre eles seja menor que a medida do cateto maior do esquadro . Fixe o prego neste ponto marcado.

Figura 44: Prego fixado no ponto escolhido não pertencente à reta

3) Fure a ponta do esquadro que contém o menor ângulo agudo e, tomando um barbante inextensível de comprimento igual ao cateto maior do esquadro, amarre-o na extremidade furada. Prenda a outra extremidade do barbante no prego fixado.

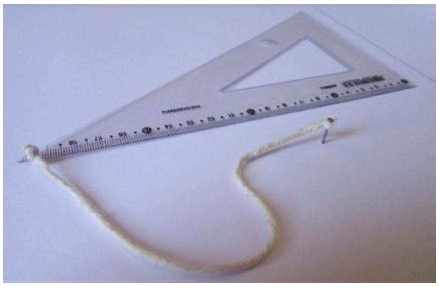


Figura 45: Barbante com extremidades fixadas no prego e no esquadro

4) Apoie o cateto menor do esquadro e a régua sobre a reta traçada de modo que a régua sirva de apoio para o movimento do esquadro. Com a ponta do lápis estenda o barbante no plano mantendo-o sempre esticado e apoiado no cateto maior do esquadro, assim, com sua ponta sobre a cartolina, movimente o esquadro de um lado para outro, até onde o barbante permitir.

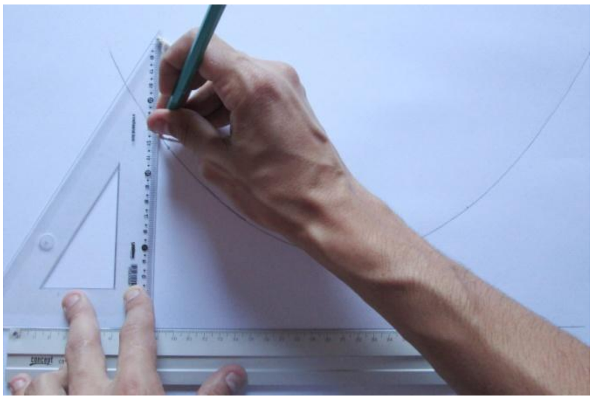


Figura 46: Procedimento final de construção da parábola concretamente

Ao observar a figura obtida, os alunos poderão verificar que a forma geométrica construída é uma parábola, sendo possível identificar os elementos necessários para essa construção e podendo o professor denominar cada item como a seguir:

O ponto escolhido que o prego foi fixado é denominado foco da parábola, representado em azul na figura abaixo por F.

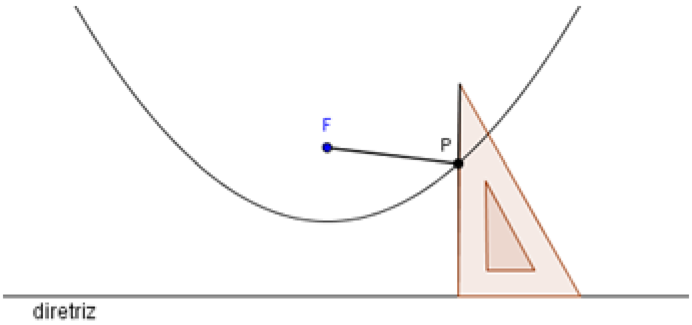


Figura 47: Parábola e seus elementos

A parábola é formada pelo contorno dos pontos feitos pelo lápis em volta do foco, sendo esse ponto representado em preto por P. A reta traçada é denominada reta $diretriz$.

Nesse momento, através desse experimento, pode-se notar que a parábola é formada por infinitos pontos $\{P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots\}$. O professor deverá questionar ao aluno o que se pode notar sobre os pontos P*'s* em relação ao foco e a reta traçada inicialmente.

Com isso, os alunos deverão notar que todo ponto P dessa curva satisfaz uma distância entre ele até a reta traçada igual à distância dele até o ponto fixado. Assim, P é equidistante da reta e do ponto fixado, pois o comprimento do barbante é igual ao tamanho do cateto, como solicitado anteriormente. Com isso, poderão notar que a parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.

Aqui, podem-se construir diversas parábolas em que o comprimento do barbante seja igual ao cateto maior do esquadro e que a distância entre o ponto e a reta seja menor que este cateto. É possível verificar nessa etapa que todas as parábolas construídas seguem um padrão, podendo, assim, conceituar a parábola formalmente conforme mostra o experimento.

3.2.1.2. Parte computacional da parábola

Após a apresentação da construção da parábola através do experimento concreto, espera-se que o aluno tenha adquirido conhecimento básico que lhe permita, com o auxílio do professor, construir computacionalmente uma parábola e desenvolver atividades reflexivas a fim de conhecer as propriedades e elementos dessa cônica.

3.2.1.2.1. Construção da parábola no *software*

Com a janela do $GeoGebra$ aberta, oculte os eixos e dê início à atividade de construção da parábola da seguinte forma:

1) Selecione o botão $Reta$  e construa na janela de visualização uma reta qualquer que receberá o nome a e possui os pontos A e B. Renomeie essa reta para $diretriz$.

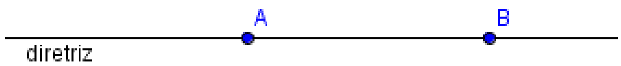


Figura 48: Reta $diretriz$

2) Com o botão $Ponto$  construa dois pontos de modo que o primeiro seja um ponto não pertencente a reta $diretriz$ e o segundo um ponto pertencente a esta reta. Note que os pontos receberam nomes C e D, respectivamente. Renomeie o ponto C para F.

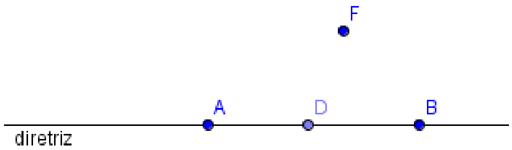


Figura 49: Ponto D pertencente à diretriz e F não pertencente

3) Com botão $Reta\ Perpendicular$  construa uma reta perpendicular a reta $diretriz$ passando pelo ponto D. Note que esta reta será representada pela letra a.

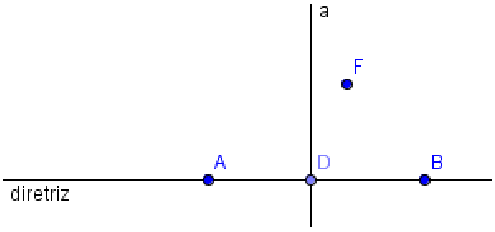
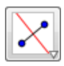


Figura 50: Reta a perpendicular à $diretriz$ passando por D

Os alunos devem, nesse momento, movimentar os objetos construídos. O professor deverá questionar o aluno a fim de que ele perceba a possibilidade de mover o ponto D somente sobre a reta $diretriz$ e que ao mover A ou B, muda-se a inclinação da $diretriz$, mas a reta a continua perpendicular a ela passando por D. Já o ponto F pode ser movimentado livremente.

4) Similar ao experimento concreto[4], tem-se uma reta $diretriz$ e a marcação de um ponto F. Portanto, para que se tenham todos os pontos $P's$ marcados, que equidistam F e D é preciso que se construa com o botão $Mediatriz$  a reta mediatriz do ponto F e D que receberá, automaticamente, o nome b e renomeie para m.

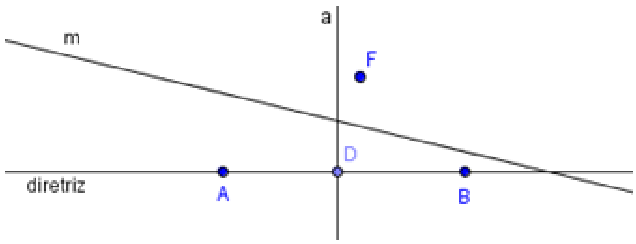


Figura 51: Mediatriz m de F e D

[4]Esse experimento encontra-se detalhado na página 44 deste trabalho.

5) Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque o ponto de interseção da mediatriz m com a reta a perpendicular a $diretriz$. Renomeie este ponto de interseção que recebeu nome C para P.

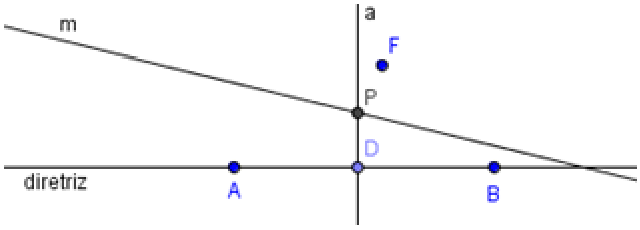


Figura 52: Ponto P de interseção entre mediatriz m e reta a

6) Construa os segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$ com o botão $Segmento$  que receberão os nomes b e c, simultaneamente. Oculte o nome desses segmentos.

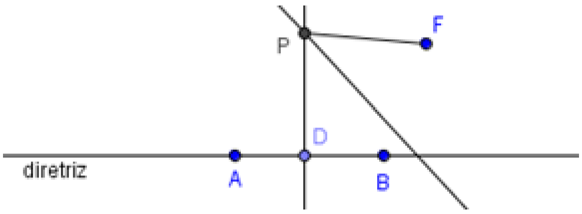


Figura 53: Construção dos segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$

O aluno deverá movimentar a construção a partir do ponto D. Assim, espera-se que ele observe que $\overline{PF}$ sempre será igual a $\overline{PD}$.

Para melhor visualização, oculte a reta mediatriz m e a reta a perpendicular a $diretriz$.

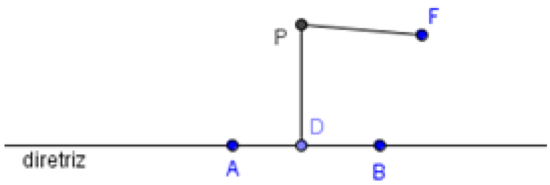


Figura 54: Procedimento final de construção da parábola computacionalmente

Os alunos poderão notar, nesse momento, que a construção realizada é semelhante ao que foi realizado na parte concreta, em que F é o ponto qualquer escolhido, P é o ponto quando o barbante está esticado ao máximo com o lápis e $diretriz$ é a reta traçada.

Sendo assim, o ponto D permite movimentar o ponto P de maneira que se tenha sempre P como o barbante totalmente esticado.

Selecione a opção $Habilitar\ Rastro$  do ponto P. Assim, os pontos P's que são imagens de P serão marcados de acordo com que ele seja movido. Para isso, siga o passo abaixo:

Com o botão $Mover$  movimente o ponto D que possibilitará mover o ponto P.

Na medida em que o ponto P se movimenta é possível notar que os rastros desse ponto são marcados, formando uma parábola, como se fosse a linha do lápis no experimento concreto.

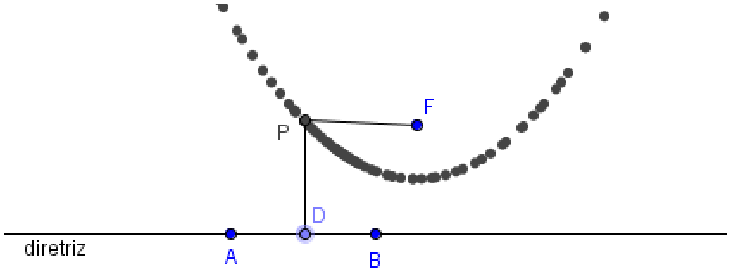


Figura 55: Parábola formada pelos rastros do ponto P

E, por definição, a parábola é o lugar geométrico de todos os pontos que satisfazem uma propriedade, assim, com o botão $Lugar\ Geométrico$  pode-se identificar o lugar geométrico clicando no ponto D e P, sucessivamente, ele coincidirá com o rastro marcado pelo ponto P, conforme a Figura 56.

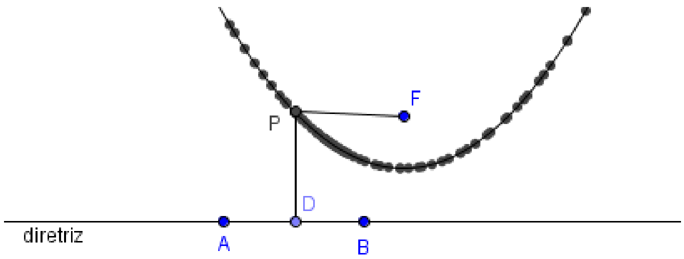


Figura 56: Parábola formada pelo lugar geométrico

Outra forma de obter a parábola é a partir da reta mediatriz m construída anteriormente, pois se sabe que esta reta passa pelo ponto P. Para isso, desabilite o rastro do ponto P, oculte o lugar geométrico e exiba a reta mediatriz m.

Habilite o rastro da reta mediatriz m e mova o ponto D para que a parábola seja formada como segue a figura abaixo:

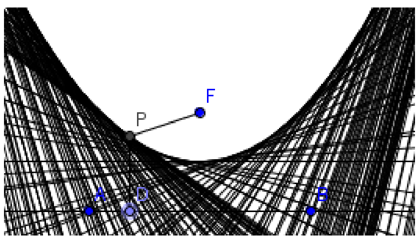


Figura 57: Parábola formada pela reta mediatriz m

3.2.1.2.2. Reflexões sobre a parábola

Desabilite a opção rastro da reta mediatriz m e exiba o lugar geométrico.

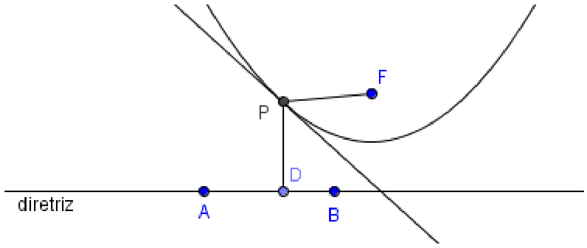


Figura 58: Lugar geométrico e reta mediatriz m

Ao mover o ponto D o aluno deverá observar que a reta mediatriz m contorna a curva formada pela parábola sem cortá-la, sempre tangenciando um único ponto, dessa forma, o professor deve questioná-los sobre qual nome se dá a essa relação entre objetos geométricos. Assim, espera-se que eles notem que neste caso trata-se da reta tangente à curva.

