INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA
E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Gleicielle Neiva de Souza

Volta Redonda

2014

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA
E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

A ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Gleicielle Neiva de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Professor Msc. André Seixas de Novais.

Volta Redonda

2014

Gleicielle Neiva de Souza

A ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes professores:

Prof. e Msc. André Seixas de Novais - orientador

Prof. e Msc. Joicy Pimentel Ferreira

Prof. e Msc. José Ricardo Ferreira de Almeida

Volta Redonda

2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou minhas escolhas durante toda caminhada e que a cada etapa me preenchia de força, esperança e coragem.

Aos meus pais, Rita de Lourdes Vicente de Souza e Célio Jorge de Souza, que durante toda minha vida acreditaram e confiaram em mim, na minha capacidade e na minha escolha. E de forma especial e carinhosa me deram força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, me entendendo nos momentos de nervosismo e comemorando a cada vitória. Sem o amor deles nada disso seria possível.

Ao meu namorado, Michel Pinheiro Fonseca, que desde o inicio do curso esteve ao meu lado, aguentou todos os nervosismos das provas, e a ansiedade que houve em escrever cada capítulo desse trabalho. Com carinho e amor soube me acalmar quando necessário e festejar comigo a cada etapa realizada.

Ao professor André Seixas de Novais por ter acreditado em mim e nesse projeto desde o início, pela paciência na orientação, pelas palavras de apoio e que acalmavam quando parecia que nada ia funcionar e pelo incentivo durante todo o desenvolvimento até a conclusão desta monografia.

A todos os professores do curso, que sem dúvidas foram muito importantes na minha vida acadêmica, na minha vida pessoal e no desenvolvimento desta monografia. Em especial a professora Joicy Pimentel Ferreira pelas conversas de psicóloga, pelo apoio durante todo o ano e por ter permitido que os testes fossem realizados na sua turma.

SOUZA, Gleicielle Neiva de. **A ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA**. 2014. 58 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática): Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda, 2014.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar as principais dificuldades dos alunos no ensino de trigonometria, em específico no ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Os tópicos básicos de trigonometria, como as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ensinados no ensino médio são importantes para que os alunos expandam as suas possibilidades de resolução de problemas, permitindo relacionar as medidas de lados à seus ângulos. Acreditamos que a apresentação do tema é pouco contextualizada, focada na mecanização e memorização de fórmulas. E os alunos sentem dificuldades em diferenciar as grandezas envolvidas nos problemas, medidas angulares e lineares. Será realizado um teste inicial para que possa ser feita a análise de erros das respostas dos alunos. Classificaremos os erros cometidos pelos alunos no ensino de trigonometria. Após esse teste serão propostas atividades investigativas que possam auxiliar na compreensão dos conceitos. Para elaboração das atividades utilizaremos a história da matemática e atividades investigativas. Após a aplicação destas atividades pretendemos avaliar a evolução dos alunos.

Palavras-chave: análise de erros; trigonometria; atividades investigativas.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 8
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 10
2.1. História da Matemática como recurso nas aulas de Matemática 10
2.1.1. História da Trigonometria 11
2.1.2. O ensino da Trigonometria no Brasil 15
2.2. Análise de Conteúdo 16
2.2.1. Análise de Erros 18
2.3. Atividades Investigativas 20
3. METODOLOGIA 22
3.1. Pesquisa Bibliográfica 22
3.2. Pesquisa de Campo 23
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS 24
4.1. Análise Dos Erros Apresentados no pré-teste 24
4.2. Atividades Investigativas 38
4.3. Evolução dos Alunos após Aplicação das Atividades Investigativas 41
5. CONCLUSÕES 46
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 48
Apêndice 1 – Pré teste 50
Apêndice 2 – Proposta Metodológica 52
Apêndice 3 – Pós teste 58
Apêndice 4 – Teodolito Caseiro 60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Sombra da vara 12
Figura 2- Ângulo correspondente à corda 13
Figura 3- O jiva...14
Figura 4- Triângulo Retângulo do exercício 1..24
Figura 5- Questão 1 do aluno 4...26
Figura 6- Questão 1 do aluno 22...26
Figura 7- Questão 2 do aluno 24...27
Figura 8- Questão 2 do aluno 23...28
Figura 9- Questão 3 do aluno 1...29
Figura 10- Questão 3 do aluno 12...30
Figura 11- Esquema da questão 4 30
Figura 12- Questão 4 do aluno 1...31
Figura 13-Questão 4 do aluno 17...32
Figura 14- Questão 5 do aluno 13...33
Figura 15- Questão 5 do aluno 26...34
Figura 16- Questão 6 letra a do aluno 22...35
Figura 17- Questão 6 letra a do aluno 15...35
Figura 18- Questão 6 letra b do aluno 2...37
Figura 19- Questão 6 letra b do aluno 20...37
Figura 20- Triângulo Atividade 1 38
Figura 21- Triângulo Exercício 39
Figura 22-Recado deixado no pós-teste pelo aluno 3 44
Figura 23- Tabela feita pelo aluno 21 no pós-teste 45
Figura 24-Materiais para Construção 60
Figura 25- Colando a Tampa..60
Figura 26- Colocando o Arame 61
Figura 27-Colocando o Tubo de Antena...61
Figura 28-Teodolito Caseiro 61

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Análise da questão 1 25
Gráfico 2- Análise dos erros questão 1 25
Gráfico 3- Análise da questão 2 26
Gráfico 4- Análise dos Erros da questão 2 27
Gráfico 5- Análise da questão 3 28
Gráfico 6- Análise dos Erros da questão 3 29
Gráfico 7- Análise da questão 4 30
Gráfico 8- Análise dos Erros da questão 4 31
Gráfico 9- Análise da questão 5 33
Gráfico 10- Análise dos Erros da questão 5 33
Gráfico 11- Análise da questão 6 letra a 34
Gráfico 12- Análise dos Erros da questão 6 letra a 35
Gráfico 13- Análise da questão 6 letra b 36
Gráfico 14- Análise dos Erros da questão 6 letra b 36
Gráfico 15- Questão 1 pré-teste 41
Gráfico 16- Questão 1 pós-teste 41
Gráfico 17- Questão 2 pré-teste 41
Gráfico 18- Questão 2 pós-teste 41
Gráfico 19- Questão 3 pré-teste 42
Gráfico 20- Questão 3 pós-teste 42
Gráfico 21- Questão 4 pré-teste 42
Gráfico 22- Questão 4 pós-teste 42
Gráfico 23- Questão 5 pré-teste 43
Gráfico 24- Questão 5 pós-teste 43
Gráfico 25- Questão 6 letra a pré-teste 43
Gráfico 26- Questão 6 letra a pós-teste 43
Gráfico 27- Questão 6 letra b pré-teste 43
Gráfico 28- Questão 6 letra b pós-teste 43

1. INTRODUÇÃO

Tópicos básicos de trigonometria, como as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ensinados no ensino médio, são de extrema importância no desenvolvimento das habilidades e competências na resolução de problemas, permitindo relacionar as razões entre as medidas dos lados de um triângulo com seus ângulos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN/EM, para que o desenvolvimento destas habilidades seja eficiente, o estudo da trigonometria deve estar:

> [...] ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos (BRASIL, 2000, p.44).

A aprendizagem destes conceitos envolve, inicialmente, uma compreensão do significado das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Embora o PCN tenha destacado a importância do entendimento destes conceitos, percebe-se, a partir de discussões realizadas pela comunidade de Educação Matemática, uma grande dificuldade enfrentada pelos alunos da educação básica.

Dessa forma, a problemática que serviu como elemento motivador desta pesquisa é "Quais são as principais dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo?". Pelas razões acima citadas o problema é justificável.

Na busca de respostas para este problema iremos analisar e caracterizar os principais erros cometidos pelos estudantes do 1º período[1] do Ensino Médio do IFRJ - Instituto Federal do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda.

Segundo as Orientações Curriculares Nacionais

> Na escola, uma das características mais importantes do processo de aprendizagem é a atitude reflexiva e autocrítica diante dos possíveis erros. Essa forma de ensino auxilia na formação das estruturas de raciocínio, necessárias para uma aprendizagem efetiva, que permita ao aluno gerenciar os conhecimentos adquiridos (BRASIL, 2006, p. 46).

[1] Equivalente ao 1º semestre do 1º ano do Ensino Médio

Acreditamos assim que, analisando as respostas dadas por estes estudantes, poderemos propor atividades investigativas que minimizem as dificuldades apresentadas.

Para nortear o trabalho de pesquisa em questão, complementando a hipótese acima, levantamos três pressupostos: a apresentação do tema é pouco contextualizada, focada na mecanização e memorização de fórmulas; através dos erros cometidos pelos estudantes podemos replanejar futuras metodologias a fim de minimizar dificuldades; e os alunos confundem as grandezas envolvidas: lados, ângulos e razões.

Temos como objetivo geral deste trabalho analisar os principais erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas envolvendo a razões trigonométricas. E como objetivos específicos iremos: classificar e caracterizar os erros cometidos pelos alunos no ensino de trigonometria, com base na teoria de Análise de Erros; discutir a importância da História da Matemática para o ensino da trigonometria; propor atividades investigativas que auxiliem na compreensão dos conceitos; e avaliar a evolução dos alunos após a aplicação da atividade.

Associada a uso da teoria de Análise de Erros, por meio de uma avaliação crítica e reflexiva, discutiremos a importância do uso da História da Matemática e Atividades Investigativas como ferramentas didático-pedagógicas que podem minimizar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão dos conceitos de trigonometria.

No segundo capítulo será apresentada a fundamentação teórica do trabalho, destacando um breve comentário sobre a importância do uso da História da Matemática, a História da Trigonometria e o ensino de trigonometria no Brasil. Apresentaremos também um embasamento sobre a teoria de Análise de Erros e finalizando com algumas características relevantes sobre o uso de Investigações Matemáticas. A metodologia da pesquisa em questão será descrita no terceiro capitulo, em que discutiremos a importância da utilização de uma pesquisa bibliográfica e de campo para corroboração das hipóteses levantadas. O quarto capítulo será composto pela análise dos resultados, onde serão discutidos e analisados os erros cometidos pelos estudantes, assim como a evolução do conhecimento após a aplicação das atividades investigativas. Finalizando com as conclusões da pesquisa no quinto capítulo.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fim de adquirir uma base teórica suficiente para compreensão da aquisição do conhecimento matemático, com relação aos conceitos de trigonometria e da pesquisa em questão, utilizaremos os trabalhos de Brasil (1997), Brasil (2006), Costa (2003), Costa (2008), Campos & Nunes (1994), Mendes (2002) e Souza *et. all.* (2013), que descrevem sobre a importância do uso da História da Matemática como ferramenta didático pedagógica, a História da Trigonometria e do Ensino de Trigonometria no Brasil, além disso os trabalhos de Moraes (1999), Motta & Amorim (2011), Bastos & Allevato (2012) e Cury (2007), subsidiarão a teoria de Análise de Erros como metodologia de nossa pesquisa no campo, finalizando com Ponte (2009) e Fiorentini *et. al.* (2004) destacando a importância do uso de Atividades Investigativas nas aulas de Matemática.

Sendo assim, iniciaremos a apresentação de uma discussão crítico-reflexiva sobre o uso da História da Matemática como ferramenta didático-pedagógica durante as aulas.

2.1. História da Matemática como recurso nas aulas de Matemática

A História da Matemática é um importante recurso que o professor pode utilizar durante suas aulas, diversificando assim suas técnicas pedagógicas. Além de desmistificar a ideia de que a matemática surgiu sem nenhuma explicação óbvia, ela apresenta esta ciência como uma ferramenta de relevante cunho social, idealizada por necessidades reais, atribuída e criada por concepção humana.

Segundo o PCN/EF,

> [...] a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1997, p. 42).

A História da Matemática esclarece inúmeras questões relacionadas aos **porquês** enfrentados pelos professores durante as aulas de Matemática. Porém deve-se ter clareza durante o uso desta metodologia, que o professor não pode ficar preso a acontecimentos e datas, pois o aluno poderá ficar desestimulado, acreditando ser mais um conteúdo a ser decorado. De acordo com o PCN/EF:

> Entretanto, essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, data se nomes a serem memorizados (BRASIL, 1997, p. 43).

Diante destas colocações, apresentamos a história da trigonometria à qual se acredita ser importante para o seu ensino.

2.1.1. História da Trigonometria

As Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (OCN/EM) destacam que:

> No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90°, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180°. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30°, 45° e 60° (BRASIL, 2006, p.73).

Segundo Souza *et. al.*:

> [...] podemos destacar que o uso da História da Trigonometria, através do Ensaio, facilita a aprendizagem, na medida em que os alunos destacam que aumenta a predisposição para a aprendizagem, facilita o diálogo, trazendo situações que possibilitam a problematização e compreensão dos conceitos (2013, p.15).

Não se sabe com precisão a época de surgimento da trigonometria, contudo deve-se aos egípcios e babilônios seus primeiros vestígios, que surgiram a partir de problemas da Agricultura, Astronomia e Agrimensura, para resolvê-los estes povos utilizavam as razões entre os lados de triângulos semelhantes.

No Egito podemos observar a utilização da trigonometria na medição das pirâmides, foi lá que surgiu a ideia de associar sombras projetadas por varas verticais às sequências numéricas, relacionando seu comprimento as horas do dia.

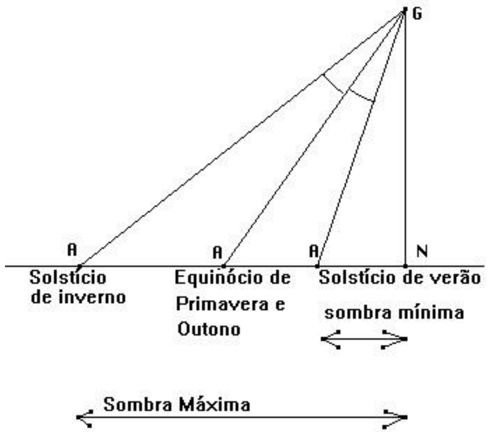


Figura 1- Sombra da vara[2]

Segundo Costa (2003, p. 04) uma vara (GN na figura) era fixada no chão formando com ele um ângulo reto, a sombra NA permitia, através de sua sombra, observar a duração do ano e a duração do dia era medida pela movimentação lateral do ponto A. Estas ações são predecessoras da tangente e cotangente que surgiram da necessidade de se medir alturas e distâncias.

