



## **CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

# **O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA A PARTIR DO TEMA CRIPTOGRAFIA – UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

**FÁBIO DA SILVA SANTOS**

**Volta Redonda  
Setembro/2015**

**O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA A  
PARTIR DO TEMA CRIPTOGRAFIA – UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA  
SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

**FÁBIO DA SILVA SANTOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente de Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Orientadora: Isabella Moreira de Paiva Corrêa

**Volta Redonda  
Setembro/2015**

S237d

SANTOS, Fábio da Silva.

O Desenvolvimento do Conceito de Função Inversa a partir do tema Criptografia - uma sequência didática sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa / Fábio da Silva Santos. Volta Redonda, 2015.

87 fl.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Msc Isabella Moreira de Paiva Corrêa.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), *Campus* Volta Redonda, 2015.

1. Ensino de Função Inversa. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Criptografia.  
I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ. *Campus* Volta Redonda. II. Corrêa, Isabella Moreira de Paiva, III. Título

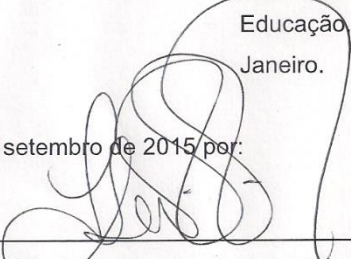
CDU: 53:37

**O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA A  
PARTIR DO TEMA CRIPTOGRAFIA – UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA  
SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Fábio da Silva Santos

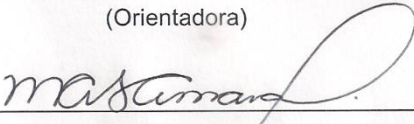
Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao corpo docente de  
Matemática, como requisito parcial à  
obtenção do grau de Licenciado em  
Matemática pelo Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de  
Janeiro.

Aprovada em 03 de setembro de 2015 por:



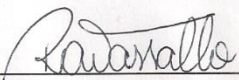
---

Prof.<sup>a</sup> Isabella Moreira de Paiva Corrêa, M.Sc., IFRJ  
(Orientadora)



---

Prof.<sup>a</sup> Márcia Amira Freitas do Amaral, Dr.<sup>a</sup>, IFRJ  
(Banca)



---

Prof. Rafael Vassallo Neto, M.Sc., IFRJ  
(Banca)

Dedico este trabalho aos meus pais, Cláudio e Selma, que além dos primeiros passos, me ensinaram os verdadeiros valores da vida.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiro a Deus por fazer com que fosse possível, todas as realizações ao longo de minha vida. Não somente nestes anos como universitário, mas em todos os momentos, por ser o maior mestre que alguém pode ter.

Agradeço a minha mãe Selma, heroína por me dar apoio e incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Ao meu pai Claudio, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que foi muito importante.

Às minhas irmãs Denise, Deise e Ludmila que, me apoiaram durante toda a caminhada.

À minha noiva Évelli Aline, com quem amo partilhar a vida. E que a todo momento esteve presente ao longo da minha caminhada. Pelas risadas e momentos de descontração e por me dar força nos momentos mais difíceis na correria de cada semestre.

Agradeço a minha professora orientadora Isabella Corrêa que teve paciência, foi amiga, conselheira, que me ajudou bastante ao longo de toda graduação e que foi fundamental para que fosse possível concluir este trabalho.

Aos meus amigos e colegas de curso, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas. Com vocês, as risadas ajudaram a superar os momentos mais conturbados.

## RESUMO

SANTOS, Fabio da Silva. O Desenvolvimento Do Conceito De Função Inversa A Partir Do Tema Criptografia – Uma Sequência Didática Sob A Perspectiva Da Aprendizagem Significativa. Volta Redonda, 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda, 2015.