Oculte a reta mediatriz m e com o botão $Círculo\ dados\ Centro\ e\ um\ de\ seus\ Pontos$  construa uma circunferência com centro em P e um de seus pontos sendo F. A circunferência receberá nome d, renomeie para λ e exiba os valores dos segmentos $b = \overline{PF}$ e $c = \overline{PE}$.

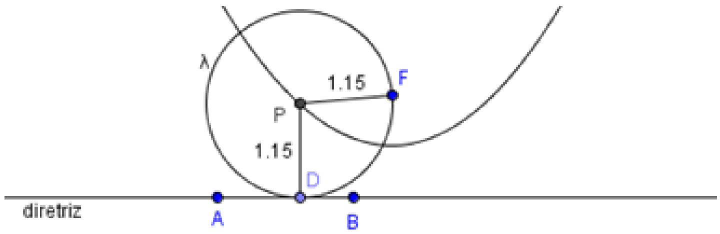


Figura 59: Circunferência λ e valores de $\overline{PF}$ e $\overline{PE}$ exibidos

Com essa construção, os alunos deverão mover o ponto D ou a reta $diretriz$ através dos pontos A ou B, sendo possível eles visualizarem a propriedade da parábola em que a distância do ponto P ao ponto F será sempre igual à distância de P a reta $diretriz$. Isso pode ser observado porque a circunferência λ foi criada com centro P e um de seus pontos sendo F. Assim, nota-se que o ponto D também pertence à circunferência, portanto, $\overline{PF} = \overline{PD}$ e pode-se verificar esse fato através dos valores dos segmentos que se mantêm iguais na medida em que se move o ponto D e altera-se o valor do raio da circunferência.

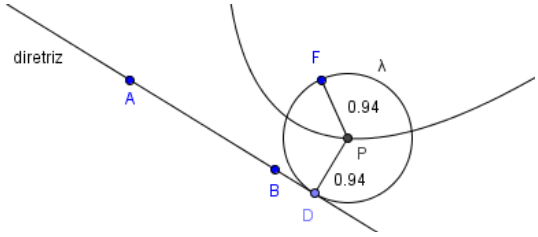


Figura 60: Construção movida a partir de A ou B

Oculte a circunferência λ, exiba novamente a reta mediatriz m e com o botão $Ponto$ marque um ponto sobre ela que receberá o nome C. Com o botão $\hat{A}ngulo$ construa o ângulo $D\hat{P}C$ que receberá nome α.

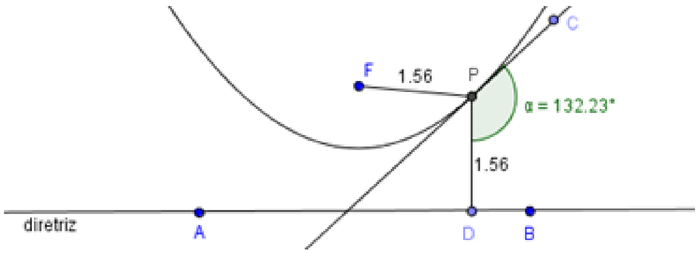


Figura 61: Criação do ponto C e ângulo $D\hat{P}C$

O professor deverá questionar aos alunos sobre as distâncias que o ponto P pode assumir em relação ao ponto D pertencente à reta $diretriz$, quando F estiver fixo. Movimentando o ponto D, o professor deve pedir para os alunos analisarem onde P deve se encontrar de modo que a distância seja a menor possível e qual será o ângulo formado pela reta mediatriz m, neste caso a tangente, e o segmento representado pela distância do ponto P ao D.

Espera-se que os alunos verifiquem que são várias distâncias que se podem obter formando segmentos distintos, mas o segmento desejado é aquele que forma um ângulo de $90°$ com a reta mediatriz m, pois a menor distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento de reta, neste caso $\overline{PD}$, que deve formar com a reta um ângulo reto ($90°$).

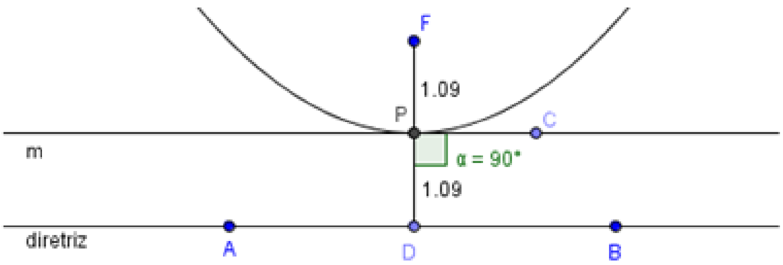


Figura 62: Menor distância de P a D

Pode-se notar que como $\overline{PD} = \overline{PF}$, então P é o ponto médio de $\overline{FD}$ e o ângulo FPC também mede $90°$. Com isso, $\overline{PF}$ também é o menor segmento possível que se pode obter, assim, o professor deverá afirmar que P é chamado de Vértice da parábola, representado pela letra V, ou ponto médio da distância do foco F a reta $diretriz$.

Ainda nesta construção, o aluno poderá perceber que quando $D\hat{P}C = 90°$, a reta mediatriz m e $diretriz$ se tornam paralelas, pois o segmento $\overline{PD}$ foi construído sobre a reta perpendicular a $diretriz$ que forma $90°$.

Oculte os segmentos b e c, a reta mediatriz m, o ponto C e o ângulo α para que se possa analisar mais um caso.

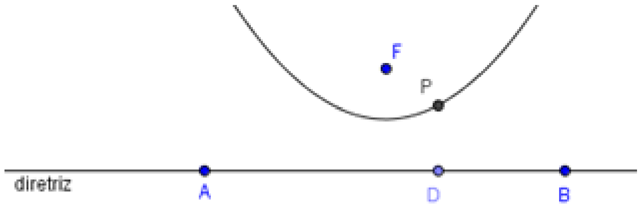


Figura 63: Ocultação dos segmentos b e c, reta mediatriz m, ponto C e ângulo α

Utilizando o botão $Mover$ mova o foco F, de modo que F se torne um ponto pertencente à reta $diretriz$. Nesse momento, será possível o aluno observar que quando F for um ponto da reta a parábola deixará de existir.

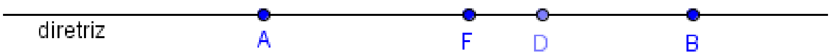


Figura 64: Inexistência da parábola

Portanto, analisando geometricamente, o aluno poderá confirmar o que diz a definição de parábola, pois para sua existência é necessário que um ponto F não pertença à reta $diretriz$ para que haja pontos equidistantes a F e $diretriz$. Ao retornar com o ponto F não pertencente a $diretriz$ de modo que F esteja acima da reta, nota-se novamente a existência da parábola.

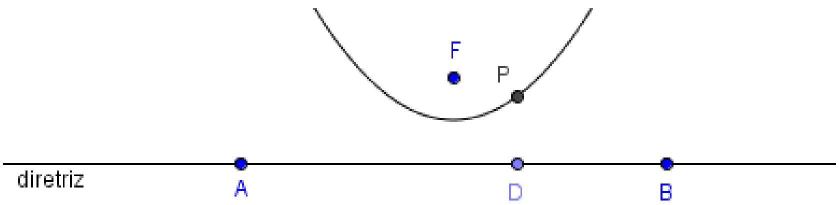


Figura 65: Foco acima da reta $diretriz$

Agora, movimentando o ponto D sobre a reta $diretriz$ na horizontal, pode-se ver que P percorre sobre a parábola e o professor deve questionar aos alunos sobre os valores que o ponto P pode assumir e o que acontece com a parábola quando se altera o ponto F.

Movimente o ponto F de modo que ele fique abaixo da reta $diretriz$ na horizontal.

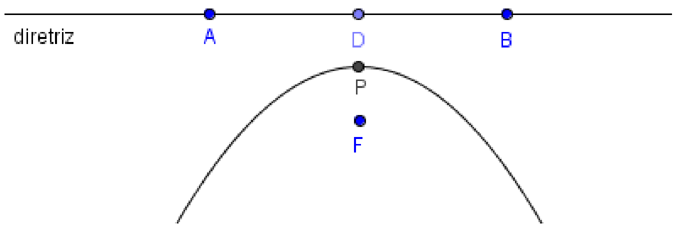


Figura 66: Foco abaixo da reta $diretriz$

Espera-se que os alunos notem que a concavidade ou a abertura da parábola muda e fica voltada para cima ou para baixo, sendo que quanto mais próximo o ponto F estiver da $diretriz$, menor será a abertura da parábola e, quanto mais distante estiver, maior será a abertura.

No caso da concavidade voltada para cima e considerando-se pontos acima com valores maiores que os pontos abaixo, P pode admitir valores tão grandes quanto se queira, porém existe um valor mínimo quando P assume o valor de vértice da parábola, também chamado de ponto mínimo.

No caso da concavidade voltada para baixo, P pode admitir valores tão pequenos quanto se queira, porém existe um valor máximo quando P assume o valor de vértice da parábola, também chamado de ponto máximo.

Agora, movimentando os pontos A ou B que permite alterar a inclinação da reta $diretriz$, deve-se questionar aos alunos sobre o que acontece quando a reta $diretriz$ se encontra na vertical.

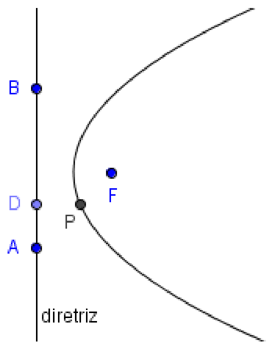


Figura 67: Foco a direita da reta $diretriz$

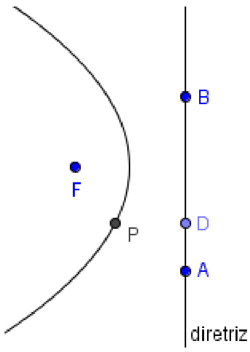


Figura 68: Foco à esquerda da reta $diretriz$

Espera-se que os alunos verifiquem que, o acontecimento, é análogo ao caso da $diretriz$ na horizontal, pois a parábola muda de concavidade e fica voltada para direita ou para esquerda.

No caso da concavidade voltada para direita e considerando-se pontos à direita com valores maiores que os pontos à esquerda, P pode admitir valores tão grandes quanto se queira, porém existe um valor mínimo quando P assume o valor de vértice da parábola, o ponto mínimo.

No caso da concavidade voltada para esquerda, P pode admitir valores tão pequenos quanto se queira, porém existe um valor máximo quando P assume o valor de vértice da parábola, o ponto máximo.

Retorne a reta $diretriz$ para a horizontal de modo que F esteja acima dela e oculte os pontos D e P. Utilize o botão $Parábola$  e clique na reta $diretriz$ e no ponto F, sucessivamente. Note que a parábola construída é exatamente o lugar geométrico já existente, que receberá nome d. Renomeie para parábola como a Figura 69 a seguir.

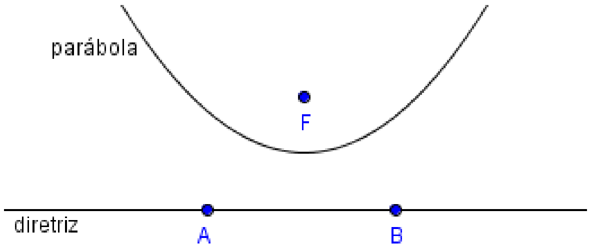
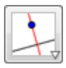


Figura 69: Cônica construída a partir do botão parábola

Oculte o lugar geométrico e com o botão $Reta\,Perpendicular$  construa a reta perpendicular à $diretriz$ passando por F que receberá o nome d.

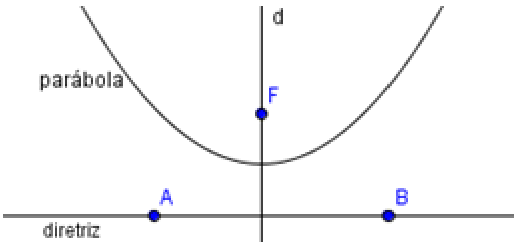
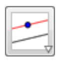


Figura 70: Reta d passando por F e perpendicular à $diretriz$

Com o botão $Ponto$  marque um ponto qualquer acima de F de modo que pertença a d. O ponto receberá nome E e com o botão $Reta\,Paralela$  construa uma reta paralela a $diretriz$ passando por E, que receberá nome e.

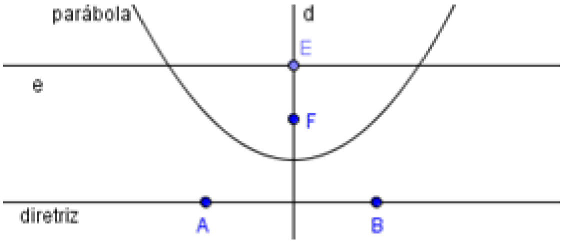


Figura 71: Reta e passando por E paralela à $diretriz$

Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque os pontos de interseção da reta e com a $parábola$. Os pontos receberão nomes G e H, sucessivamente.