Parece ter havido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios, que foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Estes estudos sobre astronomia foram importantes, pois através deles surgiu um conceito fundamental no desenvolvimento da trigonometria, o de ângulo e de como efetuar sua medida, já que ele é fundamental em várias situações, como na compreensão das razões trigonométricas.

Ainda segundo a autora, também foi encontrado vestígios de trigonometria na China, onde os triângulos eram utilizados nas medições de distâncias, comprimentos e profundidades.

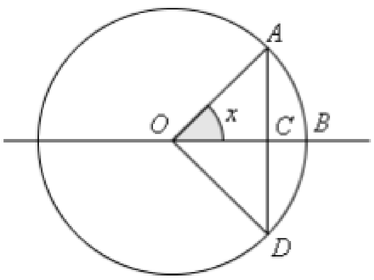
No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. Na Grécia a matemática teve grandes avanços, e a civilização grega passou a ser referência sobre os estudos de trigonometria, o seu desenvolvimento está ligado ao da geometria. Os estudos de Tales, assim como Pitágoras (Grécia 625 a.C. – 558

[2] Fonte – COSTA (2003)

a.C.) sobre semelhança de triângulo e triângulos retângulos embasaram os conceitos e propriedades da trigonometria. Ressaltemos que os astrônomos produziram a mais notável medida da antiguidade para a circunferência da Terra. Estas ações foram fundamentais no desenvolvimento da trigonometria.

Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia(180-125 a.C.), influenciado pelos babilônios acreditava que a melhor base de contagem era a de 60 e parece que devemos a ele a divisão da circunferência em 360 partes. Pertence a ele, também, a construção da primeira tabela trigonométrica com valores de uma série de ângulos de 0° a 180°.

Ele resolveu associar a cada corda de um arco, o ângulo central correspondente, o que lhe rendeu o título de “Pai da trigonometria”. A base da trigonometria era o estudo da relação entre um arco e sua corda. Nesses estudos trabalhava-se com a corda de arco duplo, assim a corda de um arco não representava o seno do seu ângulo correspondente, mas era possível encontrar o seno da metade do arco. Como podemos observar na figura abaixo, que representa o método utilizado por Hiparco.



$$\sin x = \frac{AC}{OA} = \frac{corda\ AD}{2r}$$

Figura 2- Ângulo correspondente à corda[3]

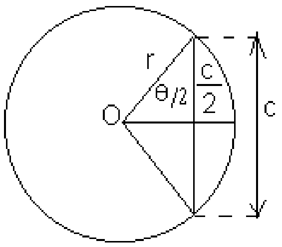
Cláudio Ptolomeu foi sucessor a Hiparco nos estudos sobre trigonometria e o autor de “*Almagesto*”, obra mais importante até então sobre o estudo da trigonometria. O “*Almagesto*” era uma compilação de vários conhecimentos de sua época e a maior parte dele é baseada nos trabalhos de Hiparco.

Segundo Kennedy (apud COSTA, 2003, p. 07): “[...] para os matemáticos o *Almagesto* tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas.”.

No século IV com a mudança do centro da cultura da Europa Ocidental para a Índia, devido à queda do Império Romano, a trigonometria passou por

[3] Fonte: COSTA (2008)

transformações, pois não seguia o mesmo pensamento de Ptolomeu. Os hindus criaram uma tabela trigonométrica onde o arco é a variável independente. Eles deram o nome de *Jiva* à relação entre a metade da corda e a metade do ângulo correspondente, o que possibilitou a visualização de um triângulo retângulo na circunferência.



$$jiva\ \frac{\theta}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r}\ .crd\ \theta$$

Figura 3- O jiva[4]

Como podemos observar na figura o seno da metade do arco é a metade da corda dividida pelo raio do círculo.

O *Jiva*, que significa metade da corda, foi traduzida para árabe como *Jiba*, que possui o mesmo som de *Jiva*, nos escritos árabes *Jiba* se transformou em *Jaib* que significa angra ou baía, o que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Logo podemos concluir que a palavra Seno veio de um erro de tradução.

Somente no séc. XVII surgiu à palavra cosseno, que significa o seno do ângulo complementar. Assim, devido aos problemas das Astronomias surgiram os conceitos de seno e cosseno, já os conceitos de tangente e cotangente surgiram devido à necessidade de calcular alturas e distâncias.

Com isso os hindus aperfeiçoaram os métodos de tabulação e introduziram as principais funções trigonométricas e após os hindus, os árabes e os persas deram sua contribuição à trigonometria. Foram estes que introduziram o círculo de raio unitário e demonstraram que a razão *Jiva* é valida para qualquer triângulo retângulo independente do valor da hipotenusa.

Regiomantus (1436-1475) no séc. XV escreveu o “Tratado sobre Triângulos” que continha uma trigonometria completa, estabelecendo-a como uma ciência independente da Astronomia.

Após todas essas considerações, concluímos que a Trigonometria é um campo da Matemática desenvolvido e construído ao longo de séculos, mediado por necessidades reais e concebida pelas mãos de vários povos distintos.

---
[4] Fonte – COSTA (2003)

Outro aspecto importante a ser tratado é o ensino da Trigonometria no Brasil, pois a partir dele tem-se um panorama de como esse tema vem sendo tratado nas escolas e nos livros didáticos.

2.1.2. O ensino da Trigonometria no Brasil

De acordo com Mendes (2002, p.01) a trigonometria era ensinada no Brasil como um tópico da geometria, somente no início do século XX os educadores matemáticos começaram a discutir se a trigonometria podia ser tratada como um tema matemático independente nas propostas curriculares. Um dos educadores que se destacou nessas discussões foi o professor Euclides Roxo (1937), que na década de 30 afirmou ser um erro considerar a trigonometria uma parte independente no currículo da matemática. Como justificativa para sua afirmação ele dizia que, os diversos assuntos abordados pela trigonometria estavam ligados à geometria e à álgebra.

No entanto, a unicidade da ciência matemática baseada no princípio unificador de Felix Klein era seu principal argumento. Ele baseou-se nas ideias de Laisant (1907) para defender sua tese unificadora, afirmando que as divisões e subdivisões do conhecimento matemático, supostamente necessárias para solucionar problemas, ampliar, organizar e ordenar as proposições matemáticas elaboradas ao longo da história, são mais artificiais do que naturais.

São com esses argumentos que Roxo se opõe a inclusão da trigonometria como um quarto ramo da matemática, para ele os conceitos básicos desse tema matemático surgem naturalmente no desenvolvimento das teorias da álgebra. Ele acreditava que a única parte que poderia ser considerada unicamente como trigonometria era a resolução de triângulos, o restante enquadrava-se na álgebra e na geometria, justificava assim sua inclusão como parte da geometria.

Ainda segundo o autor, nas primeiras décadas os livros didáticos eram traduções de livros franceses, que apresentavam como proposta a discussão da trigonometria como conteúdo independente da álgebra, da geometria e da aritmética, porém não há uma preocupação com o desenvolvimento histórico da trigonometria.

No final dos anos 30 até o final dos anos 50, não houve grandes mudanças no ensino da matemática, um fato que deve ser lembrado é que nesse período os livros didáticos eram de autores brasileiros. Os livros trazem a trigonometria como um capítulo a parte, separado da geometria, o que se vê na verdade é uma trigonometria que utiliza a álgebra e a geometria para desenvolver seus conceitos, tais como são ensinados hoje.

O Movimento da Matemática Moderna, ocorreu no Brasil a partir da década de 1970 sob influência internacional, esse importante movimento pretendia revolucionar o ensino de matemática a partir de mudanças das propostas curriculares. Um livro dessa época é o de Osvaldo Sangiorgi (1961), que apresenta definições diretas de seno, cosseno e tangente, apesar da maneira tradicional como são apresentados os conceitos ele também apresenta um capítulo com geometria plana e com aspectos construtivos utilizando régua e compasso.

Segundo Mendes (2002, p. 06), a proposta didática de Sangiorgi acabava por reforçar a tese de Euclides Roxo, de um modo bastante motivador, dinâmico e detalhado. Ainda segundo Mendes (2002, p. 06), outro livro desse período é o de Ary Quintella, ele apresenta duas unidades voltadas à geometria onde são inseridos aspectos trigonométricos, o autor faz referências históricas sobre o desenvolvimento da trigonometria.

Os livros pesquisados por Mendes *et. al.* (2002) de modo geral apresentam uma síntese histórica com nomes e datas, segue o desenvolvimento do conteúdo através do triângulo retângulo, exercícios de fixação e problemas, além de trazer a trigonometria separada da geometria. Como se observou o ensino da trigonometria não sofreu grandes mudanças nas últimas décadas e em sua maioria apresentam as definições dos conceitos trigonométricos sem darem maiores detalhes.

Embasados por todos os autores citados anteriormente e finalizadas as pesquisas que envolvem os aspectos da trigonometria, será apresentada a seguir a Teoria da Análise de Conteúdo, a qual tem grande importância no desenvolvimento desta pesquisa.

2.2. Análise de Conteúdo

Moraes (1999) levanta uma discussão sobre a importância da Análise de Conteúdos e Erros para o ensino e aprendizagem. A Análise de Conteúdo iniciou-se no fim do século passado, todavia seu maior desenvolvimento se deu nos últimos 50 anos. Constitui uma metodologia de pesquisa que delineia e interpreta o conteúdo de documentos e textos, auxilia a reinterpretar as mensagens e atingir uma compreensão de seus significados num nível maior que o da leitura comum.

O autor destaca ainda que, embora a Análise de Conteúdos tenha tido uma fase de grande produtividade, baseada no paradigma positivista, valorizando a quantificação e a objetividade, atualmente esta teoria esta alcançando novas e mais desafiadoras possibilidades à medida que explora qualitativamente as mensagens e informações.

Como metodologia investigativa a Análise de Conteúdo abrange procedimentos especiais no processamento das informações. A Análise de Conteúdo para Moraes (1999, p.03): "É uma ferramenta, um guia prático para a ação, sempre renovada em função dos problemas cada vez mais diversificados que se propõe a investigar".

Dessa maneira a Análise de Conteúdo está presente em trabalhos de natureza dialética, fenomenológica e etnografia, entre outras. Em qualquer de suas abordagens esta propicia informações complementares ao leitor crítico de uma mensagem, seja ele, psicólogo, sociólogo, educador, crítico literário ou outro.

Dentre as possibilidades da Análise de Conteúdo para educação, podemos exemplificar o caso da aplicação de uma atividade em que o professor analisa a respostas dadas pelos alunos, caracterizando os seus acertos e erros.

Segundo Moraes (1999, p.04), "quando se utiliza a Análise de Conteúdo, uma clara explicitação de objetivos ajuda a delimitar os dados efetivamente significativos para uma determinada pesquisa.".

No âmbito escolar a Análise de Conteúdo é feita através da verificação das respostas dos alunos. Assim, analisam-se as respostas com um olhar reflexivo que não está interessado apenas nos acertos, mas também nos erros dos alunos. Quando o aluno compreende isto ele se sente livre para responder o que realmente pensa, mesmo que seja diferente da resposta padronizada, porque sua resposta será admitida como conhecimento e, como tal, é considerada parcial e provisória.

O erro expõe a diferença que efetivamente compõe a sala de aula e nos mostra como podemos agir para potencializar o processo de ensino-aprendizagem, pois ele indica particularidades que devem ser integradas à dinâmica coletiva e trabalhadas com a marca da originalidade e da criação, aspectos centrais no desenvolvimento dos projetos.

2.2.1. Análise de Erros

Segundo os PCN/EF

> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode interferir para auxiliá-lo (BRASIL, 1997, P. 46).

Para Torre (2007, apud BASTOS e ALLEVATO, p. 01), “o erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um caminho, sem se equivocar. Não há aprendizagem isenta de erros.”.

Cury (2007) destaca que a Análise de Erros pode ser utilizada tanto como metodologia de pesquisa, quanto metodologia de ensino e aprendizagem.

> A análise de erros é uma abordagem de pesquisa - com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de estudantes de todos os níveis de ensino nas amostras -, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula (CURY, 2007, p. 91).

A autora coloca ainda que as pesquisas sobre erros vêm sendo trabalhadas desde os anos 60 e sofreram variadas influências, que vão desde o Behaviorismo até o Processamento de Informações, chegando até a proposição de atividades investigativas. Em cada momento o erro foi tratado de maneira diferente, da identificação à classificação até a procura por métodos de ensino que diminuíssem seu acontecimento, chegando à utilização do erro como ponto de partida para o trabalho com Atividades Investigativas.

Para MOTTA & AMORIM,

> O erro é caracterizado como um processo de maturidade, oportunidade para o aluno desenvolver sua capacidade de pensar e resolver situações-problema, criar hipóteses e assim chegar a um novo conhecimento, alcançando o objetivo final (2011, p. 01).

A análise de erros é uma metodologia que deveria estar mais presente nos cursos de formação inicial e continuada dos professores, pois com a intensificação deste tipo de técnica no ensino e aprendizagem da Matemática, os futuros professores terão um ferramental a mais no auxílio da minimização de dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

> [...] os professores em formação cometem erros na realização de tarefas matemáticas, muitos deles semelhantes ou devidos às mesmas causas que aqueles cometidos pelos alunos; e expor concepções deficientes e os erros cometidos resultaria em uma tarefa formativa que não se pode descartar, já que os obrigaria a uma reestruturação positiva dos esquemas prévios (Abrate, Pochulu & Vargas 2006 *apud* Cury, 2007, p. 93).

Ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, o professor é capaz de identificar onde se encontram as principais dificuldades, refletindo sobre as possíveis metodologias de ensino a serem implementadas, além de poder discutir as soluções corretas e incorretas, ampliando assim uma análise critica nos processos cognitivos dos estudantes.