Proporcionar ao aluno uma Aprendizagem Significativa é o desejo de todo docente. No entanto, esta não é uma tarefa fácil. Em Matemática o estudo sobre Funções é um dos conteúdos do Ensino Médio que possuem mais aplicações em situações presentes no dia a dia dos alunos, uma vez que descrevem fenômenos do mundo a partir da relação entre grandezas. O tema deste trabalho é o ensino do conteúdo de Funções Inversas a partir do tema Criptografia segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa. Neste trabalho a Criptografia é utilizada como meio para o desenvolvimento de atividades didáticas que possam organizar os conceitos envolvidos no conteúdo de Função Inversa a esse tema. A Criptografia possui aplicações em campos de estudo de bancos, forças armadas, Internet, segurança em redes de computadores, enfim, as pessoas que desejam proteger uma informação e as outras que pretendem conhecê-la. A questão que norteia este trabalho é, como construir um plano de trabalho para um conteúdo de matemática que favoreça a Aprendizagem Significativa como preconizada na teoria de David Ausubel? Para isso, foi elaborada uma proposta didática dirigida a alunos do 1º ano do Ensino Médio utilizando cifragem e decifragem de mensagens, construção e descoberta de formas de Criptografia.

**PALAVRAS-CHAVE:** 1. Ensino de Função Inversa. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Criptografia.

## ABSTRACT

SANTOS, Fabio da Silva. The Development of Inverse Function Concept From The Cryptography Theme - A Didactic Sequence Under Perspective Learning Meaningful. Volta Redonda, 2015. Work of Conclusion Course (Degree in Mathematics) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda, 2015.

Provide students a Meaningful Learning is the desire of all teachers. But, this is not an easy task. In mathematics, the study of functions is one of the high school's content that has more applications in real life situations in the daily routine of students, once that they describe phenomena of the world from the relationship between magnitudes. This paper's theme is how to teach Inverse Functions from Encryption using Meaningful Learning Theory. This paper uses Encryption as a way to develop didactical activities that can organize the concept of Inverse Function to this approach. Encryption has applications on banks, army, Internet, computer network security, well, people who want to protect information and who want to know it. The question that leads this research is how to build a lesson plan for a mathematics subject to improve Meaningful Learning as recommended by David Ausubel? For that, it was made a didactical propose focused on the student in the first years of High School using encryption and decryption of messages, building and detecting ways to encrypt.

**KEY WORDS:** Inverse Function Teaching. 2. Meaningful Learning. 3. Encryption



## SUMÁRIO

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>INTRODUÇÃO</b> .....                                                                                         | 11 |
| <b>1. CAPÍTULO 1 – A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</b> .....                                                       | 14 |
| 1.1. O DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....                                                       | 14 |
| 1.2. OS ORGANIZADORES PRÉVIOS E SUA IMPORTÂNCIA .....                                                           | 17 |
| 1.3. OS TIPOS DE APRENDIZAGEM E OS PRINCÍPIOS DA APRENDIZAGEM<br>SIGNIFICATIVA .....                            | 20 |
| 1.4. OS ELEMENTOS RELEVANTES PARA O PLANEJAMENTO DE UMA AULA<br>QUE FAVOREÇA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ..... | 24 |
| <b>2. CAPÍTULO 2 – CRIPTOGRAFIA</b> .....                                                                       | 26 |
| 2.1. A CRIPTOGRAFIA .....                                                                                       | 26 |
| 2.2. A CRIPTOGRAFIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....                                                                | 28 |
| 2.3. O ENSINO DE MATEMÁTICA E FUNÇÕES.....                                                                      | 29 |
| 2.4. A RELAÇÃO ENTRE CRIPTOGRAFIA E FUNÇÃO INVERSA .....                                                        | 30 |
| <b>3. CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA</b> .....                                                                        | 33 |
| 3.1. A METODOLOGIA .....                                                                                        | 33 |
| <b>4. CAPÍTULO 4 – PROPOSTA DIDÁTICA</b> .....                                                                  | 35 |
| 4.1. A PROPOSTA DIDÁTICA.....                                                                                   | 35 |
| <b>5. CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....                                                               | 59 |
| <b>6. BIBLIOGRAFIA</b> .....                                                                                    | 62 |
| <b>7. APÊNDICE</b> .....                                                                                        | 65 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Figura 1: Estrutura do Trabalho. ....                                                     | 13 |
| 2. Figura 2: Diagrama Comparativo Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora..... | 20 |
| 3. Figura 3: Mapa Conceitual – Aprendizagem Significativa .....                              | 23 |
| 4. Figura 4: Citale Espartano .....                                                          | 27 |
| 5. Figura 5: Slide 1 e 2 - Introdução.....                                                   | 37 |
| 6. Figura 6: Slide 3 a 6 - Criptografia .....                                                | 38 |
| 7. Figura 7: Slide 7 - O que é Criptografia?.....                                            | 40 |
| 8. Figura 8: Slide 8 a 11 - Exemplos de Técnicas de Criptografia ao longo da História.....   | 40 |
| 9. Figura 9: Criptografia de Substituição.....                                               | 42 |
| 10. Figura 10: Cifra de César.....                                                           | 43 |
| 11. Figura 11: Gráfico da Função Original .....                                              | 52 |
| 12. Figura 12: Marcação dos Pontos da Inversa.....                                           | 53 |
| 13. Figura 13: Gráfico da Função Inversa e da Original .....                                 | 53 |