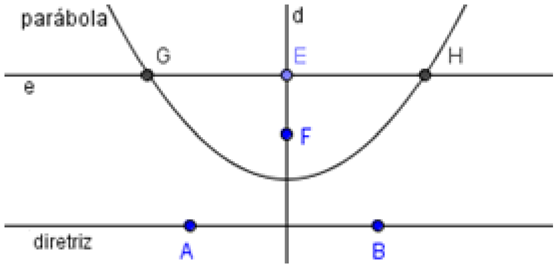


Figura 72: Pontos de interseção da reta e com a parábola

Oculte a reta e e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{EH}$ que receberão nomes f e g, simultaneamente. Oculte os nomes e exiba os valores destes segmentos.

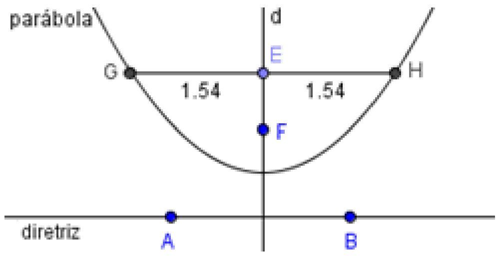


Figura 73: Segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{EH}$ e valores exibidos

A partir dessa construção, poderá ser explorado o comprimento dos segmentos que os pontos da parábola formam com a reta d e verificar algumas de suas propriedades.

Ao movimentar o ponto E, os alunos deverão notar que os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{EH}$ se mantêm com os mesmos valores em relação à reta d. Com isso o professor deverá afirmar que esta reta é chamada de eixo de simetria da parábola e o segmento $\overline{GH}$ denominado amplitude focal, representado por $2b$. Daí, os alunos poderão ser questionados sobre o ponto de interseção deste eixo de simetria com a parábola e espera-se que eles notem que este se refere ao vértice dela e é o único ponto de interseção existente entre o eixo e parábola.

Oculte os segmentos f e g e os pontos G, E e H. Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque os pontos de interseções do eixo d com a $parábola$ e do eixo d com a $diretriz$, sendo o primeiro o vértice da parábola e o segundo um ponto pertencente à $diretriz$. Os pontos receberão, respectivamente, nomes I e J, renomei-os para V e D.

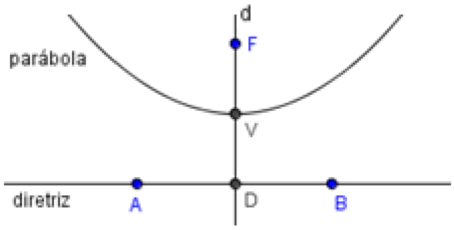
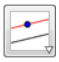


Figura 74: Pontos de interseção do eixo d com parábola e a $diretriz$

Neste momento, o aluno poderá mover o foco F e os pontos A e B verificando que F sempre pertencerá ao eixo de simetria da parábola, assim, o professor deverá dizer que a distância de F até o ponto D, ou seja, $\overline{FD}$ é denominado parâmetro da parábola, representado por p ou $2c$.

Com o botão $Reta\ Paralela$  construa a reta paralela à $diretriz$ passando por F. Esta reta receberá o nome h.

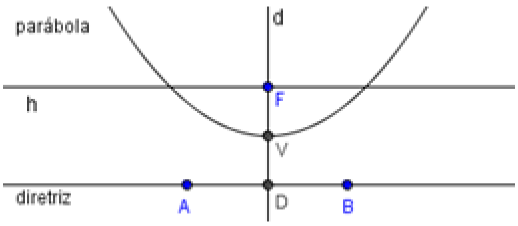


Figura 75: Reta h passando por F e paralela a $diretriz$

Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque os pontos de interseção de h com a $parábola$. Os pontos receberão nomes I e J, sucessivamente.

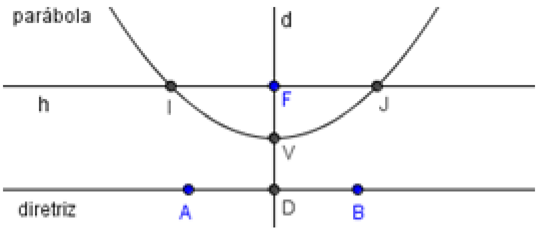
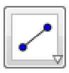
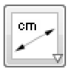


Figura 76: Pontos de interseção da reta h com a parábola

Oculte a reta h e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{IJ}$, $\overline{IV}$ e $\overline{VJ}$ que receberão nomes i, j e k, respectivamente. Oculte os nomes desses segmentos e com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$  meça o comprimento dos segmentos $\overline{IV} = j$ e $\overline{VJ} = k$.

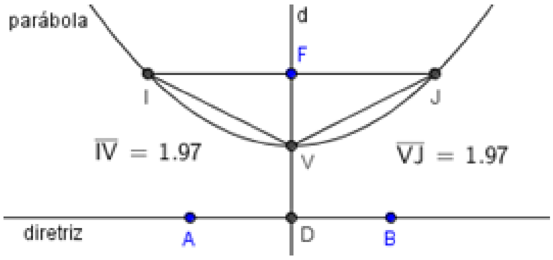


Figura 77: Comprimento dos segmentos $\overline{IV}$ e $\overline{VJ}$

Ao movimentar a parábola através do ponto F, os alunos deverão perceber que a distância do vértice até as extremidades dos segmentos são sempre iguais, constituindo-se um triângulo isóscele IVJ. Além disso, como foi visto que $\overline{FD} = 2c$ e V é o ponto médio de $\overline{FD}$, logo $\overline{FV} = \overline{VD} = c$. Assim, o professor deve informar que este triângulo é denominado triângulo fundamental da parábola, em que a base é igual à amplitude focal $\overline{IJ}$ que mede $2b$ e altura igual ao parâmetro c.

É importante lembrar que o vértice V e os pontos I e J são pontos P's da construção da parábola quando o barbante está esticado no experimento concreto.

Oculte os valores dos segmentos $\overline{IV}$ e $\overline{VJ}$ e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{FJ}$ e $\overline{FV}$ que receberão, simultaneamente, nomes l e n. Exiba o nome do segmento k e substitua o estilo do eixo d e dos segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{IV}$ para pontilhado.

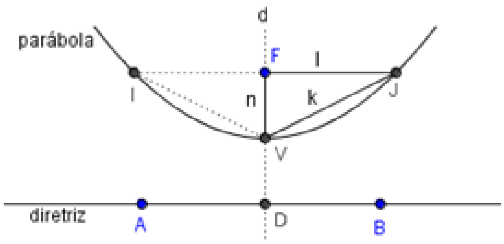
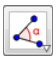


Figura 78: Segmentos $\overline{FJ}$ e $\overline{VF}$ criados e estilo de d e segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{IV}$ alterados

Com o botão $Ângulo$  construa o ângulo $V\hat{F}J$, renomeie para θ e verifique seu valor.

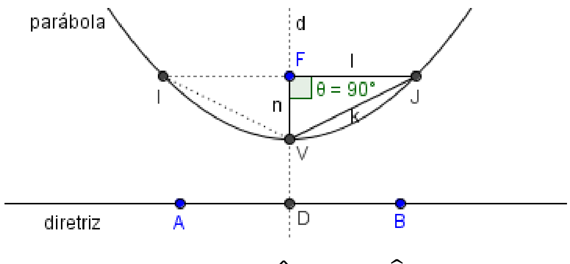


Figura 79: Ângulo $V\hat{F}J$

Sabe-se, até aqui, que metade do parâmetro da parábola é igual a c, metade da amplitude focal é igual a b. Pode-se notar também que o ângulo $V\hat{F}J$ é reto, assim é visível a existência de um triângulo retângulo VFJ com catetos iguais a b e c e hipotenusa a qualquer.

Agora, renomeie os segmentos para seus respectivos valores e oculte o nome e valor do ângulo θ como na Figura 80 a seguir.

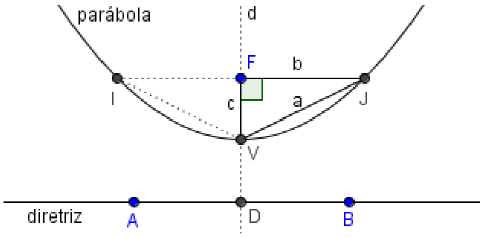


Figura 80: Segmentos renomeados

O aluno pode movimentar o ponto F ou a reta $diretriz$ e verificar que a propriedade do triângulo retângulo será sempre mantida. Assim, pode-se notar que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.2.2. **Tratamento analítico da parábola**

A partir dos experimentos concretos e computacionais vistos acima, pode-se fazer a análise algébrica da parábola.

Inicialmente considera-se a parábola com seu vértice V em $(0,0)$. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a parábola era formada pelo foco F no eixo y, sendo o ponto de coordenadas $F\,(0,\ c)$ e pela reta $diretriz$ com coordenada $y = -c$. Assim, sendo D um ponto qualquer pertencente à reta $diretriz$, pode-se ver que sua coordenada é $D(x,-c)$.

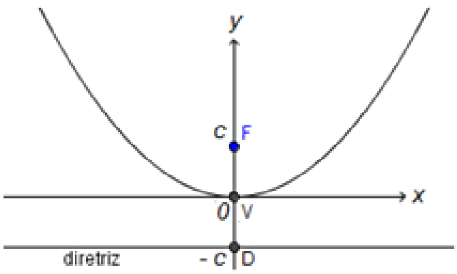


Figura 81: Parábola com vértice em O, foco no eixo Oy e $diretriz$ $y = -c$

Considera-se um ponto $P(x,y)$ qualquer da curva e, pela definição, tem-se o seguinte:

$$d(P,F) = d(P,D)$$

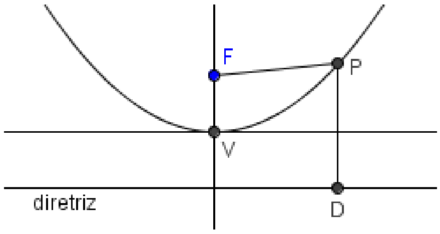


Figura 82: Parábola e um ponto P pertencente a ela

Utilizando a definição de distância entre dois pontos e sabendo que $P(x, y)$, $F(0,\ c)$ e $D(x, -c)$, tem-se:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-c))^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(y+c)^2}$$

Numa igualdade, podem-se realizar operações iguais em cada lado de modo que ela seja mantida. Com isso, elevam-se os termos de cada lado da igualdade ao quadrado e tem-se:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y+c)^2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y-c)^2 + x^2 = (y+c)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 2cy + c^2 + x^2 = y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 4cy \qquad (I)$$

Em que $c = \overline{FV} = \overline{VD}$.

Essa equação é denominada equação reduzida da parábola, com vértice V na origem, foco $F(0, c)$ no eixo Oy e reta $diretriz\ y = -c$, conforme a Figura 81.

Pode-se analisar agora quando a parábola possui seu vértice V na origem, foco no eixo Oy com coordenadas $F\ (0, -c)$ e reta $diretriz\ y = c$. Assim, observando as construções anteriores, nota-se que a parábola formada será como a Figura 83 abaixo:

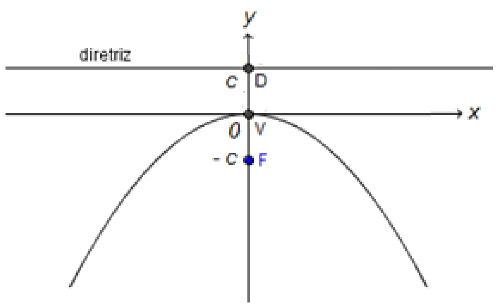


Figura 83: Parábola com vértice em O, foco no eixo Oy e $diretriz\ y = c$

Do mesmo modo feito para encontrar a equação (I), a equação reduzida da parábola para este caso, ou seja, com vértice na origem, foco $F\ (0, -c)$ no eixo Oy e reta $diretriz\ y = c$ será dada por:

$$x^2 = -4cy$$

Pode-se verificar quando a parábola possui seu vértice V na origem, foco no eixo Ox com coordenadas $F\,(c, 0)$ e reta *diretriz* $x = -c$. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a parábola formada será como a Figura 84.