> Em geral, o erro era observado pelo professor como um indicador do mau desempenho do aluno, sem jamais ser utilizado para o redimensionamento do ensino. O que permeava o ensino era uma "pedagogia da resposta" em que o erro era o sintoma visível do fracasso do aluno, assim como o acerto era o sinal mais evidente de seu sucesso (PINTO, 2000, *apud* MOTTA & AMORIM, p.02).

Porém o professor pode instigar seus alunos para que reflitam sobre todo o processo de resolução de uma situação-problema, auxiliando-os a superar seus próprios erros, buscando onde, como e porque errou.

Assim eles aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, delineando passos, estabelecendo relações, verificando regularidades ou irregularidades, fazendo uso dos erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem postura de investigação, aprendendo a pesquisar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e responsabilidade; e, finalmente, desenvolvem sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

2.3. Atividades Investigativas

Concordamos com Ponte (2009, p.01) no que se refere ao termo investigar. Segundo o autor investigar, seja o que for, “é procurar conhecer o que não se sabe”.

As atividades investigativas permitem que o aluno reflita sobre a questão que esta desenvolvendo, descobrindo suas dúvidas e meios de saná-las, julgando qual será eficiente e qual deve ser descartado.

> Nas investigações matemáticas, o aluno é convidado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas principalmente na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor (PONTE, 2009, p.23).

Assim as Atividades Investigativas contribuem para realizar o que orienta o PCN-EM:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p. 40).

Segundo Ponte (2009), existem quatro momentos principais nas Atividades Investigativas:

- Exploração e formulação de questões investigativas (ou situações problemáticas);
- Organização de dados e construção de conjecturas;
- Realização de testes e refinamento e sistematização das conjecturas; e
- Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Para Fiorentini, *et. al.* (2004), “as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e investigação.”.

Acreditando nas ideias expostas por Ponte (2009) e Fiorentini *et .al.* (2004) escolhemos realizar atividades investigativas como proposta metodológica desta pesquisa.

Após as reflexões apresentadas acima que são suporte teórico deste estudo, descreve-se a metodologia utilizada.

3. METODOLOGIA

A fim de responder as hipóteses do trabalho foi realizada uma pesquisa de cunho bibliográfico e uma pesquisa de campo.

Na pesquisa bibliográfica foi realizado um estudo em livros e artigos a fim de buscar embasamento sobre as teorias de Análise de Erros, Atividades Investigativas e História da Matemática.

Após a pesquisa bibliográfica foi realizada uma pesquisa de campo, que inicialmente constou de uma coleta de dados por meio de uma avaliação com questões de trigonometria, a fim de analisar os principais erros cometidos pelos estudantes.

Posteriormente foi feita uma proposta metodológica envolvendo o ensino de Trigonometria utilizando atividades investigativas. E, então, uma nova coleta de dados por meio de uma avaliação, visando verificar a evolução dos participantes.

3.1. Pesquisa Bibliográfica

A pesquisa bibliográfica foi realizada através da leitura de livros, artigos e dissertações com o propósito de buscar embasamento teórico sobre a Teoria de Análise de Erros, o Ensino de Trigonometria no Brasil, a História da Matemática e Atividades Investigativas.

Corroborando, dessa forma, a importância do uso da História da Matemática como ferramenta pedagógica no ensino e aprendizagem da Matemática, o uso da análise dos erros cometidos pelos estudantes como instrumento esclarecedor das dificuldades enfrentadas, proporcionando um replanejamento do processo de ensino e o uso das atividades investigativas como elemento de construção do conhecimento matemático.

3.2. Pesquisa de Campo

A pesquisa foi realizada com 43 alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro- campus Volta Redonda (IFRJ-VR), do 1º período do ano letivo de 2013.

Nenhum dos participantes da pesquisa foi identificado durante a coleta de dados e apresentação dos resultados. A pesquisa consistiu em três etapas:

Pré- teste (Apêndice 1, p.50): Foi aplicado uma avaliação com seis questões de trigonometria, nele não houve identificação dos alunos apenas uma numeração que seria repetida no pós-teste para análise da evolução dos conhecimentos dos participantes.

Após a aplicação do pré-teste, os erros cometidos pelos alunos foram analisados, caracterizados e classificados, a fim de ratificar a hipótese de que "há uma confusão na compreensão das relações entre lados, ângulos, unidades de medida e razões".

Proposta Metodológica (Apêndice 2, p.52): Com o referencial teórico, a análise, caracterização e classificação das respostas dadas pelos alunos, elaborou-se uma proposta metodológica, utilizando atividades investigativas, que visavam à melhoria da compreensão dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo.

Pós-Teste (Apêndice 3, p.58): Após a aplicação da proposta metodológica foi realizado uma segunda avaliação, com a finalidade de avaliar se a metodologia que desenvolvemos foi eficiente, respondendo assim a hipótese levantada inicialmente de que "as atividades investigativas poderão minimizar as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito das razões trigonométricas". Assim como no pré-teste, os alunos não foram identificados, apenas colocaram a numeração utilizada na avaliação anterior, possibilitando assim uma análise da evolução destes estudantes durante todo o processo.

Por fim, foi efetuada uma análise dos resultados da pesquisa, assim como as conclusões obtidas.

Apresentaremos a seguir uma análise dos resultados obtidos com esta proposta.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1. Análise Dos Erros Apresentados no pré-teste

Neste capítulo comentaremos a análise dos erros que realizamos no pré-teste feito pelos alunos.

Nas questões do teste foram abordadas as razões trigonométrica no triângulo retângulo, assim como suas aplicações.

Classificaremos os erros das seguintes maneiras:

- Erro de Conteúdo;
- Erro de Pré-Requisito;
- Erro por Distração;
- Erro de Interpretação; e
- Erro por "Chute".

Para primeira questão do teste (Apêndice 1, p.50) descrevemos "Determine o $\operatorname{sen}\theta$, o $\cos\theta$ e a $\tan\theta$ no triângulo retângulo abaixo", (figura 4).

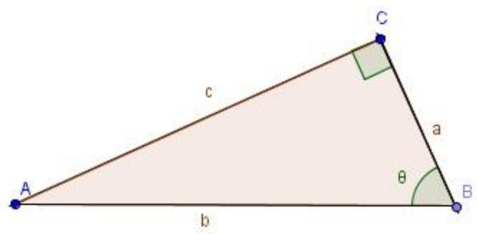


Figura 4- Triângulo Retângulo do exercício 1

Essa questão teve como objetivo verificar o conhecimento dos alunos na identificação dos lados do triângulo retângulo e o reconhecimento do seno como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, o cosseno como a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa e a tangente como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Os resultados obtidos foram:

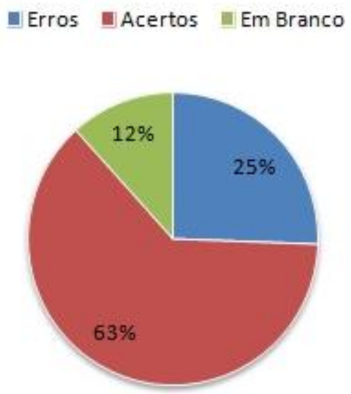


Gráfico 1- Análise da questão 1

Classificando os erros obtivemos o resultado abaixo:

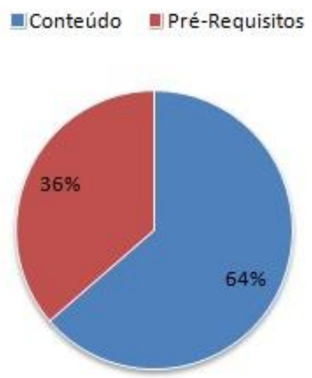


Gráfico 2- Análise dos erros questão 1

Como podemos observar 64% dos erros são por falta de conhecimento do conteúdo e 36% dos erros são de pré-requisito. Os alunos se confundiram ao escrever qual era o valor do Seno, do Cosseno e da Tangente de um determinado triângulo.

A solução do Aluno 4 (figura 5) apresentou o $sen\,\theta$ como a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente, $cos\,\theta$ como a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto *e a* $tan\,\theta$ como a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto. Esse tipo de erro está relacionado à falta de compreensão na definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo, indicando uma memorização de fórmulas corroborando com a hipótese de que a apresentação do tema é pouco contextualizada, focada na mecanização e memorização de fórmulas.

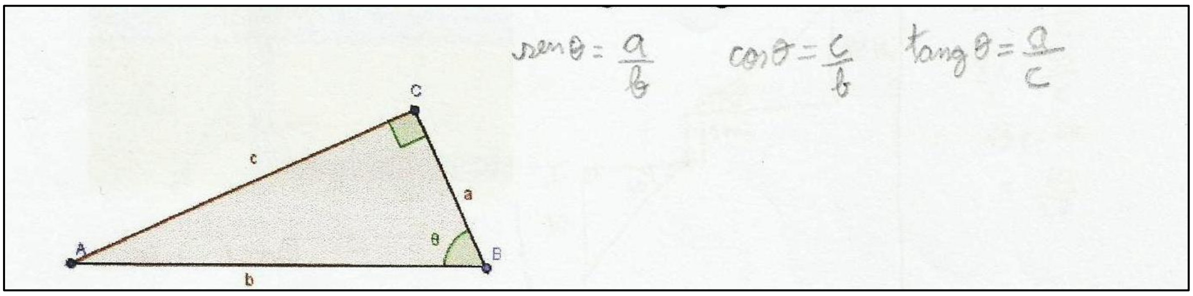


Figura 5- Questão 1 do aluno 4

Já a solução do aluno 22 (figura 6) atribui um valor ao cateto adjacente, sendo este valor um ângulo, e depois simplesmente divide esse valor pelos lados do triângulo. Esse erro confirma a hipótese levantada de que os alunos confundem as grandezas envolvidas: lados, ângulos e razões. Ele utilizou de um valor numérico enquanto na questão tínhamos apenas variáveis, classificamos este erro como de pré-requisito.

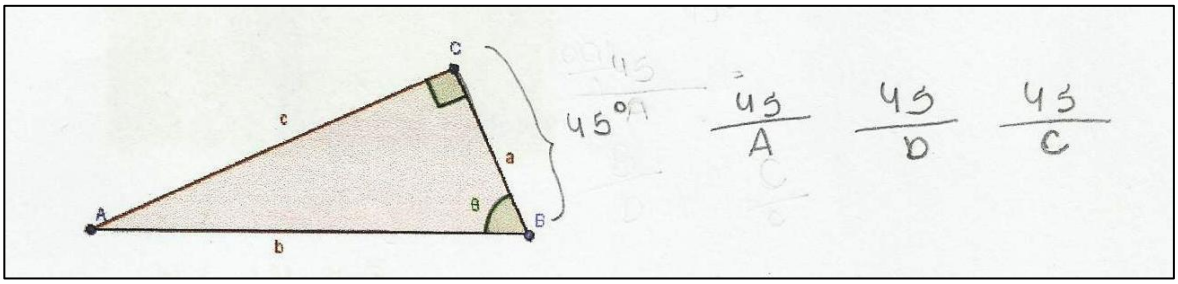


Figura 6- Questão 1 do aluno 22

Na segunda questão (Apêndice 1, p. 50), descrita por “Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma 30º com o solo. O comprimento do fio é de 100 metros. Qual a altura da pipa em metros em relação ao solo?” *o* objetivo é verificar se os alunos conseguem interpretar a situação problema e a partir desta, utilizar a razão seno para solucionar a questão. Os resultados obtidos nela são:

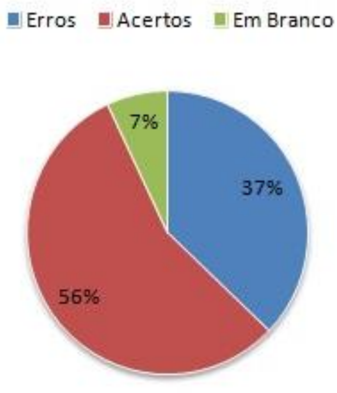


Gráfico 3- Análise da questão 2

Os erros encontrados foram classificados como:

Gráfico 4- Análise dos Erros da questão 2

Observando os resultados notamos que 44% dos erros foram classificados como de interpretação do enunciado, seguido por 31% dos erros como falta de conhecimento do conteúdo.

A solução do aluno 24 (figura 7) apresentou um erro de interpretação colocando o comprimento do fio no afastamento horizontal e depois errou também o conteúdo utilizando uma relação inexistente, em que a hipotenusa é igual à soma dos catetos, aparentemente queria utilizar o Teorema de Pitágoras, porém de maneira errada. Ele colocou como hipotenusa o valor do seno de 30°. Comprovando a nossa hipótese de que os alunos confundem as grandezas envolvidas: lados, ângulos e razões. Esses erros mostram que o aluno tem dificuldade na interpretação dos enunciados, dificuldade com os pré-requisitos e não compreendeu o significado da razão seno já que atribuiu esse valor à hipotenusa.

Os erros de interpretação comprovam a hipótese de que a apresentação do tema é pouco contextualizada, focada na mecanização e memorização de fórmulas. Assim quando os alunos se deparam com resolução de problemas não conseguem resolvê-los.

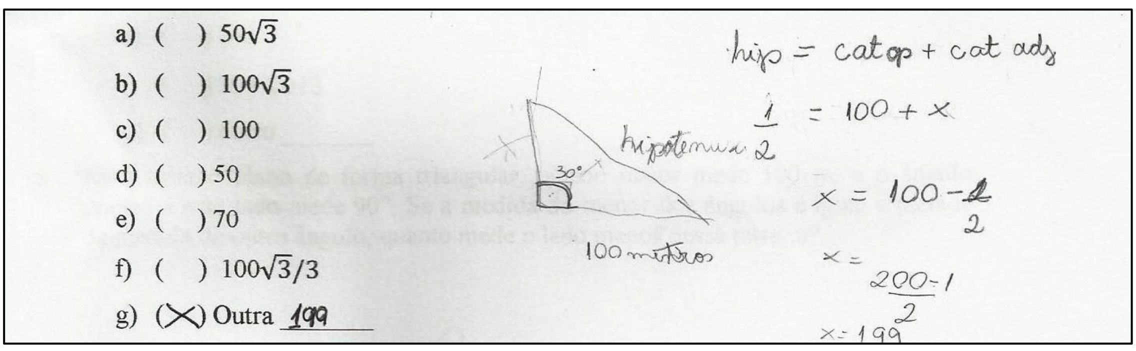


Figura 7- Questão 2 do aluno 24

Na solução do aluno 23 (figura 8) a razão cosseno foi utilizada como sendo o cateto oposto pela hipotenusa, ao invés de utilizar a razão seno, conforme previsto nas alternativas colocadas. Apontando que o aluno possui dificuldades ao identificar as razões no triângulo retângulo sendo, portanto um erro de conteúdo.