## INTRODUÇÃO

O Ensino Fundamental e Médio no Brasil continua apresentando índices que indicam um baixo rendimento escolar, apesar de todos os esforços das políticas públicas de educação e da produção da comunidade acadêmica da Educação Matemática. O tema tem sido objeto de análises e pesquisas em todos os níveis de ensino. Estas pesquisas indicam que o baixo rendimento por parte dos alunos, não apresenta um único culpado e sua solução não é imediata, mas sem dúvida alguma, buscar alternativas metodológicas é um fator que contribui fortemente para minimizar o quadro atual.

As orientações para a Educação Matemática, presentes em documentos oficiais, em publicações de grupos de pesquisa ou resultados de trabalhos de investigação sobre o ensino e aprendizagem em Matemática, apontam para a Teoria da Aprendizagem Significativa e a sua relação com a contextualização como um caminho para melhoria deste quadro na educação matemática.

Partindo desta indicação e da vontade de saber mais sobre como se processa a Aprendizagem Significativa e como favorecê-la a partir do planejamento das aulas do professor, surgiu a questão de pesquisa deste trabalho: Como construir um plano de trabalho para um conteúdo de matemática que favoreça a Aprendizagem Significativa como preconizada na teoria de David Ausubel? Definida esta questão partiu-se para a definição do conteúdo matemático

A Teoria da Aprendizagem Significativa se caracteriza pela preocupação em identificar e construir elementos na estrutura cognitiva do aluno capazes de receber (ancorar) a nova informação, o que torna a contextualização e a realidade do aluno aspectos importantes a serem considerados no planejamento das aulas. Focando nestes aspectos a escolha do tema foi influenciada pela experiência que o autor teve com Criptografia e Segurança de Dados no curso de Sistemas de Computação, na disciplina de Redes de Computadores e em sua relação com temas da Matemática.

A Criptografia e a segurança dos dados são assuntos atuais, importantes socialmente, já que visam garantir a segurança em todo ambiente computacional que necessite de sigilo em relação às trocas de informações. Portanto, capaz de

fomentar o interesse e motivação nos alunos. A Criptografia aborda conceitos semelhantes aos conceitos usados em dois momentos dos conteúdos do Ensino Médio: Função Inversa e Matriz Inversa.