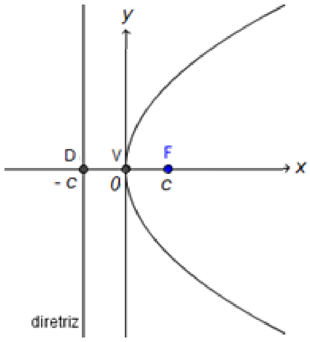


Figura 84: Parábola com vértice em O, foco no eixo Ox e *diretriz* $x = -c$

De forma análoga para encontrar a equação (I), a equação reduzida da parábola para este caso, ou seja, com vértice na origem, foco $F\,(c, 0)$ no eixo Ox e reta *diretriz* $x = -c$ será dada por:

$$y^2 = 4cy$$

Pode-se analisar quando a parábola possui seu vértice V na origem, foco no eixo Ox com coordenadas $F\,(-c, 0)$ e reta *diretriz* $x = c$. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a parábola formada será como a Figura 85 abaixo:

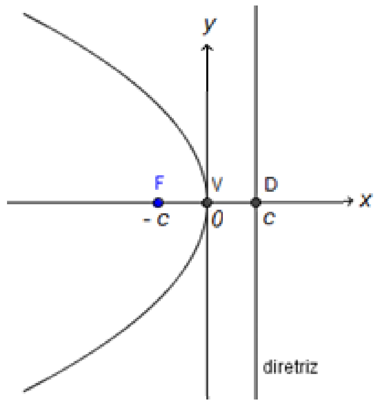


Figura 85: Parábola com vértice em O, foco no eixo Ox e *diretriz* $x = c$

Do mesmo modo feito para encontrar a equação (I), a equação reduzida da parábola para este caso, ou seja, com vértice na origem, foco $F\,(-c, 0)$ no eixo Ox e reta *diretriz* $x = c$ será dada por:

$$y^2 = -4cy$$

Analogamente, podem-se encontrar as equações da parábola com vértice V qualquer. Para isso, chega-se a elas considerando o vértice da parábola sendo um ponto qualquer $V(x_v, y_v)$ e a reta $diretriz$ e eixo de simetria paralelo aos eixos x e y. Sendo assim, para efetuar a translação dos eixos deve-se tomar a diferença dos pontos $P(x, y)$ e $V(x_v, y_v)$, obtendo-se:

1º) Eixo de simetria $//$[5] eixo y, reta $diretriz$ $//$ eixo x, $c = \overline{VF}$ e $F(x_v, y_v + c) > D(x_v, y_v - c)$.

$$(x - x_v)^2 = 4c(y - y_v)$$

2º) Eixo de simetria $//$ eixo y, reta $diretriz$ $//$ eixo x, $c = \overline{VF}$ e $F(x_v, y_v + c) < D(x_v, y_v - c)$.

$$(x - x_v)^2 = -\,4c(y - y_v)$$

3º) Eixo de simetria $//$ eixo x, reta $diretriz$ $//$ eixo y, $c = \overline{VF}$ e $F(x_v, y_v + c) > D(x_v, y_v - c)$.

$$(y - y_v)^2 = 4c(x - x_v)$$

4º) Eixo de simetria $//$ eixo x, reta $diretriz$ $//$ eixo y, $c = \overline{VF}$ e $F(x_v, y_v + c) < D(x_v, y_v - c)$.

$$(y - y_v)^2 = -\,4c(x - x_v)$$

3.3. HIPÉRBOLE

Definição: "Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante, igual a $2a$ e menor que a distância entre os focos $(2a < 2c)$, com $\overline{F_1F_2} = 2c$". (DANTE, 2010, p.123)

3.3.1. **Tratamento geométrico da hipérbole**

A partir das construções concreta e computacional o aluno poderá formular a definição teórica dessa cônica e analisar geometricamente através de atividades reflexivas.

3.3.1.1. Parte concreta da hipérbole

Nessa atividade será construída uma hipérbole sobre um plano. Para isso, será dado, aos alunos, uma peça retangular de madeira, uma cartolina, um barbante inextensível, dois pregos, uma régua e um lápis para que realizem a construção e identifiquem alguns aspectos da hipérbole.

---

[5]Representação da propriedade de paralelismo.

Assim, para realizarem a construção desse experimento devem-se seguir os passos abaixo:

1) Coloque a cartolina acima da peça retangular de madeira e marque, com o lápis, dois pontos distintos tal que a distância entre eles seja menor que o comprimento da régua. Fixe os pregos nos dois pontos marcados.

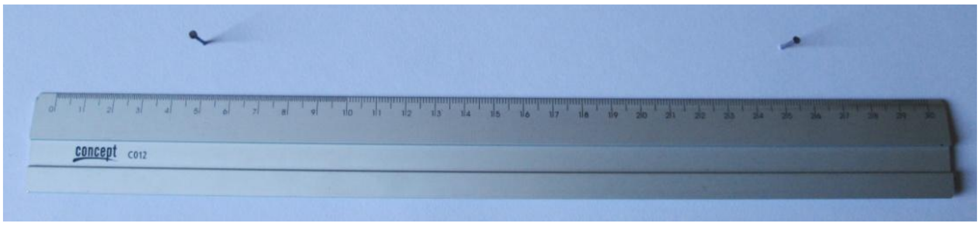


Figura 86: Pregos fixados nos pontos escolhidos e régua com comprimento maior

2) Fure as duas extremidades superiores da régua. Tome um barbante inextensível tal que seu comprimento seja menor que a régua e que a diferença entre eles seja menor que a distância entre os dois pontos inicialmente escolhidos.

Figura 87: Régua furada e barbante

3) Conforme a figura abaixo, amarre uma extremidade do barbante no prego e a outra no furo da régua. Prenda a outra ponta furada da régua no outro prego fixado de modo que ela possa girar em torno deste prego.

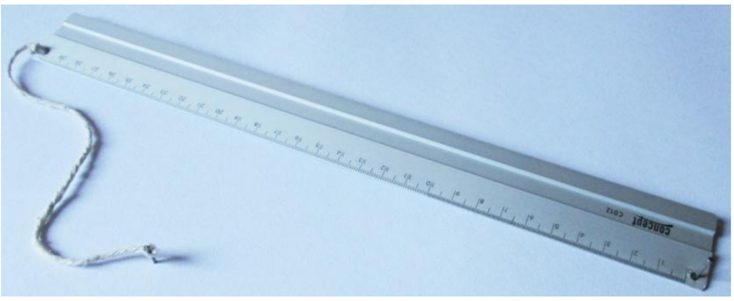


Figura 88: Barbante com extremidades fixadas ao prego e a régua

4) Com a ponta do lápis, estenda o barbante no plano mantendo-o esticado e apoiado na régua. Com a ponta sobre a cartolina, movimente o lápis de um lado para outro, até quando o barbante permitir.

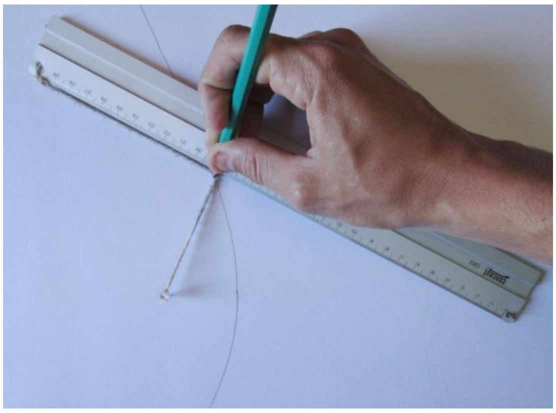


Figura 89: Procedimento de construção de um lado da hipérbole

5) Desprenda a régua do prego, desamarre o barbante da régua e do prego amarrando-o suas pontas na outra extremidade da régua e no outro prego. Prenda a régua no outro prego e repita o passo 4.

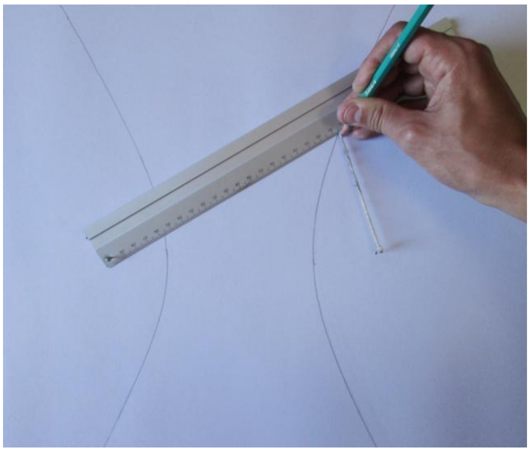


Figura 90: Procedimento final de construção da hipérbole concretamente

Ao observar a figura obtida, os alunos poderão verificar que a forma geométrica construída é uma hipérbole, sendo possível identificar os elementos necessários para essa construção e podendo assim, o professor denominar cada item como a seguir:

Os pontos escolhidos que foram fixados os pregos são denominados de focos da hipérbole, representados em azul na figura abaixo por F_1 e F_2, e a distância determinada por esses dois pregos é chamado de segmento focal, denominado por $2c$.

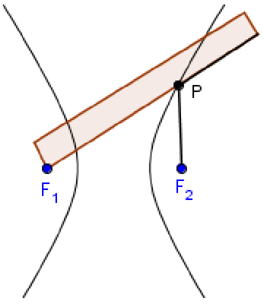


Figura 91: Hipérbole e seus elementos

A hipérbole é formada pelo contorno dos pontos feitos pelo lápis em volta de cada foco, sendo esse ponto representado em preto por P.

Nesse momento, através desse experimento, pode-se notar que a hipérbole é formada por infinitos pontos $\{P_{1,}P_2, P_3, P_{4,} \dots, P_n, \dots\}$, sendo assim, o professor deverá questionar ao aluno o que se pode notar sobre os pontos P*'s* em relação aos dois pontos marcados inicialmente.

Os alunos deverão notar que todo ponto P dessa curva satisfaz uma diferença em módulo em que as distâncias de qualquer ponto P aos dois pontos inicialmente fixados são iguais a um valor constante e menor que a distância entre esses dois pontos, como solicitado anteriormente. Com isso, os alunos poderão notar que a hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.

Aqui, pode-se construir diversas hipérboles em que a distância entre os dois pontos quaisquer escolhidos seja menor que o comprimento da régua, sendo que a diferença entre eles não seja maior que a distancia entre os pontos marcados. É possível verificar, nessa etapa, que todas as hipérboles construídas seguem um padrão, podendo assim, conceituar a hipérbole formalmente.

3.3.1.2. Parte computacional da hipérbole.

Após a apresentação da construção da hipérbole através do experimento concreto, espera-se que o aluno tenha adquirido conhecimento básico que lhe permita, com o auxílio do professor, construir computacionalmente uma hipérbole e desenvolver atividades reflexivas a fim de conhecer as propriedades e elementos dessa cônica.

3.3.1.2.1. Construção da hipérbole no *software*

Com a janela do $GeoGebra$ aberta, oculte os eixos e dê início à atividade de construção da hipérbole da seguinte forma:

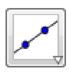
1) Selecione o botão $Reta$  e construa uma reta. Note que a reta construída recebeu nome a e está determinada por dois pontos A e B, portanto, renomeie a reta para r e os pontos para F_1 e F_2.

Figura 92: Reta r passando pelos pontos F_1 e F_2

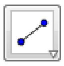
2) Com o botão $Segmento$  construa o segmento $\overline{F_1F_2}$ sobre a reta r, que será o representante da distância entre os dois focos da hipérbole. Oculte o nome deste segmento que recebeu nome a.

Figura 93: Segmento $\overline{F_1F_2}$

3) Com o botão $Ponto$  marque um ponto pertencente a reta r de modo que não pertença ao segmento $\overline{F_1F_2}$.

Figura 94: Ponto A não pertencente a $\overline{F_1F_2}$

Ao movimentar o ponto A, o aluno deverá notar que este ponto pertencerá ao segmento $\overline{F_1F_2}$ somente quando ele estiver entre F_1 e F_2 ou ser um deles.

4) Oculte a reta r, mova o ponto A de modo que ele esteja pertencendo a $\overline{F_1F_2}$ e seja diferente de F_1 e F_2. Assim, com o botão $Círculo\ dados\ Centro\ e\ um\ de\ seus\ Pontos$  construa uma circunferência com centro em F_1 e um de seus pontos sendo A. Renomeie a circunferência que recebeu nome c para λ.

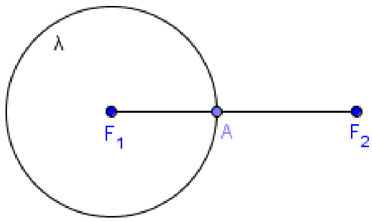


Figura 95: Circunferência λ com centro em F_1

Os alunos podem, nesse momento, movimentar os objetos construídos e verificar quais são as regularidades já existentes. O professor deve questionar o aluno sobre os acontecimentos e espera-se que eles percebam que à medida que se aumenta ou diminui o tamanho do segmento $\overline{F_1F_2}$, pelos pontos F_1 ou F_2, muda-se o tamanho da circunferência, pois o segmento $\overline{F_1A}$, que é o raio, está contido no segmento $\overline{F_1F_2}$ e também se altera.

O ponto F_1 desloca o centro da circunferência, já o ponto A permite alterar o tamanho do raio sem que altere seu tamanho do segmento $\overline{F_1F_2}$, estando sempre sobre a circunferência λ.

5) Com o botão $Ponto$  marque um ponto pertencente à circunferência λ que receberá nome B.

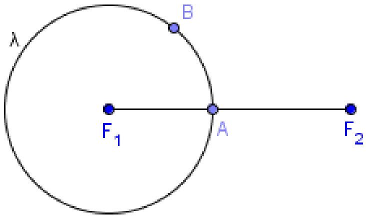


Figura 96: Ponto B pertencente à circunferência λ

6) Com o botão $Reta$  construa a reta que passa pelos pontos F_1 e B. Note que esta reta receberá nome b.

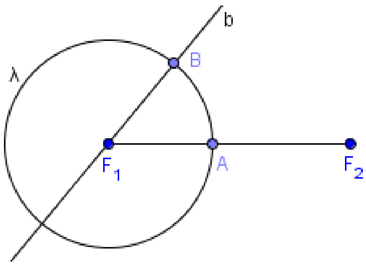
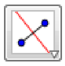


Figura 97: Reta b passando por F_1 e B

7) A fim de que se tenha uma construção da hipérbole semelhante ao experimento concreto[6], pode-se observar até o momento a marcação dos dois focos, F_1 e F_2. Para que se possa manter o barbante esticado até um ponto, de modo que um de seu extremo esteja fixado num foco e outro na régua, mantendo seu comprimento, é preciso que se trace a reta mediatriz dos pontos B e F_2 com o botão $Mediatriz$  que receberá o nome de c. Isso permite observar o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos B e F_2. Renomeie a reta mediatriz c para m.

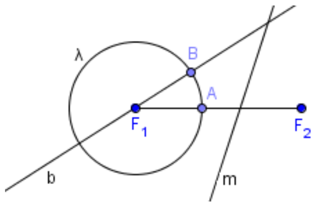


Figura 98: Mediatriz m de B e F_2

8) O ponto de interseção da mediatriz m com a reta b estabelece a garantia de que a distância até o ponto B é a mesma até o F_2. Portanto, com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque o ponto de interseção da mediatriz m com a reta b. O ponto receberá o nome C, renomeie para P.

[6]Esse experimento encontra-se detalhado na página 61 deste trabalho.