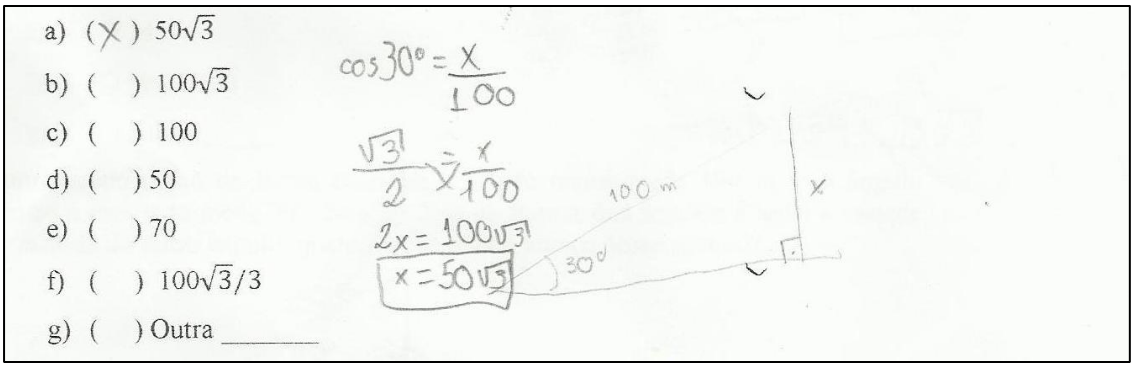


Figura 8- Questão 2 do aluno 23

Para questão número 3 (Apêndice 1, p.50), que coloca: “Caio está distante 40 metros da base de um poste de 30,4 metros de altura. Os olhos de Caio estão a x metros do plano horizontal e formam um ângulo de 36° com o topo do poste. Calcule o valor de x. (Use $\operatorname{sen} 36° = 0{,}58$; $\cos 36° = 0{,}81$ e $\tan 36° = 0{,}72$).”, o objetivo é verificar a compreensão com relação a razão tangente, assim como a interpretação do problema. Obtivemos os seguintes resultados:

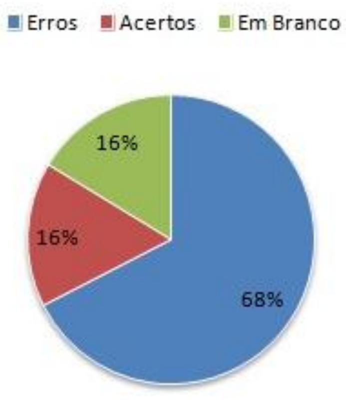


Gráfico 5- Análise da questão 3

E a classificação dos erros ficou da seguinte forma:

Gráfico 6- Análise dos Erros da questão 3

Nessa questão 90% dos erros foram classificados como sendo de interpretação. A solução do aluno 1 (figura 9) apresentou um resultado classificado assim, pois ele colocou a incógnita como sendo a hipotenusa do triângulo e deveria ser a distância dos olhos de Caio até o chão, este foi um erro muito comum entre os pesquisados. O aluno utilizou o cosseno corretamente, porém como errou na interpretação, encontrando assim um resultado errado. O valor encontrado por ele foi de 49,3 metros, não observando a impossibilidade desta resposta, haja vista que a ordem de grandeza deste número não atende a solucionabilidade do problema. Esse tipo erro destaca a dificuldade do estudante na interpretação de questões.

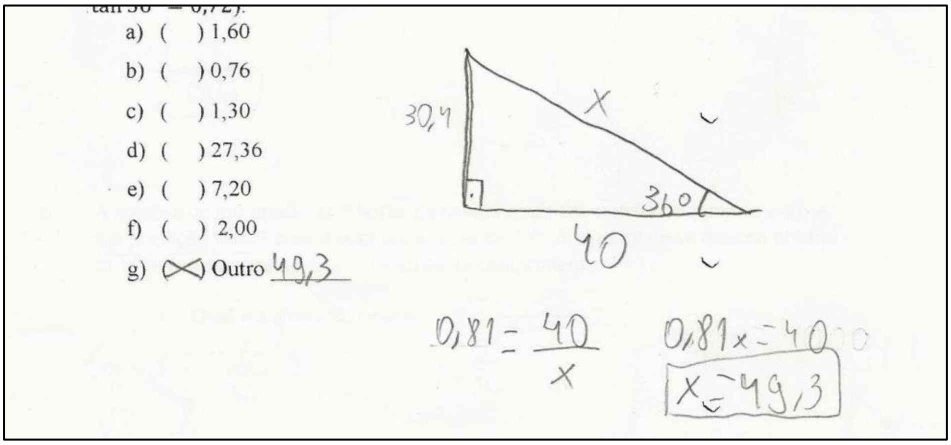
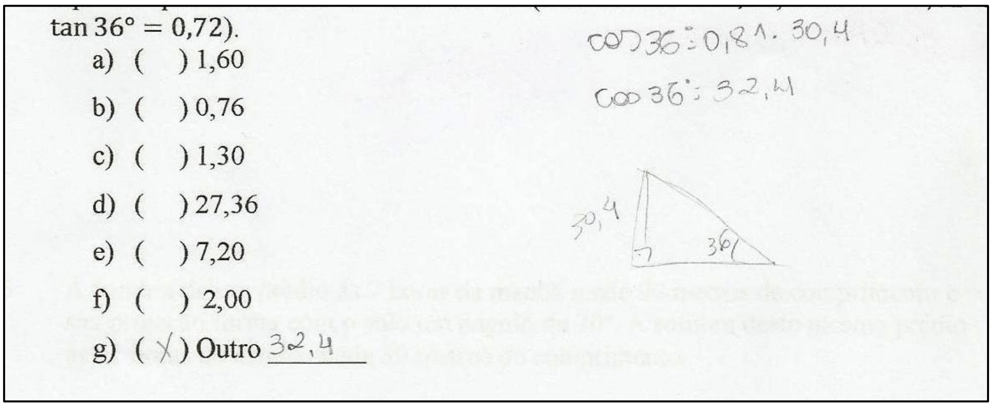


Figura 9- Questão 3 do aluno 1

A solução que o aluno 12 (figura 10) apresentou, descreve cosseno de 36° como sendo a multiplicação do seu valor pelo cateto oposto. Esse erro mostra que o aluno desconhece como determinar o cosseno de um ângulo. Sendo assim um erro de conteúdo.


tan 36° = 0,72).

a) ( ) 1,60

b) ( ) 0,76

c) ( ) 1,30

d) ( ) 27,36

e) ( ) 7,20

f) ( ) 2,00

g) (X) Outro 32,4

Figura 10- Questão 3 do aluno 12

Na questão 4 , temos o seguinte enunciado:

> Deseja-se construir uma estrada ligando as cidades A e B, separadas por um rio de margens paralelas, como no desenho a seguir:
> Sabe-se que a cidade A está distante 30 km da margem do rio, a B está a 18 km da margem do rio e a ponte tem 3 km de extensão. Qual é a menor distância de A até B pela ponte? (APÊNDICE 1, p.51)

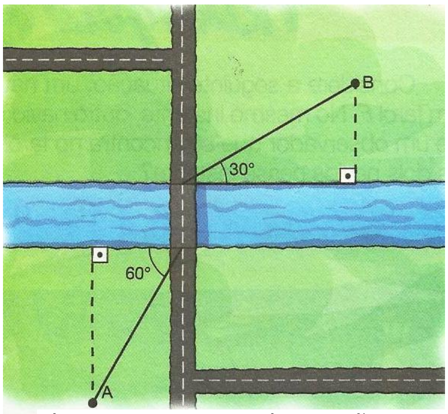


Figura 11- Esquema da questão 4

Essa questão tinha como objetivo, a utilização da razão seno, assim como analisar e interpretar o problema. Encontramos os seguintes resultados:

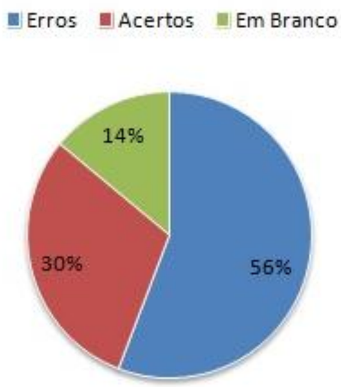


Gráfico 7- Análise da questão 4

Analisando os erros encontramos:

Gráfico 8- Análise dos Erros da questão 4

Nessa questão observamos que 54% dos erros apresentados foram de pré-requisito seguido dos 21% como erros de conteúdo e 21% de interpretação.

Analisando a figura 12, solução do aluno 1, pode-se observar que ele cometeu um erro de pré-requisito, pois utilizou corretamente a razão seno, e também entendeu o que o problema solicitava, porém usou equivocadamente a operação de adição quando somou ao número 39 o fator 20 da multiplicação por $\sqrt{3}$, conforme previsto nas alternativas colocadas.

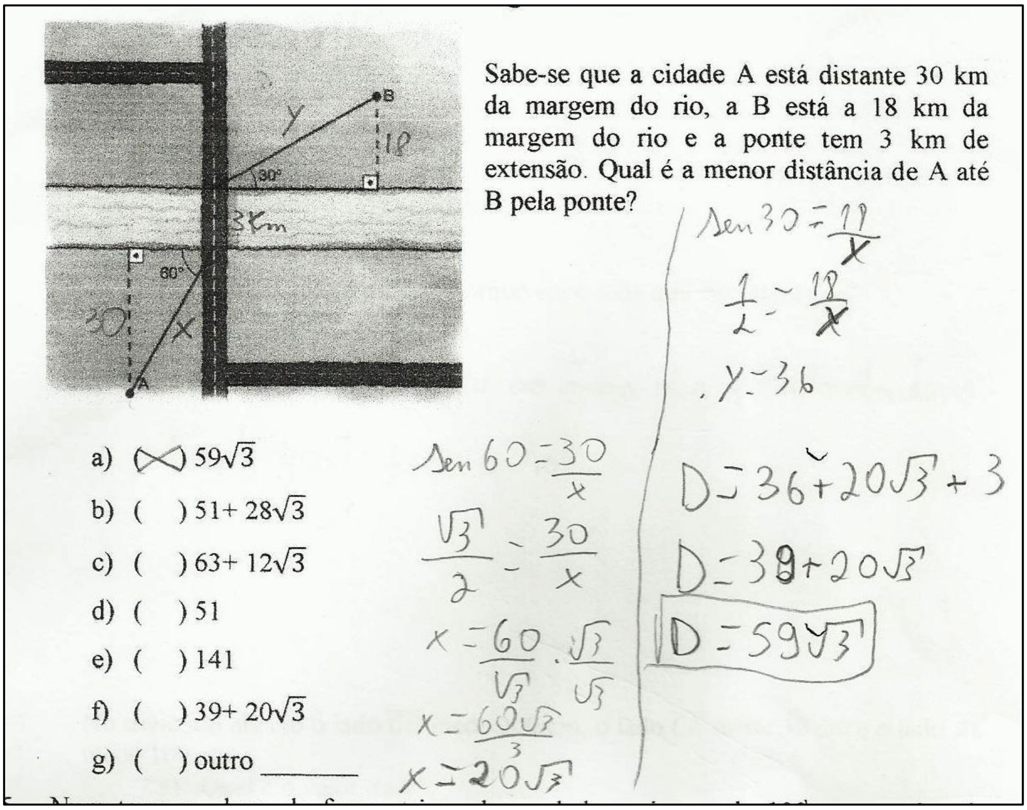


Figura 12- Questão 4 do aluno 1

Na solução do aluno 17 (figura 13), ele criou um novo triângulo retângulo que ligava a cidade A na cidade B, utilizou tangente, a de 30° com valor incorreto e a de 60° com valor correto, para encontrar os catetos do triângulo, porém não interpretou corretamente o problema que pedia a menor distância passando pela ponte, a solução apresentada por ele passa por dentro do rio, portanto um erro de interpretação.