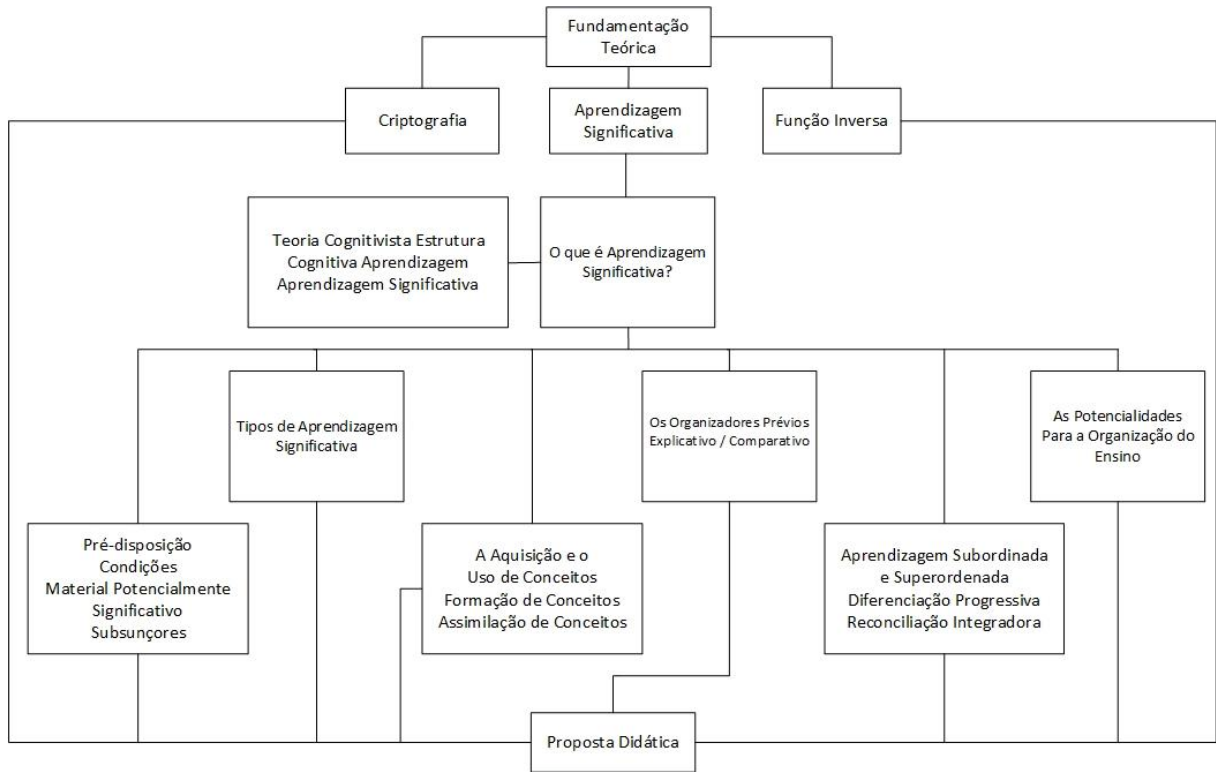
Neste trabalho definiu-se trabalhar com o conteúdo de Função Inversa a partir do tema Criptografia. A pergunta de pesquisa foi então complementada: Como construir um plano de trabalho para o ensino de Função Inversa a partir do tema Criptografia de modo a favorecer a Aprendizagem Significativa como preconizada na teoria de David Ausubel?

Para a elaboração do plano de trabalho, para o ensino de Função Inversa, traçamos os seguintes objetivos secundários:

- a) Analisar a Teoria da Aprendizagem Significativa;
- b) Elencar os elementos que devem ser considerados ao se planejar uma aula a fim de favorecer a Aprendizagem Significativa;
- c) Analisar o Tema Criptografia e relacioná-lo com a Educação Matemática, mais especificamente com o conteúdo de Função Inversa.
- d) Elaborar uma proposta de planejamento para o conteúdo de Função Inversa a partir da Criptografia, organizado de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa.

A Introdução consiste na apresentação do tema, da justificativa das escolhas, objetivos e estrutura do trabalho. O Capítulo 1 – O Desenvolvimento da Aprendizagem Significativa, apresenta a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, com contribuições de Moreira e Masini, que será a base para a construção da proposta didática. No Capítulo 2 – A Criptografia, é apresentado o que é a Criptografia, suas relações com a Matemática e com a Educação Matemática. Este capítulo embasa as atividades de codificação e decodificação de mensagens que serão utilizadas na proposta didática com o objetivo de desenvolver o conceito de Função Inversa a partir da experiência em codificar e decodificar. O Capítulo 3 – Metodologia, apresenta como a pesquisa foi realizada. No Capítulo 4 – Proposta Didática, é então apresentada uma sequência didática para o ensino de Função Inversa a partir do tema Criptografia, buscando estabelecer um cenário empírico e contemplando os elementos essenciais para promoção de uma

Aprendizagem Significativa, como idealizada por Ausubel. Por fim, o Capítulo 5 – Considerações Finais, apresenta as conclusões desta pesquisa.