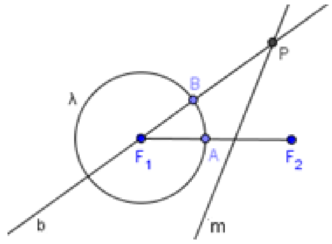


Figura 99: Ponto P de interseção entre mediatriz m e reta b

9) Com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PF_2}$, que receberão os nomes, simultaneamente, c, d e e.

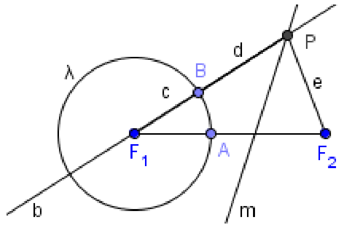


Figura 100: Criação dos segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PF_2}$

O aluno poderá movimentar a construção a partir do ponto B de modo que se tenha o ponto A sempre distinto de F_1 e F_2. Assim, espera-se que ele observe que $\overline{PB}$ sempre será igual a $\overline{PF_2}$.

Para melhor visualização, oculte o nome dos segmentos criados, a circunferência λ, o ponto A, os segmentos $\overline{F_1F_2} = a$ e $\overline{F_1P} = c$ e as retas b e m.

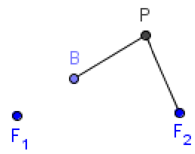


Figura 101: Procedimento final de construção da hipérbole computacionalmente

Os alunos poderão notar que a construção realizada até aqui é semelhante ao que foi visto na parte concreta, em que os pontos F_1e F_2 são os pontos quaisquer escolhidos e que P é o ponto quando o barbante está esticado ao máximo com o lápis.

Sendo assim, o ponto B permite que o ponto P seja movido de maneira que se tenha sempre P como o momento que o barbante está totalmente esticado.

Selecione a opção $Habilitar\ Rastro$  do ponto P. Assim, os pontos P's que são rastros de P serão marcados de acordo com que ele seja movido. Para isso, siga o passo abaixo:

Com o botão $Mover$  movimente o ponto B que possibilitará mover o ponto P.

À medida que o ponto P se movimenta é possível notar que os rastros desse ponto são marcados, formando-se uma hipérbole, como se fosse a linha do lápis no experimento concreto.

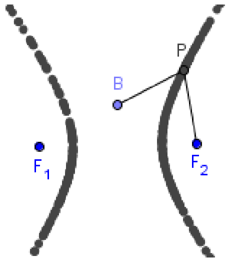


Figura 102: Hipérbole formada pelos rastros do ponto P

Por definição, a hipérbole é o lugar geométrico de todos os pontos que satisfazem uma propriedade, assim, com o botão $Lugar\ Geométrico$  pode-se identificar o lugar geométrico clicando no ponto B e P, sucessivamente, que coincidirá com o rastro marcado pelo ponto P, conforme a Figura 103.

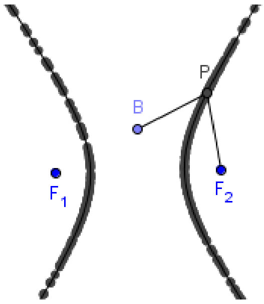


Figura 103: Hipérbole formada pelo lugar geométrico

Outra forma de obter a elipse é a partir da reta mediatriz m construída anteriormente, pois se sabe que esta reta passa pelo ponto P. Para isso, desabilite o rastro do ponto P, oculte o lugar geométrico e exiba a reta mediatriz m.

Habilite o rastro da reta mediatriz m e mova o ponto B para que a hipérbole seja formada como segue a Figura 104 abaixo:

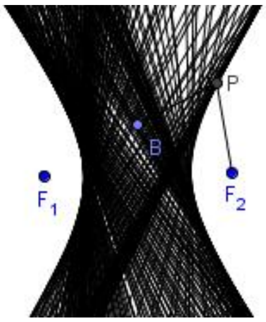


Figura 104: Hipérbole formada pela reta mediatriz m

3.3.1.2.2. Reflexões sobre a hipérbole

Desabilite a opção rastro da reta mediatriz m e exiba o lugar geométrico.

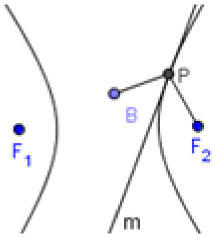


Figura 105: Lugar geométrico e reta mediatriz m

Ao mover o ponto B o aluno deverá observar que a reta mediatriz m contorna as curvas formadas pela hipérbole sem cortá-las, tangenciando um único ponto, dessa forma, pode-se questioná-los sobre qual nome se dá a essa relação entre objetos geométricos. Assim, espera-se que eles lembrem de que neste caso estamos tratando da reta tangente à curva.

Clique para visualizar a circunferência λ, o segmento a e o ponto A. Construa os segmentos $\overline{F_1A}$ e $\overline{F_1B}$ com o botão $Segmento$  que receberão nomes, respectivamente, f e g. Oculte o nome dos segmentos criados e a reta mediatriz m.

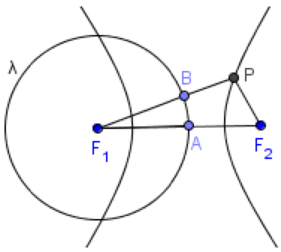


Figura 106: Construção dos segmentos $\overline{F_1A}$ e $\overline{F_1B}$ e exibição de a

Com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$  meça o comprimento dos segmentos $\overline{F_1A}$, $\overline{F_1B}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PF_2}$.

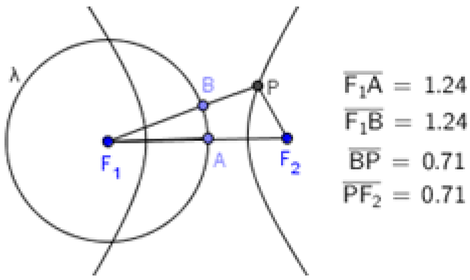


Figura 107: Valores dos segmentos $\overline{F_1A}$, $\overline{F_1B}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PF_2}$ exibidos

Com essa construção, os alunos poderão mover os pontos A e B, sendo possível visualizarem a propriedade da hipérbole onde a diferença das distâncias do ponto P aos dois pontos fixos, F_1 e F_2, será sempre igual a uma constante. Isso pode ser observado a partir da circunferência λ verificando que seus raios $\overline{F_1B}$ e $\overline{F_1A}$ são iguais e como foi visto que $\overline{BP} = \overline{PF_2}$, logo a diferença entre $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ será igual ao raio da circunferência λ e A um ponto extremo do segmento que representa a diferença. Assim, pode-se perceber que, por definição, essa diferença é menor que o segmento focal, pois $\overline{F_1A} < \overline{F_1F_2}$.

Exiba a reta mediatriz m para que se possa analisar mais um caso.

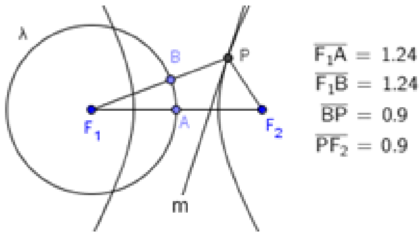
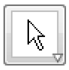


Figura 108: Exibição da reta mediatriz m

Utilizando o botão $Mover$  mova o ponto A de modo que ele se torne igual ao ponto F_1.

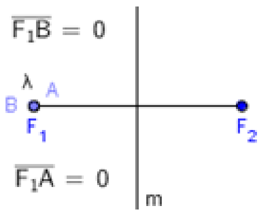


Figura 109: Inexistência da hipérbole quando $A = F_1$

Nesse momento, será possível ao aluno observar que à medida que o ponto A se aproxima do foco F_1, a hipérbole se aproxima da reta mediatriz m e quando $A = F_1$ ela deixa de existir, pois não existirá mais a diferença da distância do ponto P aos dois focos. Esse fato é comprovado a partir da reta mediatriz m dos pontos B e F_2, mas como nesse caso a circunferência λ se torna um único ponto, então $F_1 = A = B$, assim, a distância de F_1e F_2 a qualquer ponto da mediatriz é a mesma, o que difere da definição de hipérbole.

Com o botão $Mover$  mova o ponto A de modo que se torne igual ao ponto F_2.

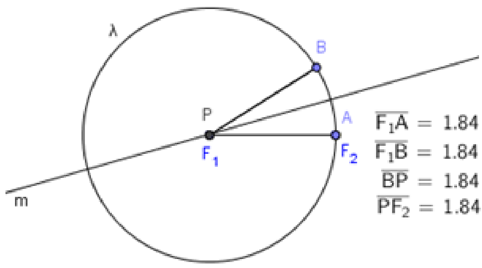


Figura 110: Inexistência da hipérbole quando $A = F_2$

Nesse momento, será possível ao aluno observar que à medida que o ponto A se aproxima do foco F_2, a reta mediatriz m se aproxima do foco F_1 e quando $A = F_2$ a hipérbole deixa de existir, pois a mediatriz m passa por F_1que é o centro da circunferência λ, tornando-se $P = F_1$ e deixando de existir a diferença em módulo da distância do ponto P aos dois focos tal que essa diferença seja menor que a distância entre F_1 e F_2, como diz a definição. Esse fato pode ser comprovado vendo-se que $|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = \overline{PF_2}$, pois $\overline{PF_1} = 0$, assim a diferença é igual à distância entre os dois focos, o que difere da definição de hipérbole.

Agora, oculte os valores exibidos dos segmentos e com o botão $Reflexão\ em\ Relação\ a\ um\ Ponto$ crie a reflexão de F_2 em relação à F_1. Renomeie este ponto que receberá nome C para $F_2{}'$ e com o botão $Segmento$ trace o segmento $\overline{F_2'F_1}$. Oculte o nome deste segmento que receberá nome h.

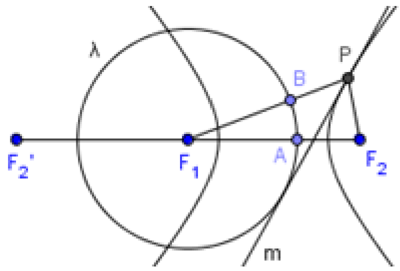


Figura 111: Ponto $F_2{}'$ simétrico de F_2 em relação à F_1 e segmento $\overline{F_2'F_1}$

Com o botão $Mover$ mova o ponto A de modo que ele se torne igual ao ponto $F_2{}'$.

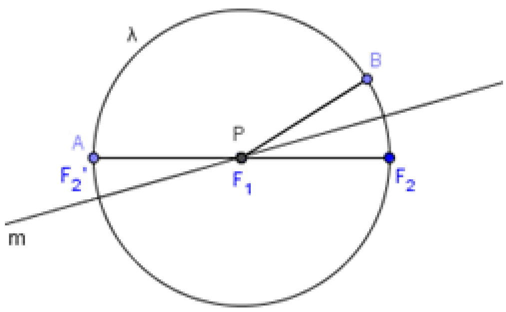
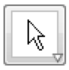


Figura 112: Inexistência da hipérbole quando $A = F_2{}'$

O aluno poderá notar que se trata do mesmo caso anterior e que a hipérbole não existirá. Além disso, poderá ser comprovado que a hipérbole formada pelos focos F_1 e F_2 é simétrica a formada pelos focos F_1 e F_2'.

Oculte a reta mediatriz m e com o botão $Mover$  mova o ponto A de modo que $\overline{F_1A}$ seja maior que $\overline{F_1F_2}$ ou $\overline{F_1F_2'}$.

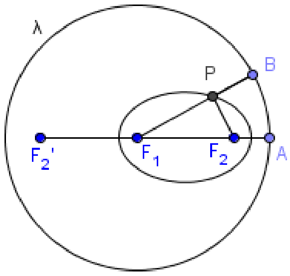


Figura 113: Elipse quando $\overline{F_1A} > \overline{F_1F_2}$

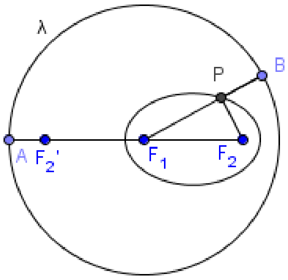


Figura 114: Elipse quando $\overline{F_1A} > \overline{F_1F_2'}$

Neste caso, o aluno deverá notar que na hipérbole a constante é igual à diferença em módulo das distâncias do ponto P aos dois focos passa a ser igual à soma das distâncias do ponto P aos dois focos, formando assim a elipse.

Portanto, analisando geometricamente o aluno poderá confirmar o que diz a definição de hipérbole, pois para sua existência é necessário que a diferença em módulo dos pontos P's aos dois focos seja sempre menor que a distância entre eles. Ao retornar com o ponto A entre F_1 e F_2 nota-se novamente a existência da hipérbole.

Oculte os segmentos $\overline{F_1F_2} = a$, $\overline{BP} = d$, $\overline{F_1A} = f$, $\overline{F_1B} = g$ e $\overline{F_1F_2'} = h$, os valores dos segmentos, a circunferência λ e os pontos A, B e F_2'. Exiba o segmento $\overline{F_1P} = c$ e utilizando o botão $Hipérbole$  clique nos pontos F_1, F_2 e P, sucessivamente. Note que a hipérbole construída é exatamente o lugar geométrico já existente, que receberá nome k. Renomeie para hipérbole.

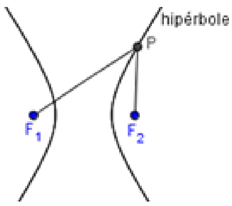


Figura 115: Cônica construída a partir do botão hipérbole

Oculte o lugar geométrico e exiba a reta r que passa por F_1 e F_2 como segue a Figura 116.