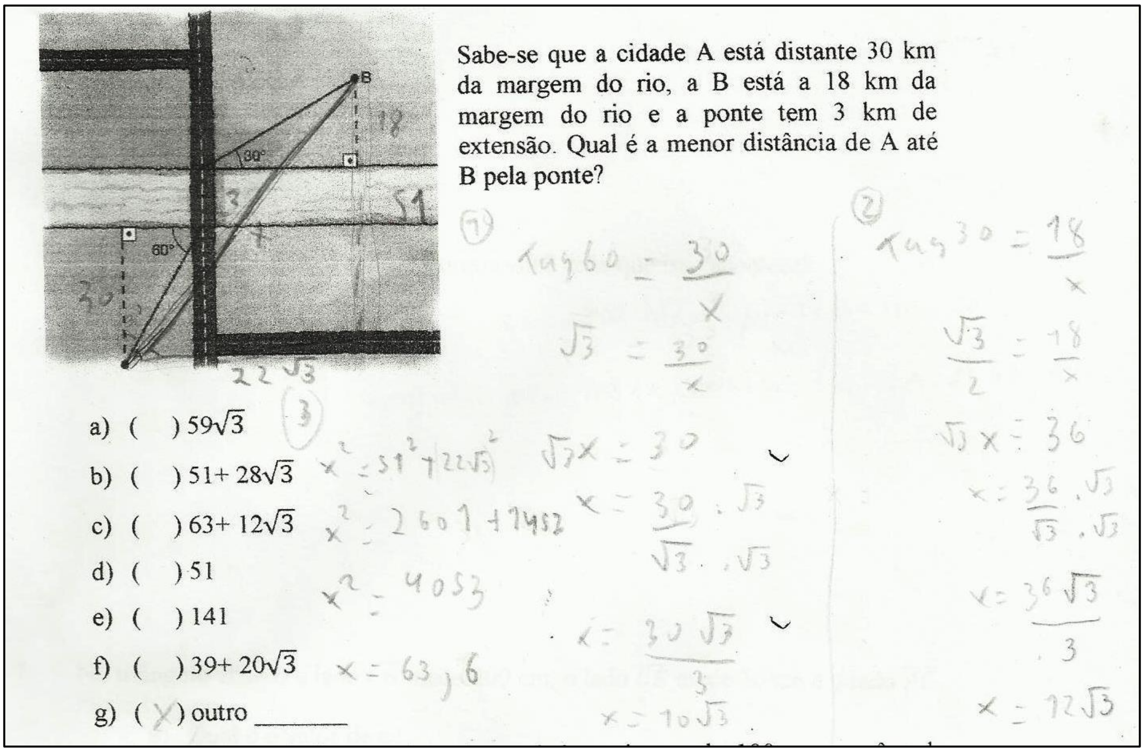


Figura 13-Questão 4 do aluno 17

Na questão 5, foi apresentado o seguinte problema

> Num terreno plano de forma triangular, o lado maior mede 100 m, e o ângulo oposto a esse lado mede 90°. Se a medida do menor dos ângulos é igual a metade da medida do outro ângulo, quanto mede o lado menos desse terreno? (APÊNDICE 1, p. 51)

O objetivo dessa questão era analisar se os alunos conseguiam interpretar o problema, usar a propriedade da soma dos ângulos agudos de triângulo retângulo e encontrar a solução a partir das razões trigonométricas. Temos a seguinte análise:

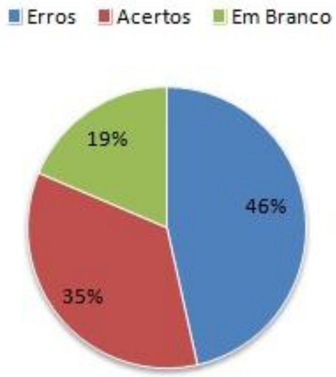


Gráfico 9- Análise da questão 5

Classificando os erros chegamos a conclusão que 60% deles foram categorizados como pré-requisitos, vejamos o gráfico abaixo.

Gráfico 10- Análise dos Erros da questão 5

Analisando a solução apresentada pelo aluno 13 (figura 14) percebemos que ele cometeu um erro de pré-requisito e interpretação, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° ele supôs que os outros dois ângulos seriam de 45°, não levando em consideração os dados do problema de que um ângulo era o dobro do outro.

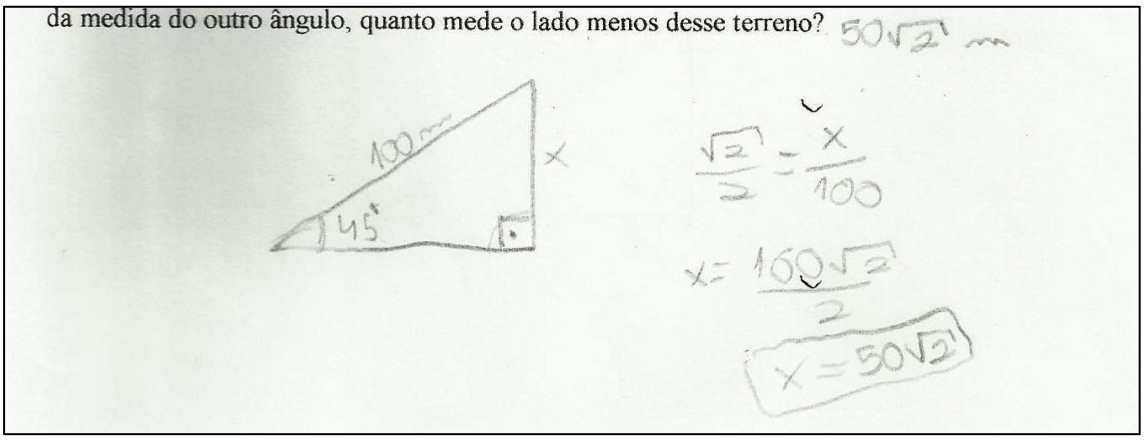


Figura 14- Questão 5 do aluno 13

Na solução do aluno 26 (figura 15) percebemos um acerto ao encontrar a medida dos ângulos do triângulo, mas cometeu um erro de pré-requisito quando usou razão e proporção para resolver o problema. Ele relacionou o lado do triângulo com o ângulo oposto a ele. Comprovando novamente a nossa hipótese de que os alunos confundem as grandezas envolvidas: lados, ângulos e razões.

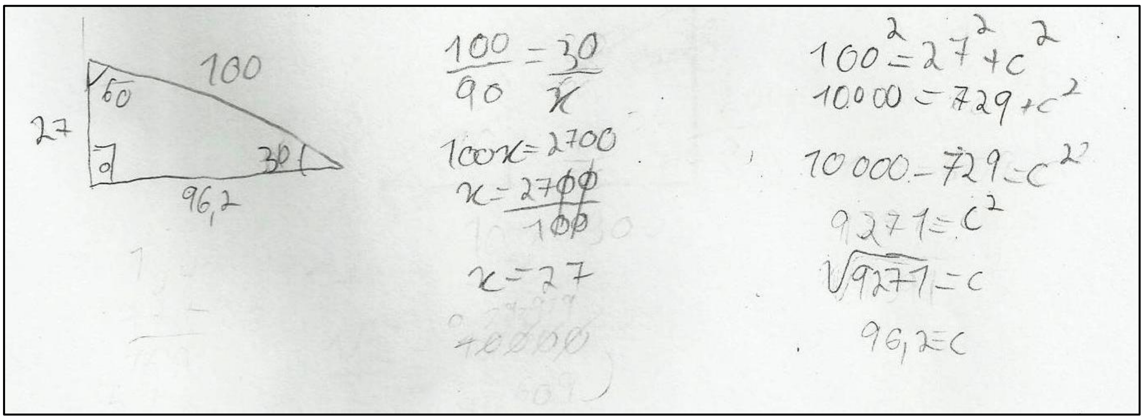


Figura 15- Questão 5 do aluno 26

Na questão 6, temos o seguinte problema:

> A sombra de um prédio às 9 horas da manhã mede 90 metros de comprimento e sua projeção forma com o solo um ângulo de 30º. A sombra deste mesmo prédio às 11 horas da manhã mede 30 metros de comprimento. a) Qual é a altura do prédio? (APÊNDICE 1, p. 51).

O objetivo dessa questão era analisar a interpretação dos alunos e a utilização da razão.

Analisando a questão 6, item *a* encontramos:

Gráfico 11- Análise da questão 6 letra a

Classificando os erros obtivemos:

Gráfico 12- Análise dos Erros da questão 6 letra a

Como podemos ver 50% dos erros foram classificados como de conteúdo, 39% de interpretação e 11% de pré-requisito.

O aluno 22 não conseguiu compreender o que estava sendo pedido na questão, pois analisando sua solução (figura 16) percebemos que ele apenas multiplicou o número de horas do dia pelo ângulo. Mostrando que ele tem dificuldades em relacionar medidas e não compreendeu muito bem o conteúdo. Caracterizando assim como um erro de interpretação e um erro de conteúdo.

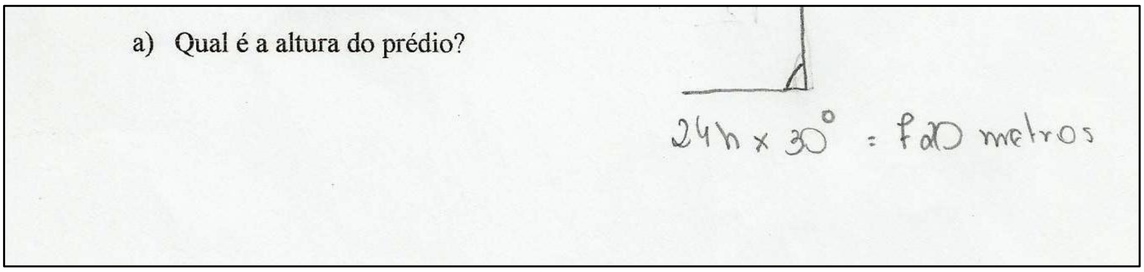


Figura 16- Questão 6 letra a do aluno 22

A solução do aluno 15 (figura 17), destaca erros de interpretação e conteúdo. Ao invés de colocar a sombra do prédio no afastamento horizontal (chão), ele colocou na hipotenusa. Além disso, utilizou de maneira equivocada o seno de 60° mostrando que não compreendeu muito bem o seu significado.

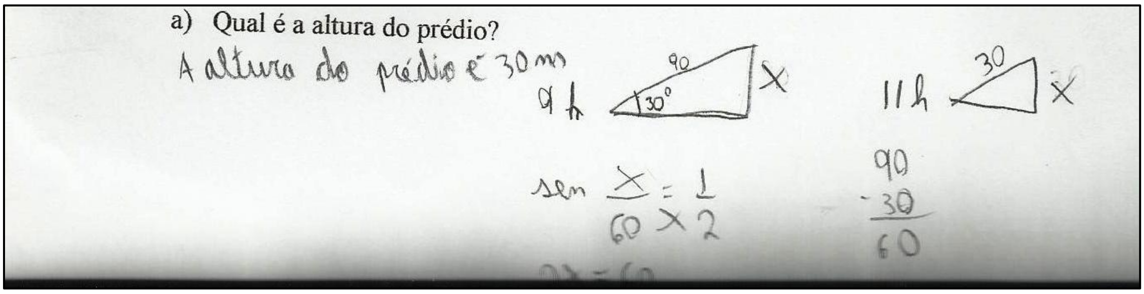


Figura 17- Questão 6 letra a do aluno 15

No item b desta mesma questão foi questionado “Qual é o ângulo formado pela projeção da segunda sombra com o solo?”.

O objetivo deste item é verificar se o aluno consegue fazer o processo inverso, ou seja, ao invés de determinar medidas de lados a partir dos ângulos, encontrar ângulos a partir da medida dos lados.

Avaliando este item encontramos:

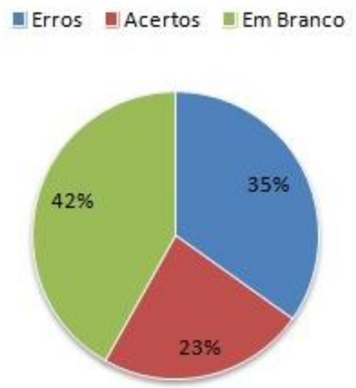


Gráfico 13- Análise da questão 6 letra b

Caracterizando os erros temos:

Gráfico 14- Análise dos Erros da questão 6 letra b

Observando o gráfico 14 percebemos que 40% dos alunos cometeram erros classificados como de conteúdo, 27% de pré requisito, 20% de interpretação e 13% “chutaram” uma resposta.

Na solução do aluno 2 (figura 18), verificamos que houve um erro de pré-requisito, haja vista que ele usou uma relação de grandezas diretamente proporcionais, dizendo que se o lado é a metade do outro, então o ângulo também será. Além de usar erradamente a proporcionalidade, ainda errou ao dizer que 30m é a metade de 90m.

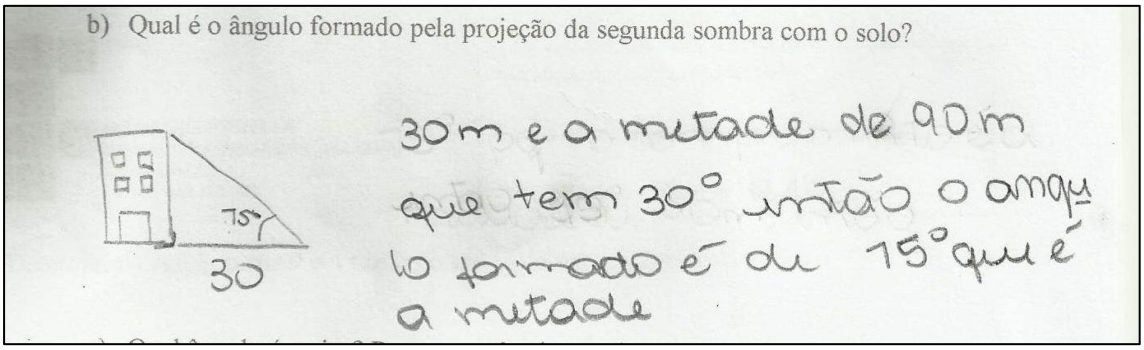


Figura 18- Questão 6 letra b do aluno 2

Na solução do aluno 20 (figura 19) é possível verificar um erro de interpretação, pois ele colocou a sombra do prédio como sendo a hipotenusa, mas com relação ao conteúdo agiu corretamente.

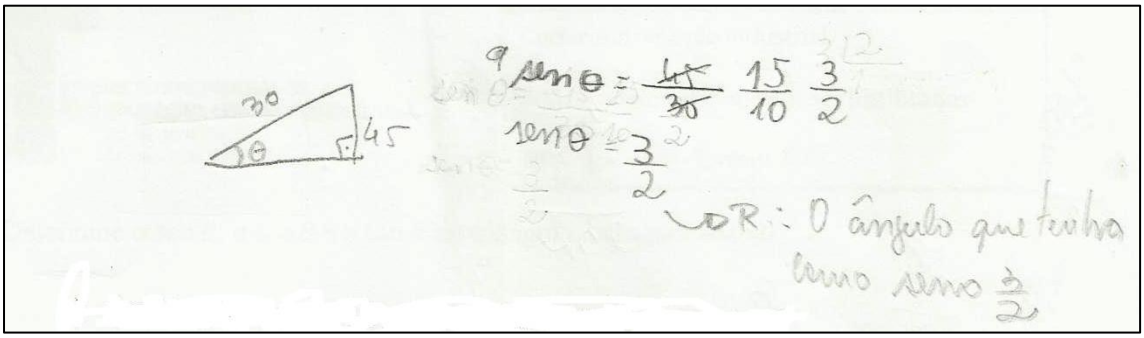


Figura 19- Questão 6 letra b do aluno 20

Em resumo a classificação geral dos erros ficou da seguinte forma:

	Erros(%)				
	Conteúdo	Pré-requisito	Distração	Interpretação	“Chute”
Questão 1	64	36	0	0	0
Questão 2	31	13	6	44	6
Questão 3	3	7	0	90	0
Questão 4	21	54	21	21	4
Questão 5	20	60	5	10	5
Questão 6 letra a	50	11	0	39	0
Questão letra b	40	27	0	20	13
Média dos erros	32,7	29,7	4,6	32,0	4,0

Tabela 1- Média dos Erros Cometidos pelos Alunos

Como podemos observar na tabela acima, a maior média ocorreu nos erros de conteúdo 32,7%, seguida pelos erros de interpretação 32,0% e pré-requisitos 29,7%.