**Figura 1: Estrutura do Trabalho.**

## **CAPÍTULO 1 – A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Este capítulo apresenta a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, com reforços teóricos de Moreira e Masini, que são a base para a construção da proposta didática.

### **1.1. O DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

A teoria de aprendizagem de Ausubel<sup>1</sup> busca explicar como se desenvolve a aprendizagem no ambiente escolar. Segundo o autor, é a partir de conteúdos que o indivíduo já possui que a aprendizagem se desenvolve. Os conhecimentos prévios recebem novos conteúdos, que podem agregar novos significados aos preexistentes ou modificá-los. Segundo o autor, entre os fatores isolados que influenciam na aprendizagem, o mais importante é o que o aluno já possui de conhecimento.

Se eu tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (AUSUBEL, 1980, p. 8).

A aprendizagem se torna mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento do aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Em contrapartida, se torna cada vez menos significativa, ou seja, mecânica ou repetitiva, quanto menos se produz essa incorporação e atribuição de significado, de modo que o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva.

---

<sup>1</sup>David Paul Ausubel nasceu nos Estados Unidos, em 1918. Formou-se médico cirurgião, psiquiatra e psicólogo educacional, e demonstrava extremo interesse pelo estudo da aprendizagem e da educação. Influenciado por Piaget, desenvolveu uma teoria da aprendizagem humana em sala de aula, em uma época em que o estudo da aprendizagem escolar acontecia a partir de leis e pesquisas realizadas em laboratórios. Pesquisou a aprendizagem de caráter cognitivo: a integração dos novos conteúdos às estruturas cognitivas previamente existentes no sujeito. Defendia a abolição da aprendizagem repetitiva e baseada em memorização.

O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (culturalmente) significativas, ideias anteriores (“âncoras”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos (AUSUBEL, 2003, folha de rosto).

Deste modo, Ausubel faz referência aos conhecimentos prévios que o aluno possui (âncoras). A partir destes é que serão (re)construídas estruturas mentais que possibilitarão a descoberta e redescoberta de outros conhecimentos, fazendo assim, com que a aprendizagem fique significativa. O autor define ainda as aprendizagens, por Recepção e por Descoberta, e faz um quadro comparativo entre elas nas formas de Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica.

Com isso existem quatro combinações para as dimensões de aprendizagem como podemos ver no quadro a seguir:

| <b>Aprendizagem</b>   | <b>Significativa</b>                                                                                                             | <b>Mecânica</b>                                                                                             |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Receptiva</b>      | O professor apresenta uma forma final de conhecimento, generalizada, e o aluno a relaciona com a estrutura cognitiva que possui. | O professor apresenta uma forma final do conhecimento, generalizada, e o estudante simplesmente a memoriza. |
| <b>Por Descoberta</b> | O próprio estudante formula a generalização do conteúdo da aprendizagem e relaciona à sua estrutura cognitiva.                   | O aluno chega à generalização do conhecimento por si mesmo e memoriza.                                      |

**Tabela 1: Tipos de Aprendizagem**

A Aprendizagem por Recepção se caracteriza pelo fato do conteúdo ser apresentado ao aluno em sua forma final, de modo que o aluno recebe o conteúdo de forma geral. Este tipo de aprendizagem é caracterizado por não envolver descoberta alguma por parte de quem recebe o conteúdo.

A Aprendizagem por Descoberta é caracterizada pelo fato de que o conteúdo a ser aprendido será descoberto pelo aluno, o qual possui algumas tarefas antes de atingir de fato a aprendizagem.

Tanto na aprendizagem por Descoberta como na aprendizagem por Recepção, existe a possibilidade de o aluno interagir com a informação que recebe, e esta interação irá caracterizar a aprendizagem como Significativa ou Mecânica.

(...) quer por recepção ou por descoberta, a aprendizagem é significativa, segundo a concepção ausubeliana, se a nova informação incorpora-se de forma não-arbitrária à estrutura cognitiva. (MOREIRA, 1999, p.154).