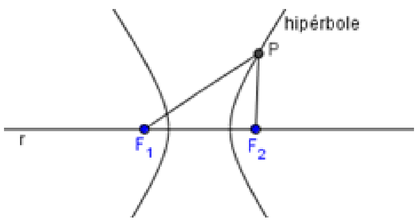


Figura 116: Exibição da reta r passando por F_1 e F_2

Utilizando o botão $Ponto\ Médio\ ou\ Centro$  clique na hipérbole e note que o centro dela será marcado, o ponto C. Esse fato pode ser observado também selecionando sucessivamente os dois focos, onde será marcado o ponto médio entre eles que coincidirá com o centro da hipérbole. Renomeie o ponto C para O.

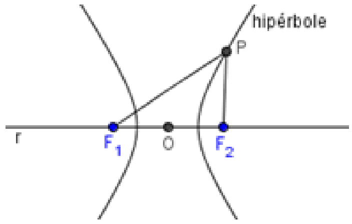


Figura 117: Marcação do centro O da hipérbole

Com o botão $Reta\ Perpendicular$  clique na reta r e arraste até o centro O da hipérbole para construir a reta i. Nesta construção o aluno deverá notar que haverá dois eixos, retas r e i, perpendiculares entre si e o ponto de interseção desses eixos é o centro da hipérbole, o ponto O.

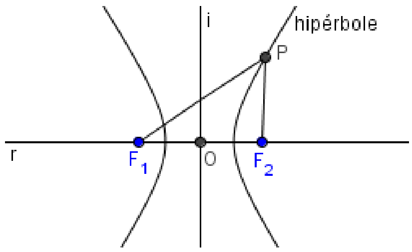


Figura 118: Reta i perpendicular à reta r passando por O

A partir dessa construção, poderão ser visualizados os eixos da hipérbole e verificar mais algumas de suas propriedades. Para isso, oculte os segmentos $\overline{F_1P} = c$ e $\overline{PF_2} = e$ e o ponto P.

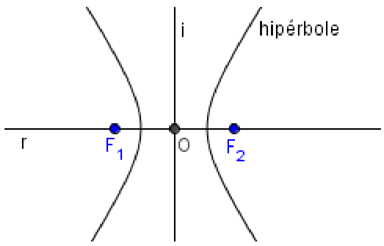


Figura 119: Ocultação dos segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{PF_2}$

Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  clique no eixo horizontal, reta r, e na hipérbole para que os pontos de interseções sejam marcados. Renomeie os pontos que receberam nomes D e C para A_1 e A_2 como a Figura 120.

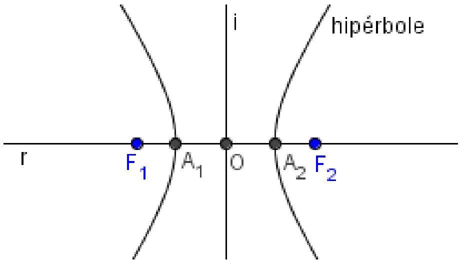


Figura 120: Pontos de interseção entre a reta r e a hipérbole

Com o botão $Segmento$  construa o segmento $\overline{F_1O}$ ou $\overline{OF_2}$. Este segmento receberá nome j, oculte-o e com o botão $Círculo\ dados\ Centro\ e\ Raio$ crie duas circunferências, sendo a primeira com centro em A_1 e raio j e a segunda com centro em A_2 e raio j. Renomeie as circunferências que receberam nomes k e p para α e β.

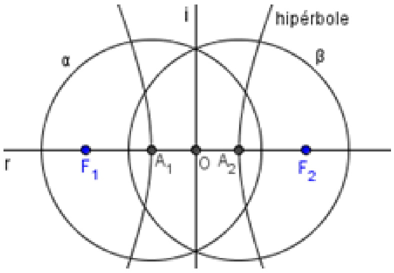
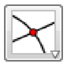


Figura 121: Circunferências α e β com raio j

Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  clique nas circunferências α e β para que os pontos de interseções sejam marcados. Renomeie os pontos que receberam nomes C e D para B_1 e B_2 como a Figura 122 abaixo.

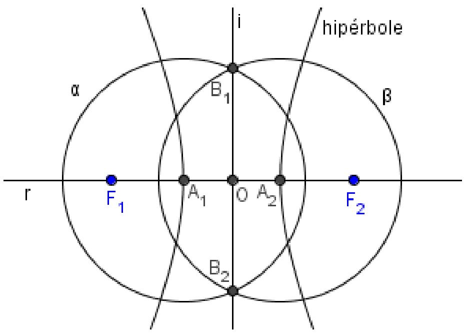


Figura 122: Pontos de interseção entre α e β

Ao movimentar a construção o aluno poderá perceber que os pontos de interseções das circunferências α e β também são interseções com o eixo i, portanto, a distância do centro da hipérbole até o foco F_1 ou F_2 determinada pelo segmento j é igual às distâncias dos centros das circunferências α e β até os pontos B_1 ou B_2, que são raios.

Oculte as retas r e i e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, que receberão nomes, respectivamente, k e l e serão os eixos da hipérbole. Renomeie os segmentos k para $transverso$ e l para $imaginário$ e oculte as circunferências α e β, conforme a Figura 123.

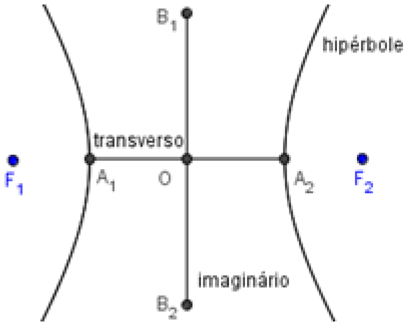


Figura 123: Eixos renomeados

Neste momento, o aluno poderá mover os focos e verificar que eles sempre estarão alinhados ao eixo $\overline{A_1A_2}$, podendo o professor denominar este como eixo real ou transverso, representado por $2a$ e o eixo $\overline{B_1B_2}$ denominado eixo imaginário ou conjugado, representado por $2b$.

Poderá ser notado que os eixos da hipérbole são perpendiculares e se encontram no ponto médio, e assim, um eixo está contido sobre a mediatriz do outro eixo. Pode-se concluir que a distância do centro até uma extremidade do eixo real mede a e do centro até uma extremidade do eixo imaginário mede b.

Oculte o nome dos eixos e com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$  meça a distância dos focos até o centro da hipérbole, ou seja, os segmentos $\overline{F_1O}$ e $\overline{OF_2}$.

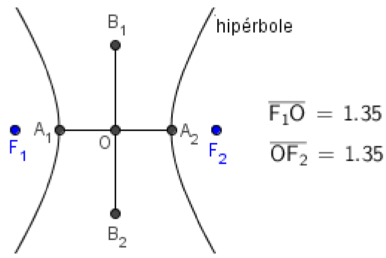


Figura 124: Distância do centro O aos focos da hipérbole

Ao movimentarem os focos, os alunos, podem notar que além de estarem alinhados com o eixo real, eles sempre serão equidistantes do centro da hipérbole, que coincide com o ponto médio do eixo.

Assim, como visto no experimento concreto, a distância entre os dois focos, que eram os pregos fixados, representa o comprimento do segmento focal, denominado por $2c$. Com isso, pode-se analisar a veracidade da definição de hipérbole, pois o segmento focal será sempre maior que o eixo real ($2a < 2c$), além de concluir que a distância do centro da hipérbole até um dos focos mede c.

Com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_1}, \overline{A_1B_2}$ e $\overline{A_2B_2}$. Oculte o nome dos segmentos criados que receberão nomes k, l, n e p.

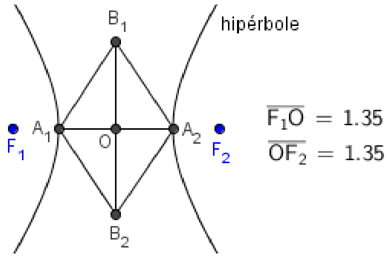
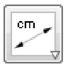


Figura 125: Criação dos segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_1}, \overline{A_1B_2}$ e $\overline{A_2B_2}$

Com o botão $Distância, Comprimento\ ou\ Perímetro$  meça o comprimento dos segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_1}, \overline{A_1B_2}$ e $\overline{A_2B_2}$.

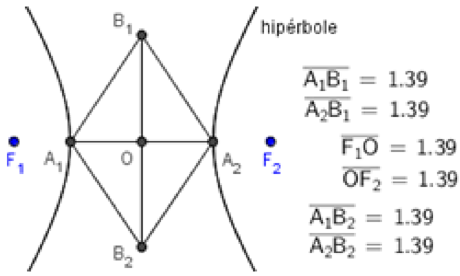


Figura 126: Comprimento dos segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_1}, \overline{A_1B_2}$ e $\overline{A_2B_2}$

Ao movimentar os focos para alterar o tamanho dos eixos, o aluno poderá notar que os extremos do eixo imaginário estão sempre a uma mesma distância dos extremos do eixo real, constituindo-se um losango $A_1B_1A_2B_2$. Além disso, essas distâncias são iguais à distância do centro da hipérbole até um dos focos, em que se viu que possui medida c, assim, pode-se dizer que $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_2} = \overline{A_2B_2} = c$.

Oculte os valores dos segmentos exibidos, os segmentos $\overline{A_1B_1} = k$, $\overline{A_1B_2} = n$ e $\overline{A_2B_2} = p$ e com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{B_1O}$ e $\overline{OA_2}$ que receberão nomes q e s. Substitua o estilo dos segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ para pontilhado, conforme a Figura 127:

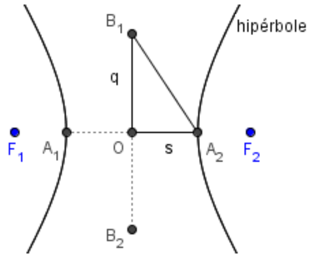
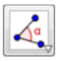


Figura 127: Segmentos $\overline{B_1O}$ e $\overline{OA_2}$ criados e estilo do $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ alterado

Com o botão $\hat{A}ngulo$  construa o ângulo $A_2\hat{O}B_1$, renomeie para θ e verifique seu valor.

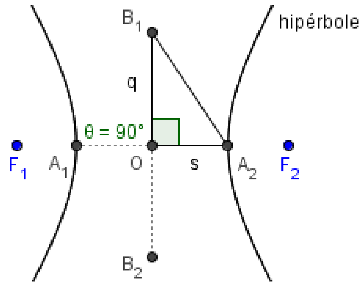


Figura 128: Ângulo $A_2\hat{O}B_1$

Sabe-se que metade do eixo real é igual a a, metade do eixo imaginário é igual a b e que metade da distância dos focos é igual à distância de um dos extremos do eixo imaginário até um extremo do eixo real, que mede c.

Pode-se notar que o ângulo $A_2\hat{O}B_1$ é reto, assim é visível a existência de um triângulo retângulo A_2OB_1 com lados iguais a a, b e c.

Exiba o ponto A, o nome do segmento $\overline{B_1A_2}$ e conforme visto acima, renomeie os segmentos para seus respectivos valores e oculte o nome e valor do ângulo θ como na Figura 129 a seguir.

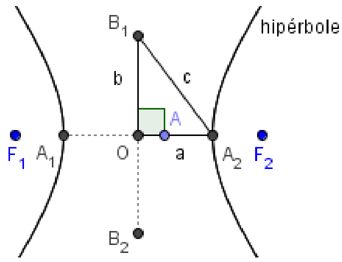


Figura 129: Segmentos renomeados

O aluno pode alterar os focos ou mover o ponto A e verificar que a propriedade do triângulo retângulo será sempre mantida. Assim, pode-se notar que $c^2 = a^2 + b^2$.

Além dessa relação, existe outra fundamental que se chama excentricidade, onde $excentricidade = \frac{c}{a}$. Dessa forma, digite na caixa de entrada do $GeoGebra$ essa relação.

Os alunos devem movimentar a construção a partir do ponto A e verificar o que acontece. Espera-se que, eles notem que ao aproximar o ponto A do foco F_1 de modo que se tenha $F_1 \neq A$, observando-se na janela de álgebra, a excentricidade aumenta seu valor cada vez mais tendendo ao infinito e a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas e perpendiculares ao eixo real e, caso contrário, ao aproximar o ponto A do foco F_2 de modo que se tenha $F_2 \neq A$, nota-se que a excentricidade se aproxima de 1 e a hipérbole se aproxima de duas semirretas opostas com origem em A_1 e A_2. Em todos os casos, a excentricidade será sempre maior que 1.

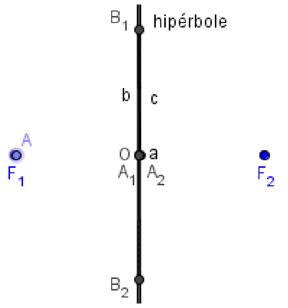


Figura 130: Ponto A próximo de F_1

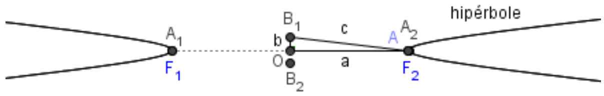
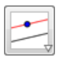


Figura 131: Ponto A próximo de F_2

O professor deverá formalizar dizendo que a excentricidade indica quanto a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas ou de duas semirretas opostas com origens nos extremos do eixo real, conforme seu valor se aproxima do infinito ou de 1, respectivamente.

Oculte os segmentos a, b e c, o ângulo θ e exiba as retas i e r. Construa com o botão $Reta\ Paralela$  duas retas paralelas à reta i, sendo a primeira passando por A_1 e a segunda por A_2. Em seguida, construa duas retas paralelas à reta r, sendo a primeira passando por B_1 e a segunda por B_2. Note que as retas receberão nomes, respectivamente, l, q, s, e t.