Após o pré-teste elaboramos e aplicamos algumas atividades investigativas (apêndice 2, p. 52), a fim de minimizar as dificuldades apresentadas.

4.2. Atividades Investigativas

Nesta unidade iremos descrever brevemente a proposta metodológica (apêndice 2, p.52) desenvolvida com os estudantes após a aplicação do pré-teste. Esta é baseada na teoria de Atividades Investigativas. A proposta foi desenvolvida em quatro momentos. No primeiro os alunos realizaram atividades investigativas objetivando conjecturar que a razão entre os lados homólogos de triângulos semelhantes se conservam. Para primeira atividade tínhamos: “Observe os triângulos abaixo: Com o auxílio de um transferidor meça o ângulo α, qual é o seu valor? Agora utilizando a régua, meça os lados e calcule as razões indicadas:”.

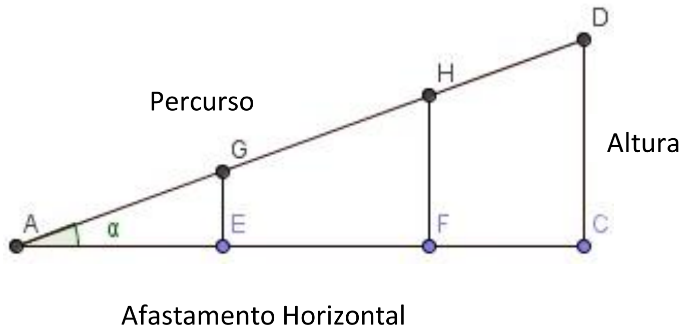


Figura 20- Triângulo Atividade 1

a) $\frac{\overline{GE}}{\overline{AG}}$ = b) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}}$ = c) $\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}}$ =

d) $\frac{\overline{HF}}{\overline{AH}}$ = e) $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}}$ = f) $\frac{\overline{HF}}{\overline{AF}}$ =

g) $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$ = h) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ = i) $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ =

Espera-se com esta atividade que o estudante realize as medições com régua e transferidor, perceba que o ângulo α, que mede 20°, é comum aos triângulos AGE, AHF e ADC, note que a medida dos lados homólogos são diferentes, porém as razões entre os lados homólogos conservam-se. Chegando a conclusão que em triângulos semelhantes a razão entre os lados homólogos são iguais, logo podemos relacionar os ângulos com as razões, prática fundamental para o desenvolvimento da trigonometria.

Dando continuidade a atividade, solicitamos ao aluno que "Encontre as mesmas razões para o ângulo de 70°:", a fim de que ele perceba que 70° é o complemento de 20° e que algumas razões são inversas, isto é, seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar, nesta etapa ainda não usamos as palavras seno e cosseno.

Em seguida apresentamos o seguinte exercício "Uma rampa lisa de 10m de comprimento faz ângulo de 20º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente? ".

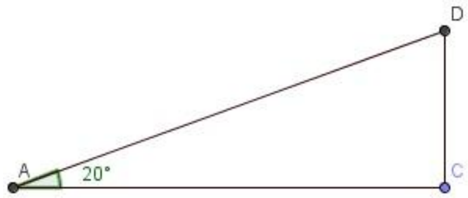


Figura 21- Triângulo Exercício

O ângulo da figura foi fixado em 20°, mesmo que da atividade anterior, essa questão tinha como objetivo fazer com que os alunos compreendessem que existe uma relação entre o ângulo e as razões entre os lados de triângulos semelhantes e que, não importando o tamanho do triângulo, se o ângulo for o mesmo os valores das razões não se alteram. A ideia é que o aluno aproveite as razões encontradas na atividade anterior para solucionar este exercício.

No segundo momento foi apresentada uma atividade (apêndice 2, p.53) em que a turma foi dividida em grupos, cada um recebendo uma folha com um triângulo impresso: o primeiro grupo recebeu um triângulo com ângulo agudo medindo 10º, o segundo um triângulo com ângulo agudo medindo 20º, o terceiro um triângulo com ângulo agudo medindo 30º, e assim sucessivamente até o ângulo de 80°, com o auxílio da régua extraíram a medida dos lados do triângulo recebido, com a calculadora determinaram os valores aproximados das razões seno, cosseno e tangente e, em seguida, montaram uma tabela trigonométrica trocando entre os grupos as folhas com as razões calculadas.

No terceiro momento os alunos realizaram atividades com um “Teodolito Caseiro” (Apêndice 4, p.60), eles foram para o pátio da escola, e solucionaram dois problemas propostos. No primeiro o aluno deveria escolher algum ponto de referência como, por exemplo, a altura de uma árvore e determinar sua altura. Na segunda atividade eles deveriam resolver o seguinte problema, imagine que há um rio entre você e o prédio da escola como você faria para descobrir sua largura, justifique sua resposta e desenhe o esquema que escolheu. Sendo possível eles poderiam utilizar a tabela trigonométrica desenvolvida por eles, caso contrário utilizamos uma tabela trigonométrica com ângulos de 1° a 89°.

Essas atividades utilizaram como inspiração a História da Matemática e tinham como objetivo fazer com que os alunos percebessem a utilidade das razões trigonométricas em problemas reais. A História da Matemática serviu como motivadora para a criação da atividade, através dela os alunos perceberam como eram realizadas medições no passado, por exemplo, encontrar alturas. Tivemos o cuidado de não ficar presos a datas e a fatos para que os alunos não pensassem que seria mais uma coisa para decorar. Os alunos puderam observar que a matemática não surgiu do nada e sim de necessidades do cotidiano.

Por último, em um quarto momento, formalizamos os conceitos de Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, através da tradicional exposição oral com “quadro e giz”. Determinamos as razões dos ângulos notáveis, de maneira geométrica e resolvemos os exercícios propostos (apêndice 2, p.56) para fixação do conteúdo, utilizando a tabela construída por eles.

Para analisar a evolução destes alunos após a proposta metodológica, apresentaremos, na unidade seguinte, uma comparação entre os resultados do pré-teste e do pós-teste aplicado após as atividades investigativas. As questões eram as mesmas do teste anterior, conforme descrito no capítulo 4.1 deste trabalho, porém com valores diferentes.

4.3. Evolução dos Alunos após Aplicação das Atividades Investigativas

O pós-teste tinha como objetivo avaliar a evolução dos alunos com relação ao pré-teste e não mais fazer uma análise dos erros. Ele continha as mesmas questões do pré-teste apenas com valores trocados. Analisando-o encontramos os resultados mostrados a seguir.

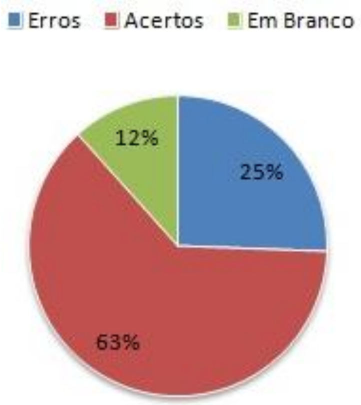


Gráfico 15- Questão 1 pré-teste

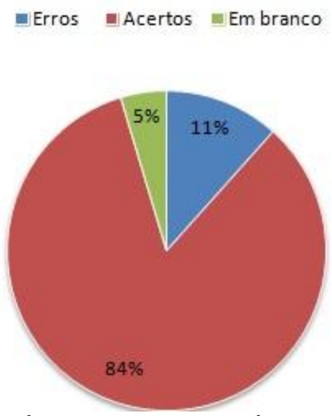


Gráfico 16- Questão 1 pós-teste

Como podemos observar na primeira questão houve uma evolução dos acertos de 63% para 84%.

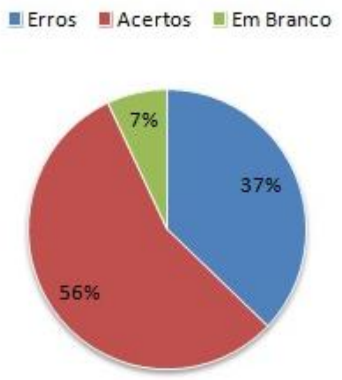


Gráfico 17- Questão 2 pré-teste

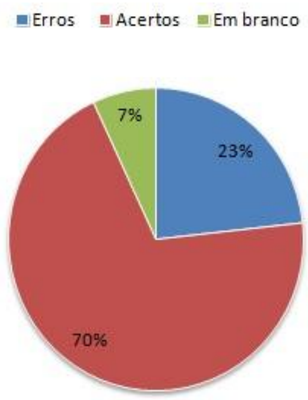


Gráfico 18- Questão 2 pós-teste

Na segunda questão houve uma melhora 14%, onde os acertos passaram de 56% para 70%.

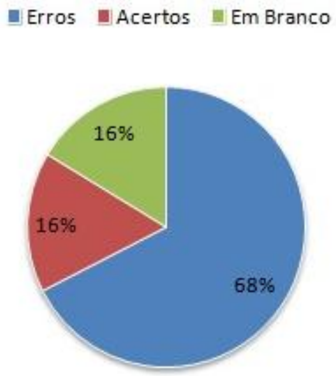


Gráfico 19- Questão 3 pré-teste

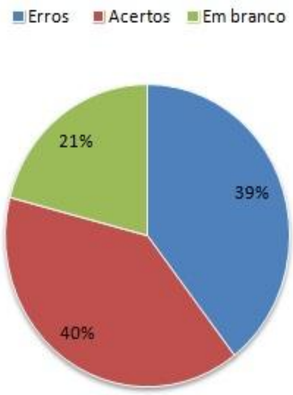


Gráfico 20- Questão 3 pós-teste

Observando a terceira questão encontramos uma evolução dos acertos de 16% para 40%.

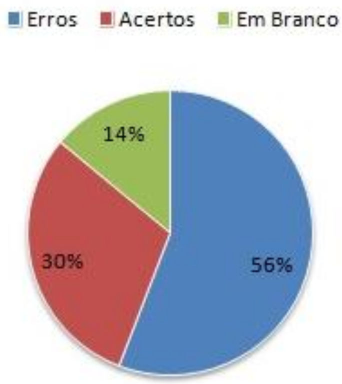


Gráfico 21- Questão 4 pré-teste

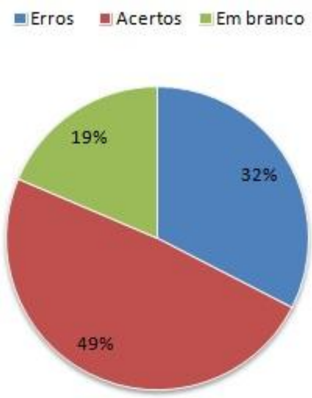


Gráfico 22- Questão 4 pós-teste

Na quarta questão foi obtida uma melhora de 19%, em que os acertos passaram de 30% para 49%.

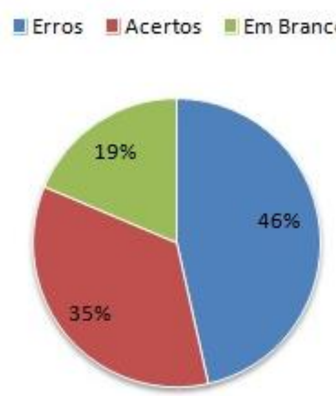


Gráfico 23- Questão 5 pré-teste

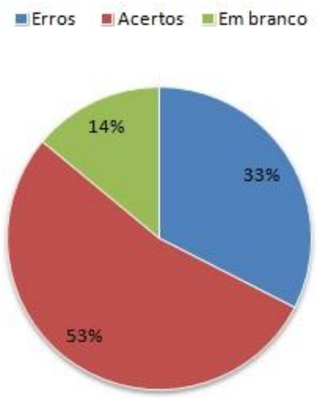


Gráfico 24- Questão 5 pós-teste

Na quinta questão observamos uma evolução dos acertos de 35% para 53%.

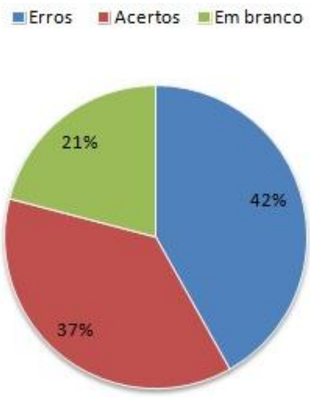


Gráfico 25- Questão 6 letra a pré-teste

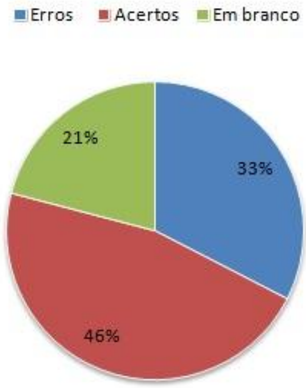


Gráfico 26- Questão 6 letra a pós-teste

Na sexta questão no item a encontramos uma evolução dos acertos de 37% para 46%.