Para que a aprendizagem seja Significativa o aluno precisa reorganizar as informações que recebe, seja por recepção ou por descoberta, e integrá-las ao conhecimento que já possui, produzindo um novo conceito ou uma nova proposição, ou seja, um novo conhecimento. Se isso não ocorre e o aluno apenas memoriza as novas informações então essa aprendizagem é mecânica e se torna cada vez menos acessível no futuro.

Segundo Moreira e Masini (1982), para que a aprendizagem ocorra e seja significativa são necessárias algumas condições. Uma delas é que o aluno precisa de alguma motivação para aprender, caso contrário o conteúdo será apenas memorizado de maneira arbitrária e isto será Aprendizagem Mecânica. Outra condição é que o conteúdo deve ser significativo tanto de forma lógica, quanto psicológica, sendo que o significado lógico irá depender exclusivamente da natureza do conteúdo. Já o significado psicológico fará referência às experiências que cada aluno possui.

A Aprendizagem Significativa, por definição, envolve aquisição/construção de significados. É no curso da Aprendizagem Significativa que o significado lógico dos materiais de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o aprendiz. (AUSUBEL, 1963, p. 58).



Ao se aprender de maneira significativa o conhecimento adquirido tende a ser lembrado por mais tempo, assim, a capacidade de aprender outros conteúdos a partir do novo se torna aumentada. Ausubel, afirma que

Na Aprendizagem Significativa há três vantagens essenciais em relação à aprendizagem memorística. Em primeiro lugar, o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo. Em segundo lugar, aumenta a capacidade de aprender outros materiais ou conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida. Em terceiro lugar, e uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte – a “reaprendizagem”, para dizê-lo de outra maneira. A explicação dessas vantagens está nos processos específicos por meios dos quais se produz a Aprendizagem Significativa”. (AUSUBEL, 1960, apud COLL, 2000, p. 233).

Diante dessas vantagens, esforços devem ser feitos com o objetivo de produzir uma Aprendizagem Significativa.

## **1.2. OS ORGANIZADORES PRÉVIOS E SUA IMPORTÂNCIA**

Para Ausubel, o conhecimento só se torna significativo quando existe interação com algum conhecimento prévio que seja relevante na mente de quem aprende. Este conhecimento prévio, dentro do processo de aprendizagem será chamado de Subsunçor.

(...) Subsunçor é uma ideia (conceito ou proposição) mais ampla, que funciona como subordinador de outros conceitos na estrutura cognitiva e como ancoradouro no processo de assimilação. Como resultado dessa interação (ancoragem), o próprio Subsunçor é modificado e diferenciado. (JESUS e SILVA, 2004, p. 05).

Tais conceitos tem sua relevância atrelada aos novos conceitos a serem aprendidos, desta forma os novos conceitos modificam e são modificados pelos Subsunçores.

Os conceitos consistem em abstrações dos atributos essenciais que são comuns a uma determinada categoria de objetos, eventos ou fenômenos, independentemente da diversidade de dimensões outras que não aquelas que caracterizam os atributos essenciais compartilhados por todos os membros da categoria. (AUSUBEL et al, 1980, p. 72).

Existe ainda uma ligação entre eles e o novo conhecimento adquirido, que será feita por alguns outros conceitos denominados de Organizadores Prévios.

Consequentemente, enquanto ocorre a Aprendizagem Significativa, os Subsunçores vão se modificando e se desenvolvendo, ficando assim cada vez mais diferenciados. E com isso, propiciam um refinamento do conceito, fazendo com que as ideias fiquem mais densas implicando em um fortalecimento das possibilidades de Aprendizagem Significativa.

O Organizador Prévio, é um material introdutório que pode ser apresentado aos estudantes antes do conteúdo principal a ser ensinado. Deve ser constituído de informações que sejam amplas e genéricas para que o aluno possa ir construindo passo a passo o conhecimento.