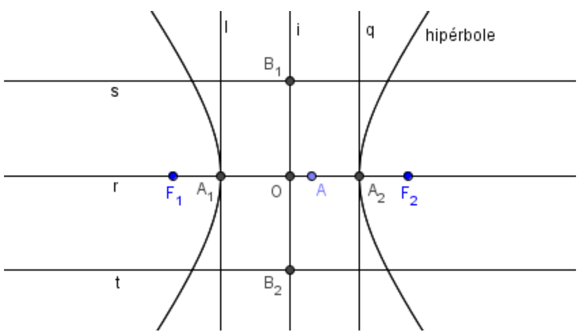


Figura 132: Retas l e q paralelas a i e retas s e t paralelas a r

Oculte as retas i e r. Com o botão $Interseção\ de\ Dois\ Objetos$  marque os pontos de interseção, simultaneamente, da reta s com as retas l e q e da reta t com as retas q e l que receberão nomes C, D, E e F como na Figura 133 abaixo.

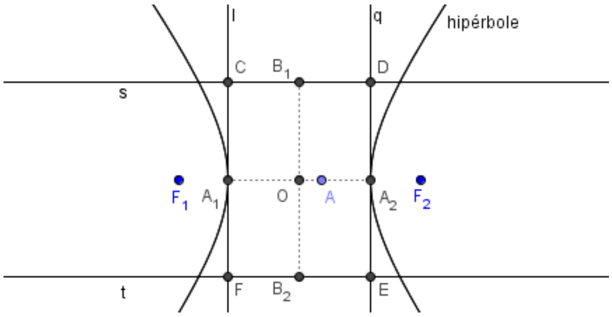


Figura 133: Pontos de interseção entre as retas criadas

Com o botão $Segmento$  construa os segmentos $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FC}$. Oculte o nome desses segmentos e as retas l, q, s, e t.

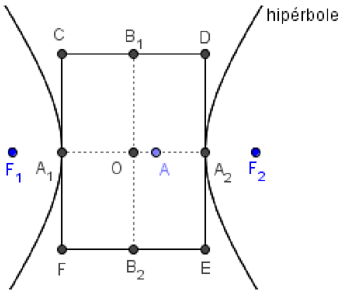


Figura 134: Segmentos $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FC}$

Os alunos deverão perceber que foi construído um retângulo $CDEF$ e poderão movimentar a construção a partir do ponto A ou dos focos e verificar que a dimensão desse retângulo será sempre $2a$ e $2b$.

Com o botão $Reta$  construa duas retas, sendo a primeira passando por C e E e a segunda passando por D e F. Renomeie essas retas para l_1 e l_2 conforme mostra a Figura 135.

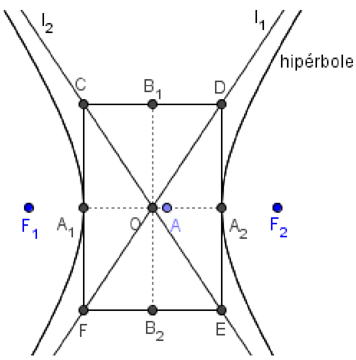


Figura 135: Retas l_1 e l_2

Os alunos poderão mover a construção a partir do ponto A ou dos focos e verificar que as retas l_1 e l_2 não tocam a hipérbole em momento algum passando sempre pelo centro O, além de notar que elas contêm as diagonais do retângulo $CDEF$. Assim, o professor poderá dizer que essas retas são denominadas assíntotas da hipérbole.

3.3.2. **Tratamento analítico da hipérbole**

A partir dos experimentos concretos e computacionais vistos acima, pode-se fazer a análise algébrica da hipérbole.

Inicialmente considera-se a hipérbole com seu centro O em (0,0). Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a hipérbole era formada por extremidades do eixo real nos pontos de coordenadas $A_1\,(-a, 0)$, $A_2\,(a, 0)$, do eixo imaginário nos pontos $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ e focos $F_1\,(-c, 0)$, $F_2\,(c, 0)$. Portanto, pode ser verificado que a hipérbole possui seus focos no eixo Ox, como na Figura 136 abaixo:

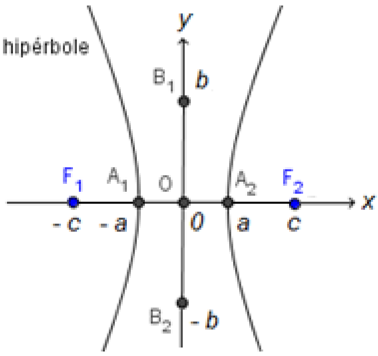


Figura 136: Hipérbole com centro em O e focos no eixo Ox

Considera-se um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva e, pela definição, tem-se o seguinte:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

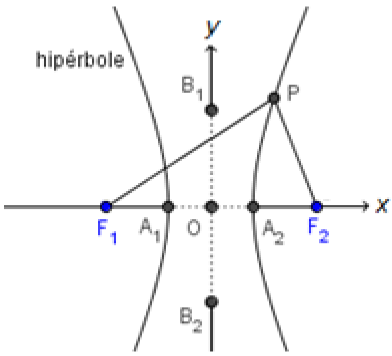


Figura 137: Hipérbole e um ponto P pertencente a ela

Utilizando a definição de distância entre dois pontos e sabendo que $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, tem-se o seguinte:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Numa igualdade, podem-se realizar operações iguais em cada lado de modo que seja mantida. Com isso, somando $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ de cada lado, tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os termos de cada lado da igualdade ao quadrado, tem-se:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Na parte esquerda da igualdade, tem-se um termo em comum que se pode colocar em evidência, assim tem-se:

$$4(cx - a^2) = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo os termos de cada lado da igualdade por 4, tem-se:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Novamente, elevam-se os termos de cada lado da igualdade ao quadrado, assim tem-se:

$$(cx - a^2)^2 = (\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (*)$$

Na hipérbole, viu-se que existe a propriedade do triângulo retângulo e a partir dele obtém-se o seguinte:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Subtraindo a^2 dos dois lados da igualdade, obtém-se:

$$c^2 - a^2 = a^2 + b^2 - a^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \qquad (**)$$

Substituindo $(**)$ na equação $(*)$, obtém-se:

$$\Longrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Sendo $ab \neq 0$, dividimos por a^2b^2 dos dois lados da igualdade e tem-se:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Simplificando, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (I)$$

Em que $a = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, $c = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ e b tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Essa equação é denominada equação reduzida da hipérbole, com centro O na origem e focos no eixo Ox.

Pode-se analisar quando a hipérbole possui seu centro O na origem e seus focos no eixo Oy. Com isso, observando as construções anteriores, nota-se que a hipérbole será formada por extremidades do eixo real nos pontos de coordenadas $A_1\,(0\,,\ a)$, $A_2\,(0, -a)$, do eixo imaginário nos pontos $B_1(-b, 0)$, $B_2(b,\ 0)$ e focos $F_1\,(0,\ c)$, $F_2\,(0,\ -c)$, conforme a Figura 138 abaixo:

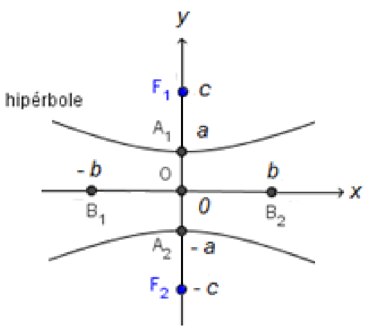


Figura 138: Hipérbole com centro em O e focos no eixo Oy

Do mesmo modo realizado para encontrar a equação (I), a equação reduzida da hipérbole para este caso, ou seja, com centro na origem e focos no eixo Oy será dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Em que $a = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, $c = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ e b tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Analogamente, podem-se encontrar as equações da hipérbole com centro O qualquer. Para isso, chega-se a elas considerando o centro da hipérbole sendo um ponto qualquer $O(x_0, y_0)$ e os eixos paralelos aos eixos x e y. Sendo assim, para efetuar a translação dos eixos deve-se tomar a diferença dos pontos $P(x, y)$ e $O(x_0, y_0)$, obtendo-se:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ paralelo ao eixo x, $a = \overline{OA_1}$, $b = \overline{OB_1}$ e $a > b$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2ª) $\overline{F_1F_2}$ paralelo ao eixo y, $a = \overline{OA_1}$, $b = \overline{OB_1}$ e $a > b$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através da análise do referencial teórico deste trabalho, observa-se que a tecnologia está presente a todo o momento na sociedade e se faz necessário na escola durante o ensino de Matemática. Observa-se, ainda, que o estudo analítico das cônicas e das propriedades geométricas destas curvas, quando aparecem, são de forma reduzida no decorrer da abordagem analítica. Assim, o levantamento teórico sobre o ensino de matemática, em especial as cônicas, tiveram como principal objetivo evidenciar como esse assunto é tratado e de que forma se pode melhorar o seu ensino utilizando a tecnologia atual. Nesse sentido, espera-se que as propostas de ensino desse trabalho sejam avaliadas como possíveis contribuições para um estudo motivador do tema.

Acredita-se que a utilização da proposta de sequência didático-pedagógica seja vantajosa, pois poderá gerar reflexões a respeito do ensino das cônicas, possibilitando realizar e potencializar o desenvolvimento do conhecimento, bem como despertar o interesse dos participantes a desenvolverem novas atividades e realizar outras construções envolvendo o estudo de cônicas, utilizando-se tecnologias no ensino de Matemática.

Acredita-se, ainda, que através deste trabalho, o aluno terá a oportunidade de obter conhecimento através de experimentos, deixando de ser espectador de uma aula expositiva. Embora este trabalho seja direcionado para alunos do Ensino Médio, pode-se verificar que existe a possibilidade de utilizá-lo também como um apoio metodológico em disciplinas de Geometria Analítica em cursos superiores.

As construções e reflexões de cada cônica foram propostas de modo a facilitar a aprendizagem dos conceitos importantes do tema pelos alunos. Sendo assim, ressalta-se que, ao elaborar esse trabalho, se teve dificuldade de apresentar as formas de abordagem para esse tema de forma reduzida e abrangente, que se acredita ser necessário para uma boa aprendizagem. Esse motivo pode justificar o fato de alguns professores não abordarem esse conteúdo no Ensino Médio, pois a proposta exige um período maior de tempo disponível às aulas.

Verifica-se que as cônicas, que são conhecidas hoje, já haviam sido apresentadas por volta do século III a.C.. Com isso, muitos são os tópicos sobre o assunto que ainda podem ser explorados e reunidos num trabalho como este, por exemplo, cônicas determinadas por cinco pontos, cônicas sob o ponto de vista da Geometria projetiva, estudo das cônicas no espaço tridimensional, cônicas como envolvente de curvas e outras aplicações.

Concluí-se assim, que este trabalho permite uma continuidade extensa do estudo sobre as cônicas, em que se sugere, em primeiro momento, uma pesquisa de campo e análise dos dados obtidos para verificar se a sequência didático-pedagógica proposta traz benefícios para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, M. E. B.. *Tecnologia na escola: Criação de redes de conhecimentos*. Série "Tecnologia na Escola" - Programa Salto para o Futuro, Novembro, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/2sf.pdf> Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[2] ARAÚJO, W. A.; GOMES, A. M. F. *O geogebra como recurso didático no ensino da Geometria Analítica*. In: V Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade", São Cristovão - SE, 2011. Disponível em: <www. educonufs.com.br/vcoloquio/cdcoloquio/c...ICO%20NO%20ENSINO%20DA%20GEOMETRIA%20ANALITICA.pdf> Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[3] BONA, V. *Tecnologia e infância: ser criança na contemporaneidade*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/edumatec/attachments/008_Viviane%20de%20Bona.pdf> Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[4] BONA, A. S.; LEAL, L. B. *Novas práticas investigativas nas aulas de Matemática*. In: XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba - PR, 2013. Disponível em: <http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1066_182_ID.pdf>. Data de acesso: 20 AGO. 2014.

[5] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.. *Informática e Educação Matemática*. 104 p. 4ª Ed. Belo horizonte: Autêntica Editora, 2010.

[6] BRANDT, S. T. J; MONTORFANO, C. *O software GeoGebra como alternativa no ensino da Geometria em um mini curso para professores*. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf> Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[7] CONTRI, R. F. F.; RETZLAFF, E.; KLEE, L. A. *Uso de softwares matemáticos como facilitador da aprendizagem*. In: II CNEM (Congresso de Educação Matemática) / IX EREM (Encontro Regional de Educação Matemática), Ijuí – RS, 2011. Disponível em: < http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC45.pdf>. Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[8] FERREIRA, R. C. *Ensinando Matemática com o geogebra*. Enciclopédia Biosfera, Centro Científico Conhecer, Goiânia - GO, vol.6, n.10, 2010. Disponível em: < http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010b/ensinando.pdf> Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[9] FERREIRA LOPES, J.. *Cônicas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro - SP, 2011. Disponível em: < http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/unesp/91061/lopes_jf_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Data de acesso: 26 AGO. 2014.

[10] GONÇALVES, J. E. L. *Os impactos das novas tecnologias nas empresas prestadoras de serviços*. Revista de Administração de Empresas / EAESP / FGV, São Paulo - SP, jan./fev. 1994. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rae/v34n1/a08v34n1>. Data de acesso: 27 AGO. 2014.

[11] GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. In: Anais do IV Congresso RIBIE, Brasília - DF, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf>. Data de acesso: 27 AGO. 2014.

[12] HABIB, N. C. P. *Abordagem e atividades para a cônica hipérbole*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, 2013. Disponível em: < http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/880/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20Abordagem%20e%20atividades%20para%20a%20c%C3%B4nica%20hip%C3%A9rbole.pdf>. Data de acesso: 20 AGO. 2014.