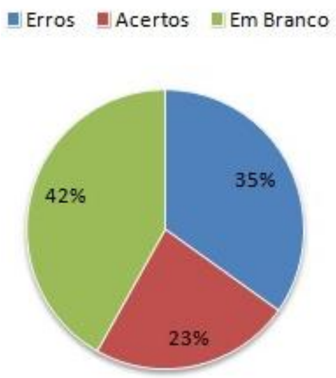


Gráfico 27- Questão 6 letra b pré-teste

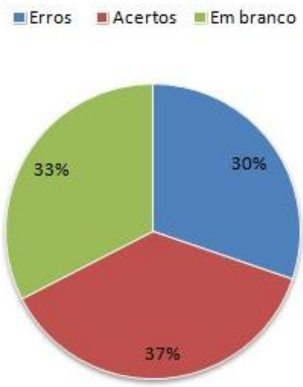


Gráfico 28- Questão 6 letra b pós-teste

	Pré-Teste(%)			Pós-Teste(%)		
	Acertos	Erros	Em Branco	Acertos	Erros	Em Branco
Questão 1	63	25	12	84	11	5
Questão 2	56	37	7	70	23	7
Questão 3	16	68	16	40	39	21
Questão 4	30	56	14	49	32	19
Questão 5	35	46	19	53	33	14
Questão 6 letra a	37	42	21	46	33	21
Questão 6 Letra b	23	35	42	37	30	33

E por fim na sexta questão item b observamos uma evolução nos acertos de 23% para 37%.

Como podemos observar em todas as questões houve uma melhora no rendimento dos alunos após a aplicação da proposta metodológica. É relevante destacar que houve questões deixadas em branco e alguns erros cometidos, foram em função da não memorizaram os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis. Podemos observar este fato no pós-teste do aluno 3 e do aluno 21, que escreveram:

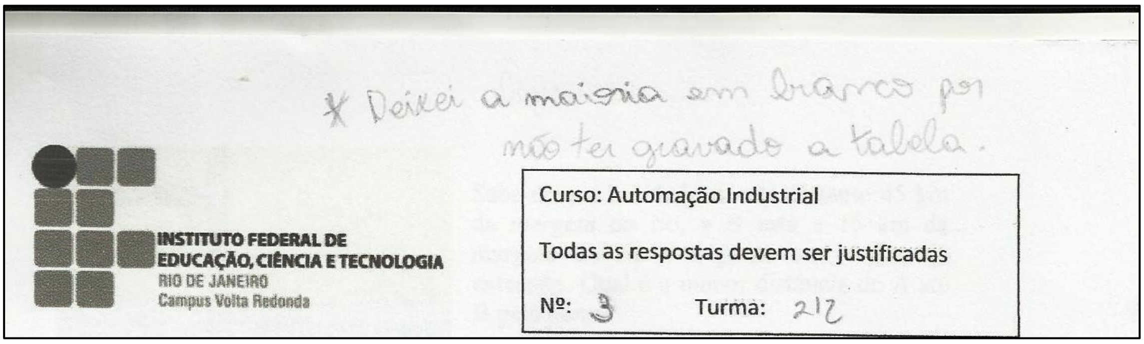
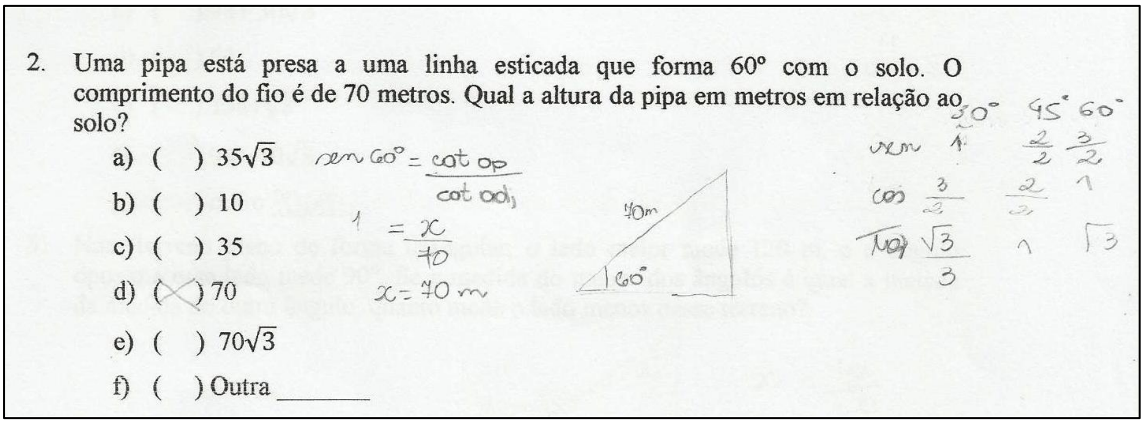


Figura 22-Recado deixado no pós-teste pelo aluno 3



2. Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma 60º com o solo. O comprimento do fio é de 70 metros. Qual a altura da pipa em metros em relação ao solo?

a) ( ) $35\sqrt{3}$

b) ( ) 10

c) ( ) 35

d) (X) 70

e) ( ) $70\sqrt{3}$

f) ( ) Outra _______

Figura 23- Tabela feita pelo aluno 21 no pós-teste

5. CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento deste trabalho cumprimos o objetivo de analisar as principais dificuldades dos alunos no ensino de trigonometria.

Foi aplicado o pré-teste, as atividades e o pós-teste, com esses dados em mãos realizou-se o objetivo de classificar os erros cometidos pelos alunos no ensino de trigonometria, com base na teoria de Análise de Erros e o de analisar as principais dificuldades dos alunos no ensino de trigonometria.

Esta análise expôs alguns aspectos relevantes sobre o ensino das razões trigonométricas e por meio deles podemos responder algumas hipóteses levantadas, como por exemplo, a de que os alunos confundem as grandezas envolvidas: lados, ângulos e razões.

Observou-se também um grande número de erros por interpretação, respondendo a hipótese de que a apresentação do tema é pouco contextualizada, focada na mecanização e memorização de fórmulas.

Cumprimos o objetivo de avaliar a evolução dos alunos após a aplicação da atividade. E através dessa avaliação concluímos que houve uma melhora no rendimento dos alunos após a realização da proposta metodológica o que confirma a veracidade da hipótese de que as atividades investigativas podem minimizar as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito das razões trigonométricas.

Um número grande de erros no pós-teste, deu-se pela não memorização da tabela com os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis. Como sugestão de aplicação da proposta metodológica em novas turmas, o oferecimento destes valores como consulta é viável. Observando este fato comprovamos que com a análise de erros foi possível replanejar as metodologias usadas com a finalidade de minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Conseguimos assim realizar todos os objetivos com que nos propomos no inicio desta pesquisa. Analisando os principais erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas envolvendo a razões trigonométricas. Classificamos e caracterizamos os erros cometidos pelos alunos no ensino de trigonometria, com base na teoria de Análise de Erros; discutimos a importância da História da Matemática para o ensino da trigonometria; propusemos atividades investigativas que auxiliem na compreensão dos conceitos; e avaliamos a evolução dos alunos após a aplicação da atividade.

Esperamos que este trabalho seja de grande valia para os profissionais e pesquisadores em Educação Matemática interessados na utilização das teorias de Análise de Erros e Atividades Investigativas, tanto em sala de aula como em produções científicas.

.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASTOS, Antonio Sergio Abrahão Monteiro e ALLEVATO, Norma Suely G. ***Análise de erros: das repercussões no processo de aprendizagem***. Revista Prod. Disc. Educ. Matem., São Paulo, v.1, n.1, pp.138-139, 2012.

BRASIL. ***Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Fundamental***. Brasília: MEC,1997.

BRASIL. ***Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio***. Brasília: MEC,2000.

BRASIL. ***Orientações Curriculares para o Ensino Médio***. Brasília: MEC,2006.

CAMPOS, Tânia M. M. & NUNES, Terezinha. ***Tendências Atuais do Ensino e Aprendizagem da Matemática***. Revista em Aberto, Brasil, v. 62, n.14, p. 03-07, 1994.

COSTA, Daniel dos Santos. ***Astronomia e Trigonometria: as cordas de Ptolomeu***. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/DanieldosSantosCosta.pdf> Acesso em: 04.maio.2012

COSTA, Nielce. M. Lobo da. A História da Trigonometria. Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 60 - 69, 01 mar. 2003.

Cury, H. N. (2007). ***Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.*** Belo Horizonte: Autêntica.

D'AMBROSIO, Beatriz. ***Como ensinar matemática hoje?.*** Disponível em: < http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 3.maio.2012.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luis Pereira;CRISTOVÃO, Eliane Matesco**,** (2004). ***Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.*** Projeto de pesquisa desenvolvido com auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

MENDES, I. A. ***A Trigonometria e seu Ensino: alguns fragmentos dessa História***. 2002. (Apresentação de Trabalho/Comunicação).

MORAES, Roque. ***Análise de conteúdo***. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOTTA, Adilson. ; AMORIN, Marlene Pires . ***O Lado Positivo do Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática no Terceiro Ano do Ensino Médio.*** Omnes Humanitate - Revista da Esab, v. 01, p. 163-175, 2011.

PONTE, João Pedro da. BOCARDO, Joana. OLIVEIRA, Hélia. ***Investigação matemáticas na sala de aula***. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. 160 p.

SOUZA, C. A.; VICTER, E.F. ; LOPES, J. R. . ***O Uso Da História Da Trigonometria como Facilitador da Aprendizagem das Funções Seno e Cosseno***. Aprendizagem Significativa em Revista, v. 3, p. 56-70, 2013.

Um pouco da História da Trigonometria. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm> Acesso em: 15.maio.2012

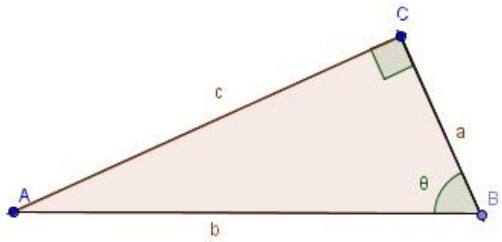
Apêndice 1 – Pré teste

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

Curso: Automação Industrial

Todas as respostas devem ser justificadas

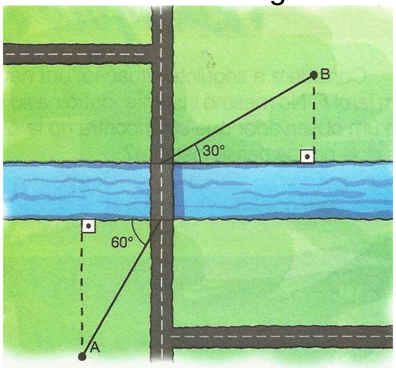
1. Determine o $\text{sen}\,\theta$, o $\cos\theta$ e a $\tan\theta$ no triângulo retângulo abaixo:



2. Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma 30º com o solo. O comprimento do fio é de 100 metros. Qual a altura da pipa em metros em relação ao solo?
   a) ( ) $50\sqrt{3}$
   b) ( ) $100\sqrt{3}$
   c) ( ) 100
   d) ( ) 50
   e) ( ) 70
   f) ( ) $100\sqrt{3}/3$
   g) ( ) Outra _______

3. Caio está distante 40 metros da base de um poste de 30,4 metros de altura. Os olhos de Caio estão a x metros do plano horizontal e formam um ângulo de 36° com o topo do poste. Calcule o valor de x. (Use $\text{sen}\,36° = 0{,}58$; $\cos 36° = 0{,}81$ e $\tan 36° = 0{,}72$).
   a) ( ) 1,60
   b) ( ) 0,76
   c) ( ) 1,30
   d) ( ) 27,36
   e) ( ) 7,20
   f) ( ) 2,00
   g) ( ) Outro _______

4. Deseja-se construir uma estrada ligando as cidades A e B, separadas por um rio de margens paralelas, como no desenho a seguir:



Sabe-se que a cidade A está distante 30 km da margem do rio, a B está a 18 km da margem do rio e a ponte tem 3 km de extensão. Qual é a menor distância de A até B pela ponte?

a) (   ) $59\sqrt{3}$

b) (   ) $51+ 28\sqrt{3}$

c) (   ) $63+ 12\sqrt{3}$

d) (   ) 51

e) (   ) 141

f) (   ) $39+ 20\sqrt{3}$

g) (   ) outro _______

5. Num terreno plano de forma triangular, o lado maior mede 100 m, e o ângulo oposto a esse lado mede 90°. Se a medida do menor dos ângulos é igual a metade da medida do outro ângulo, quanto mede o lado menos desse terreno?

6. A sombra de um prédio às 9 horas da manhã mede 90 metros de comprimento e sua projeção forma com o solo um ângulo de 30º. A sombra deste mesmo prédio às 11 horas da manhã mede 30 metros de comprimento.

a) Qual é a altura do prédio?

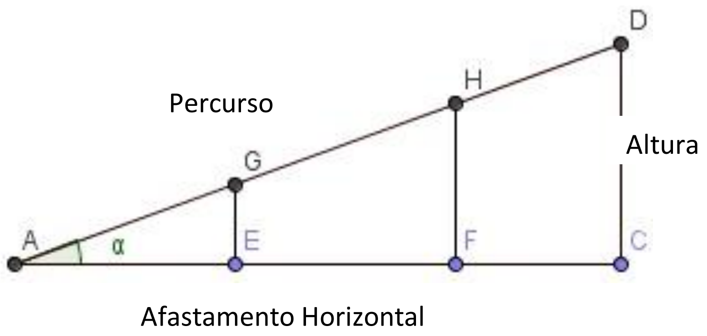
b) Qual é o ângulo formado pela projeção da segunda sombra com o solo?

Apêndice 2 – Proposta Metodológica

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

Curso: Automação Industrial

Observe os triângulos abaixo:



Com o auxílio de um transferidor meça o ângulo α, qual é o seu valor?

Agora utilize a régua encontre as razões abaixo:

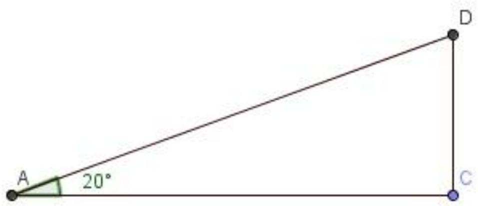
a) $\frac{\overline{GE}}{\overline{AG}} =$ b) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} =$ c) $\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} =$

d) $\frac{\overline{HF}}{\overline{AH}} =$ e) $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} =$ f) $\frac{\overline{HF}}{\overline{AF}} =$

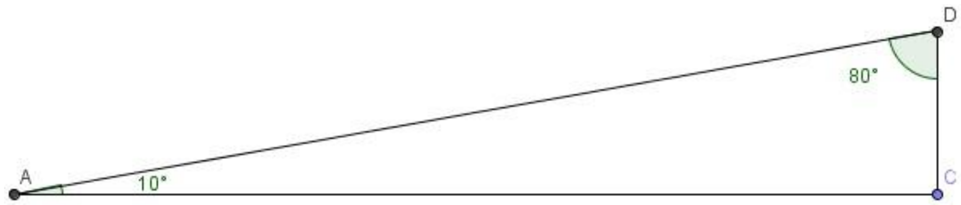
g) $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} =$ h) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} =$ i) $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} =$

Encontre as mesmas razões para o ângulo de 70°:

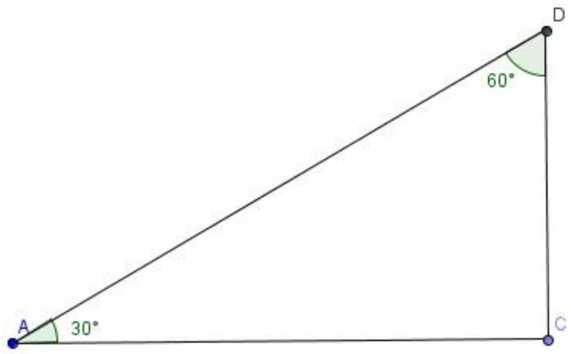
Exercício: Uma rampa lisa de 10m de comprimento faz ângulo de 20º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente?



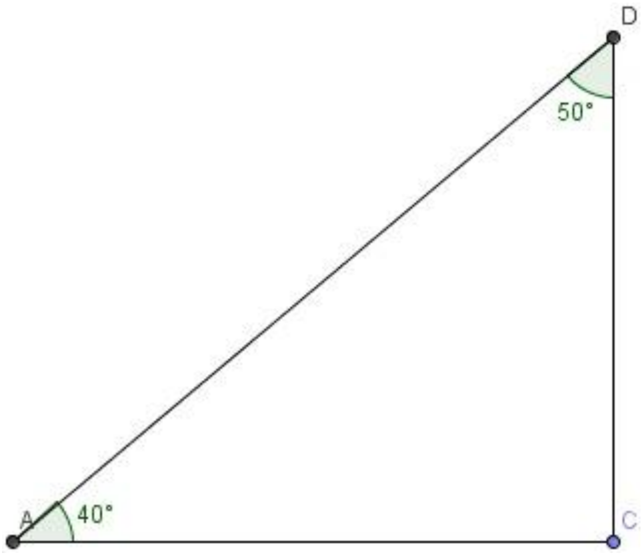
Como na atividade anterior, encontre o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de 10° e de 80°:



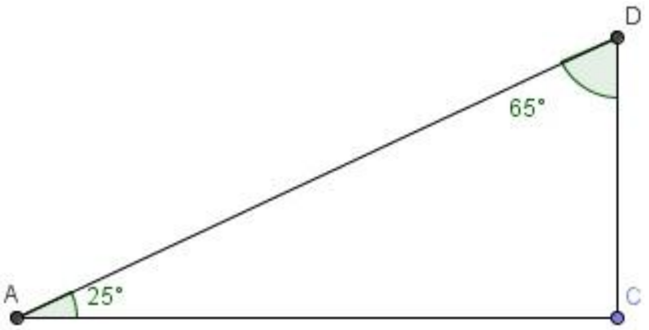
Como na atividade anterior, encontre o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e de 60°:



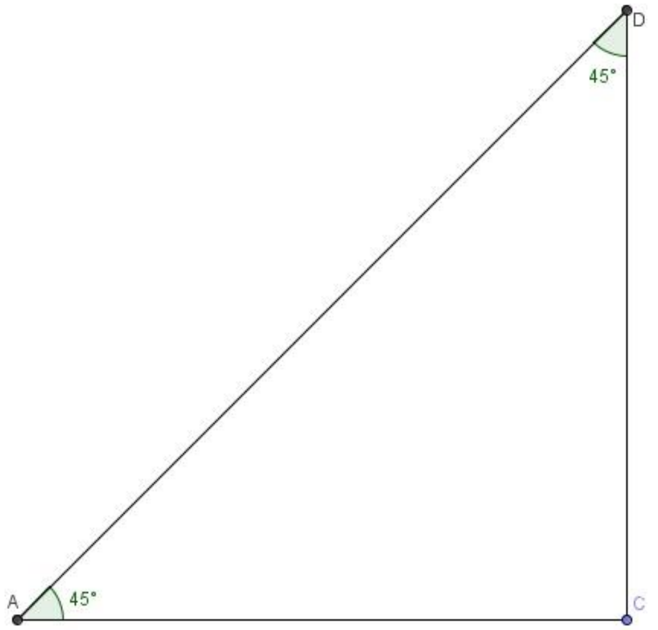
Como na atividade anterior, encontre o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de 40° e de 50°:



Como na atividade anterior, encontre o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de 65° e de 25°:



Como na atividade anterior, encontre o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de 45°:



	Sen	Cos	Tg
10°			
20°			
25°			
30°			
40°			
45°			
50°			
60°			
65°			
70°			
80°			

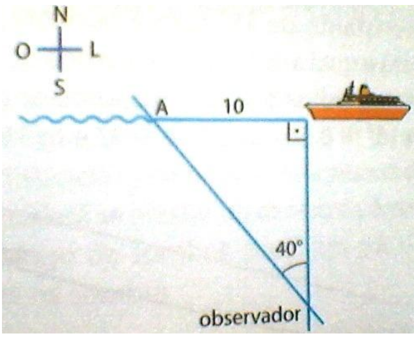
Atividades para Serem Realizadas Utilizando o Teodolito

1. No pátio da escola escolha algum objeto e meça sua altura, utilizando os conhecimentos que adquiriu durante as aulas:

2. Agora imagine que há um rio entre você e o prédio da escola como você faria para descobrir sua altura, justifique sua resposta e desenhe o esquema que escolheu.

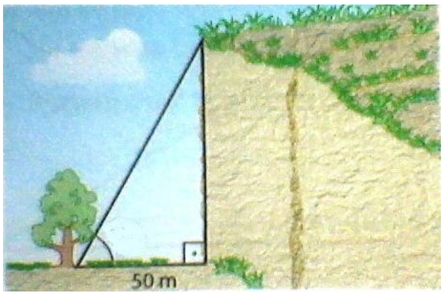
Exercícios de Fixação

1. Um navio está situado exatamente a 10 milhas a leste de um ponto A. Um observador, situado exatamente ao sul do navio, vê o ponto A sob um ângulo de 40°. Calcule a distância entre o observador e o navio.



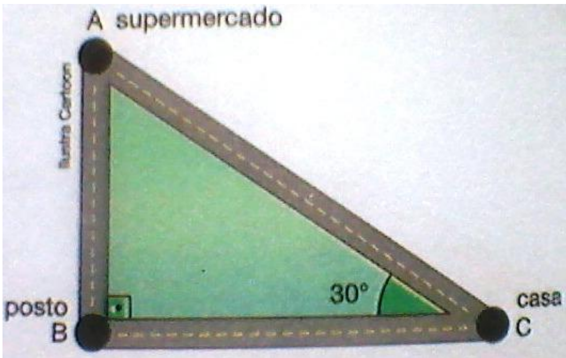
2. Um avião levanta voo em A e sobe fazendo ângulo constante de 25° com a horizontal. A que altura estará e qual a distância percorrida quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto de partida?

3. O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50 m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 25°. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?

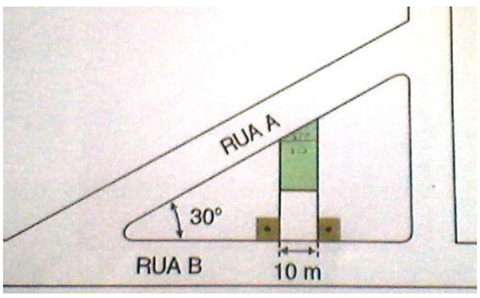


4. Um caminhão sobe uma rampa inclinada de 10° em relação ao plano horizontal. Se a rampa tem 30 m de comprimento, a quantos metros o caminhão se eleva, verticalmente, após percorrer toda rampa?

5. Após seu trabalho, Carolina foi de carro ao supermercado (ponto A). Ao sair do, ela percebeu que o nível de combustível do carro estava muito baixo. Ela optou em antes passar no posto que fica na esquina de duas avenidas (ponto B) para depois ir para casa (ponto C). Observando o esquema abaixo e sabendo que pela avenida AC o percurso tem 18 km, quantos quilômetros Carolina percorreu a mais indo pelas avenidas AB e AC?



6. Na planta da figura, calcule a medida do lado do terreno de cor verde que dá frente para rua A.

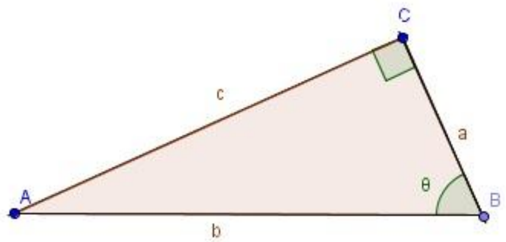


Apêndice 3 – Pós teste

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

Curso: Automação Industrial
Todas as respostas devem ser justificadas
Nº: Turma:

1. Determine o $\operatorname{sen}\theta$, o $\cos\theta$ e a $\tan\theta$ no triângulo retângulo abaixo:



2. Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma 60º com o solo. O comprimento do fio é de 70 metros. Qual a altura da pipa em metros em relação ao solo?

a) ( ) $35\sqrt{3}$

b) ( ) 10

c) ( ) 35

d) ( ) 70

e) ( ) $70\sqrt{3}$

f) ( ) Outra _______

3. Caio está distante 20 metros da base de um poste de 15,9 metros de altura. Os olhos de Caio estão a x metros do plano horizontal e formam um ângulo de 36° com o topo do poste. Calcule o valor de x. (Use $\operatorname{sen} 36° = 0{,}58$; $\cos 36° = 0{,}81$ e $\tan 36° = 0{,}72$).

a) ( ) 0,30

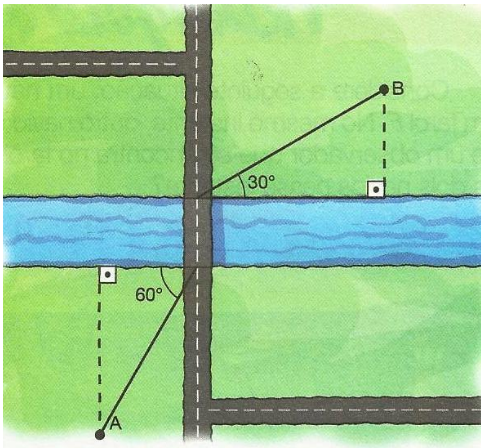
b) ( ) 4,30

c) ( ) 4,10

d) ( ) 1,50

e) ( ) Outro _______

4. Deseja-se construir uma estrada ligando as cidades A e B, separadas por um rio de margens paralelas, como no desenho a seguir:



Sabe-se que a cidade A está distante 45 km da margem do rio, a B está a 15 km da margem do rio e a ponte tem 4 km de extensão. Qual é a menor distância de A até B pela ponte?

a) ( ) $64\sqrt{3}$

b) ( ) $34+ 30\sqrt{3}$

c) ( ) $98+ 30\sqrt{3}$

d) ( ) 64

e) ( ) $158+\sqrt{3}$

f) ( ) $94+ 10\sqrt{3}$

g) ( ) outro _______

5. Num terreno plano de forma triangular, o lado maior mede 120 m, e o ângulo oposto a esse lado mede 90°. Se a medida do menor dos ângulos é igual a metade da medida do outro ângulo, quanto mede o lado menos desse terreno?

6. A sombra de um prédio às 9 horas da manhã mede 72 metros de comprimento e sua projeção forma com o solo um ângulo de 30º. A sombra deste mesmo prédio às 11 horas da manhã mede $24\sqrt{3}$ metros de comprimento.

a) Qual é a altura do prédio?

b) Qual é o ângulo formado pela projeção da segunda sombra com o solo?

Apêndice 4 – Teodolito Caseiro

Veja a seguir como montar e utilizar um Teodolito Caseiro:

Material:

- Um pote plástico com tampa (**a; b**);
- Cópia de um transferidor colado em um pedaço de papelão ou qualquer outro material que seja duro (**c**);
- Arame ou palito de churrasco e um canudo do mesmo tamanho do arame ou palito de churrasco (**d;e**);
- Cola, tesoura e fita durex.

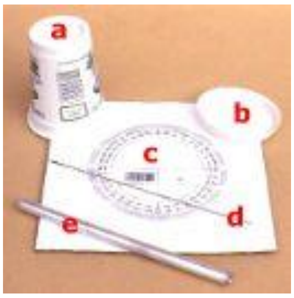


Figura 24-Materiais para Construção

A tampa deve ser colada, de cabeça para baixo, de modo que seu centro coincida com o centro do transferidor. Para isto, deve-se traçar na tampa dois diâmetros, fazendo um furo onde eles se cruzarem. Use o arame como guia para alinhar o centro da tampa com o centro do transferidor.

Figura 25- Colando a Tampa

O arame será o ponteiro que servirá para fazer a leitura em graus no transferidor. Para isso, faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo à borda, e atravesse o arame pelos furos.

Figura 26- Colocando o Arame

Faça o mesmo com o tubo de antena próximo a base do copo, de forma que fique paralelo ao arame (ou cole o tubo na base do copo). De acordo com a Revista Escola, *"Para refinar essa mira, cole na extremidade do tubo dois pedaços de linha formando uma cruz".*

Figura 27-Colocando o Tubo de Antena

Encaixe o copo na tampa.

Figura 28-Teodolito Caseiro

Para utilizar o teodolito na medição de um ângulo deve-se:

1. Posicionar o teodolito com o canudinho paralelo ao chão no ponto 0° - 180°.
2. Mantendo-o fixo, deve-se girar o "copinho" de modo a apontar a mira para o ponto de referência para o qual desejamos determinar o ângulo.
3. Em seguida, sem mexer no "canudinho", deverá observar o ângulo apontado pela vareta de metal. Esse é o ângulo medido.