[13] IGI. *GeoGebra*. Disponível em: <http://www.geogebra.org >. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[14] LOPES, C. E. *Os desafios e as perspectivas para a educação Matemática no Ensino Médio*. Sessão Trabalho Encomendado – Anped34, A Educação Matemática no Ensino Médio, 2011. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/emanped/noticia/docs/TextosGT19Anped2011_TrabEncomendado.pdf>. Data de acesso: 27 AGO. 2014.

[15] NETO, Francisco Quaranta. *Apresentação da Dissertação sobre a Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática.* In: Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracaju - SE, 2011. Disponível em: <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Neto_F_Q_Apresenta%C3%A7%C3%A3o_da_Disserta%C3%A7%C3%A3o_sobre_a_Obra_Novos_Elementos_das_Se%C3%A7%C3%B5es_C%C3%B4nicas.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[16] OCEM. *Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias / Orientações Curriculares para o Ensino Médio, volume 2*, 135 p. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[17] PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[18] PCN +. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. / Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144 p. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[19] PEREIRA, T. L. M. *O uso do software geogebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de Geometria para o ensino fundamental e médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG, 2012. Disponível em: < http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DISSERTA%C3%87%C3%83O-Thales-de-Lelis-N.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[20] POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

[21] QUARANTA, F.; COSTA, Luciana Felix da; GUIMARÃES, Luiz Carlos. *Cônicas: um excelente elo capaz de mostrar as conexões entre a Geometria no plano e no espaço.* In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG, 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC09915440723T.doc>. Data de acesso: 20 AGO. 2014.

[22] SOUZA, I. M. A.; SOUZA, L. V. A.. *O uso da tecnologia como facilitadora da aprendizagem do aluno na escola*. Itabaiana: gepiadde, ano 4, volume 8 | jul-dez de 2010. Disponível em: < http://200.17.141.110/periodicos/revista_forum_identidades/revistas/ARQ_FORUM_IND_8/FORUM_V8_08.pdf >. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

[23] UNESCO. *Padrões de competência em tic para professores / Módulos de padrão de competência*. Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura, 2009. Disponível em: < http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001562/156207por.pdf>. Data de acesso: 20 Ago. 2014.

ANEXO

CONHECENDO O GEOGEBRA

Segundo o *International GeoGebra Institute* (IGI), o *GeoGebra* é um *software* de Geometria dinâmica, criado por Markus Hohenwarter, com início em um projeto em 2001, na Universidade de Salzburg, Alemanha. Posteriomerte, prosseguiu o desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, EUA. Este *software* foi elaborado para o ensino em sala de aula e pode ser utilizado por professores e alunos, sendo reunidos conceitos de GEOmetria, álGEBRA e cálculo, formando assim, seu nome pela aglutinação entre essas palavras.

No ramo da Geometria, o programa pode ser utilizado, dinamicamente, para construções geométricas a partir de pontos, vetores, retas, segmentos de retas, polígonos, entre outros.

Na álgebra, é possível inserir funções, equações e coordenadas. E, no cálculo, encontrar derivadas, integrais, raízes e extremos de uma função.

Esses três ramos são divididos em uma tela inicial. Sendo assim, ao abrir o programa será apresentada uma janela de visualização (área de geometria), uma janela de álgebra, uma barra de ferramentas e uma caixa de entrada, conforme a Figura 1.

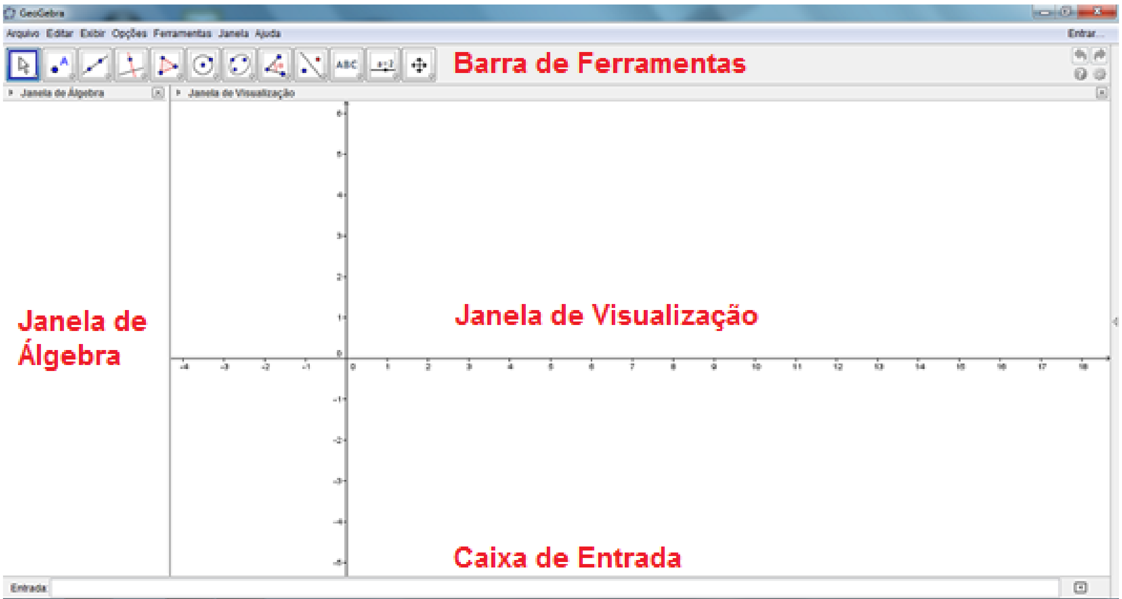


Figura 1: Tela inicial do *GeoGebra*

A janela de visualização, à direita, é onde aparecem as construções geométricas e gráficas, denominada também como janela de Geometria, onde é possível posicionar a seta do mouse em cima da construção e verificar sua descrição.

A janela de álgebra, à esquerda, serve para mostrar nomes, valores de segmentos, coordenadas de um ponto, funções e equações que são geradas na caixa de entrada, abaixo, local específico para inserir o que se deseja.

Acima, existe uma barra de ferramentas com 12 botões para as construções geométricas, além de outros que se encontram numa caixa de opções oculta de cada botão. Esta caixa de opções se abre quando se clica nos triângulos invertidos  posicionados no canto inferior direito de cada botão.

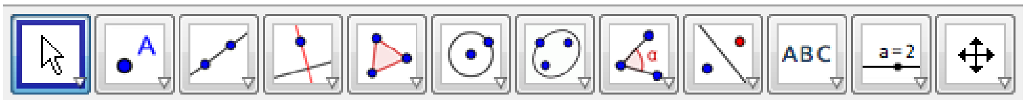
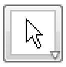


Figura 2: Barra de ferramentas do *GeoGebra*

Aqui serão apresentados apenas os recursos oferecidos pelo *software GeoGebra* necessários às construções das cônicas durante as atividades.

O botão *Mover*  serve para arrastar ou selecionar um ou mais objetos, podendo ser selecionado apertando a tecla *Esc* do computador.

O botão *Ponto*  serve para criar um ponto na janela de visualização ou sobre um objeto apenas com um clique.

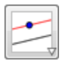
Ao posicionar a seta do mouse no triângulo invertido que se encontra no canto direito inferior de cada botão, tornando-se vermelho , e clicar sobre ele, a caixa de botões será aberta para selecionar outros botões desejáveis para a construção. Todas as caixas de botões ocultas são exibidas dessa forma.

Figura 3: Caixa de botões

O botão *Interseção de Dois Objetos*  marca o ponto de interseção, caso exista, de dois objetos que deverão ser selecionados sequencialmente ou quando o usuário clica diretamente no ponto de interseção.

O botão *Ponto Médio ou Centro*  exibe o ponto médio ou centro de um objeto. Para isso selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.

Os botões *Reta*  e *Segmento*  criam uma reta e um segmento, respectivamente, ao selecionar apenas dois pontos.

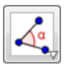
Os botões *Reta Perpendicular*  e *Reta Paralela*  criam retas que passam por um ponto e são, respectivamente, perpendicular e paralela a um objeto. Isso pode ser feito selecionando primeiro o ponto e, depois, o objeto que pode ser uma reta, um segmento, uma semirreta ou um vetor. Os objetos poderão ser movidos e as propriedades não serão alteradas.

O botão *Mediatriz*  cria uma reta equidistante de dois objetos. Isso pode ser feito selecionando dois pontos ou um segmento.

O botão *Lugar Geométrico*  traça o lugar geométrico determinado por alguma propriedade. Para isso, deve-se selecionar o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

Os botões *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*  e *Círculo dados Centro e Raio*  criam círculos, sendo o primeiro criado ao selecionar o centro e, depois, um ponto do círculo formando assim um raio de medida igual a distância entre esses dois pontos. O segundo é criado ao selicionar o centro e, depois, digitar a medida correspondente do raio desejado.

Os botões *Elipse*  e *Hipérbole*  criam as essas cônicas a partir de três pontos, sendo primeiramente dois pontos selecionados que são os focos e, após, um ponto que pertence ao objeto. O botão *Parábola*  cria a parábola ao selecionar primeiro o ponto que será o foco e, depois, a reta definida como *diretriz*.

O botão *Ângulo*  cria o ângulo formado por duas retas ou segmentos de retas. Para isso, selecione três pontos de modo que o segundo seja o vértice em que o ângulo será formado ou selecione duas retas ou segmentos de reta.

O botão *Distância, Comprimento ou Perímetro*  fornece o valor da distância, comprimento ou perímetro entre dois objetos ou do objeto quando são selecionados dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo.

O botão *Reflexão em Relação a um Ponto*  cria um objeto simétrico em relação a um ponto. Para isso basta selecionar primeiro o objeto e, depois, o ponto que é o centro da reflexão.

Ao clicar com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização será aberta uma caixa de opções conforme a Figura 4.

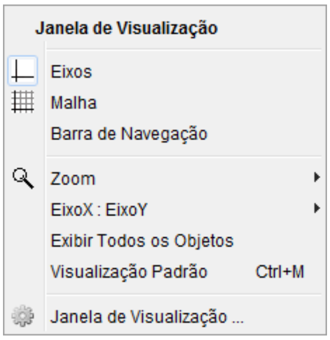


Figura 4: Caixa de opções da janela de visualização

Nesta caixa, a opção Eixos  permite o usuário ocultar ou exibir o eixo cartesiano existente.

Quando um ponto, uma reta, um segmento de reta ou qualquer outro objeto geométrico é criado, ao posicionar a seta do mouse sobre este figura de forma a selecioná-lo e clicando-se com o botão direito do mouse, será aberta uma caixa de opções referente a este objeto geométrico.

Figura 5: Caixa de opções do objeto geométrico

A seleção deste objeto poderá ser realizada vericando a parte superior da caixa de opções em que consta o objeto e seu nome, conforme a Figura 5 acima.

As opções *Exibir Objeto*  e *Exibir Rótulo* , respectivamnete, ocultam ou exibem o objeto geométrica e seu nome.

A opção *Habilitar Rastro*  faz com que os rastros do objeto construído sejam marcados a medida que ele seja movimentado e a opção *Renomear*  permite alterar o nome que a construção recebe automaticamente pelo *software*.

A opção *Propriedades*  abre uma caixa de preferências em que o usuário poderá alterar o que deseja, sendo possível selecionar os objetos pela janela de objetos à esquerda da caixa de preferência e alterar o formato básico, cor ou estilo do objeto selecionado pela janela à direita, dentre outras opções desejáveis, conforme a Figura 6 abaixo.

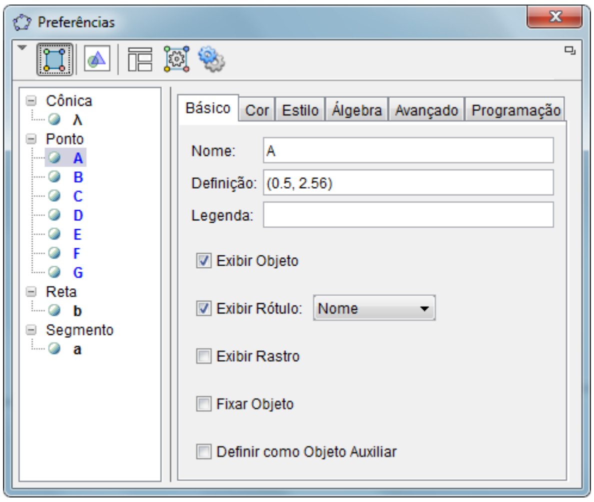
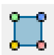


Figura 6: Caixa de preferências

A barra de preferências contida nessa caixa de preferências na parte superior permite ao usuário escolher o que e onde deseja alterar, possuindo as 5 opções seguintes: Objetos, Janela de Visualização, *Layout*, Padrões ou Avançado, como mostra, nessa ordem, a Figura 7 abaixo.

Figura 7: Barra de preferências da caixa de preferências

A primeira opção *Objetos*  possui uma barra com 6 guias na janela à direita, conforme a Figura 8.

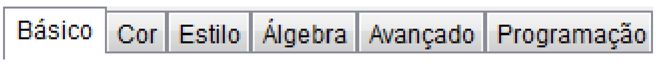


Figura 8: Barra de guias da opção Objetos

Na guia *Básico* contém todas as opções da caixa de opções do objeto geométrico, além de poder exibir nome, nome e valor ou somente valor do objeto através da opção *Exibir Rótulo*.

Na guia Estilo é possivel alterar o estilo da linha para tracejado, pontilhado ou contínuo, quando selecionamos uma reta ou segmento de reta.

Outra forma de ocultar objetos é a partir da janela de álgebra, pois cada objeto criado contém um círculo azul à esquerda do seu nome que indica a exibição do objeto. Clicando neste círculo, o objeto será ocultado e sua cor passará de azul para branco .