Os Organizadores Prévios podem vir na forma de uma afirmação, um parágrafo descritivo, uma lista com perguntas, um filme, etc. Aragão (1976), defende a preparação de um organizador especial para cada nova unidade, na qual o aluno possa aproveitar os benefícios de um Subsunçor de tal maneira lhe forneça uma visão geral do novo conteúdo (antes de fazer a comparação deste com a experiência anterior) fazendo assim também com que organize elementos que propiciem e expliquem melhor o conteúdo.

(...) a essência do processo de Aprendizagem Significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não-litera). Esta relação significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativa. (AUSUBEL, 1968).

Logo, a principal função do organizador é ser uma ponte entre o que o aluno sabe e aquilo que ele precisa saber para aprender o novo conteúdo.

Os Organizadores Prévios podem tanto fornecer “ideias âncora” relevantes para a Aprendizagem Significativa do novo material, quanto estabelecer relações entre ideias, proposições e conceitos já existentes na estrutura cognitiva e aqueles contidos no material de aprendizagem. (MOREIRA, 2006).

É neste momento então, que os professores devem fazer indagações a fim de explorar o que os alunos têm de conhecimento prévio sobre o assunto.

Na teoria de Ausubel são descritos dois tipos de Organizadores Prévios, os Expositivos e os Comparativos. O primeiro é utilizado quando o conteúdo é inteiramente desconhecido pelo aluno, e o segundo, quando as informações a serem transmitidas não são completamente novas.

O autor se utiliza metaforicamente da palavra “ancoragem”, pois, é como se os novos conhecimentos lançassem uma “âncora” e se prendesse em conhecimentos prévios, tornando-se assim mais facilmente apreendidos.

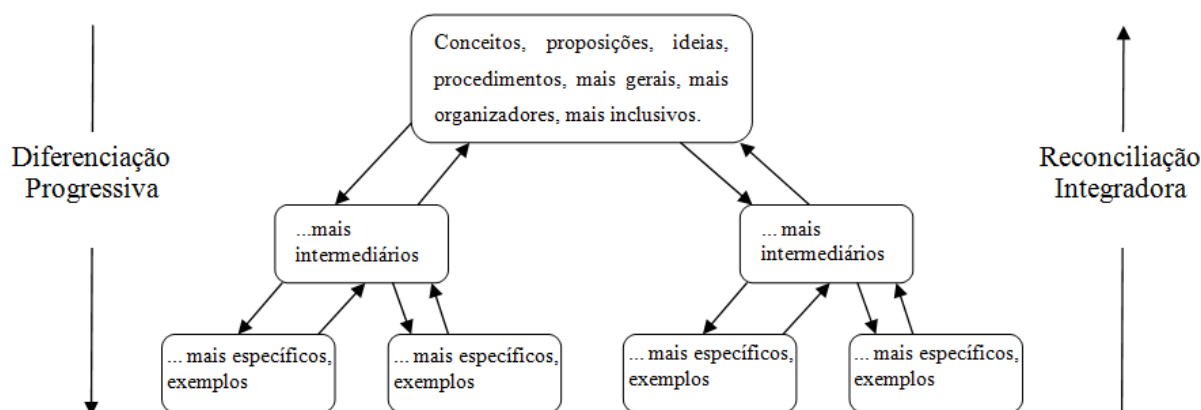
Além destes tipos, a Aprendizagem Significativa de Ausubel está pautada em outros dois princípios, sendo eles, a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integrativa.

A estrutura cognitiva, considerada como uma estrutura de subsunçores interrelacionados e hierarquicamente organizados é uma estrutura dinâmica caracterizada por dois processos principais, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. (MOREIRA, 2012, p. 05).

O princípio da Diferenciação Progressiva recomenda que ao se trabalhar um conteúdo, as ideias e os conceitos relacionados a ele sejam construídos em uma ordem que seja crescente o nível de especificidades, ou seja, do mais geral para o mais específico. Portanto, a Diferenciação Progressiva é caracterizada pela atribuição de novos significados a um Subsunçor, fazendo assim, com que estes novos significados sejam resultados de sucessivas utilizações desse Subsunçor, agregando novo significado ao conhecimento. Neste caso, primeiro são apresentados os aspectos mais gerais, progressivamente são incluídos detalhes e particularizações e exemplos. Por exemplo, aprendemos que cachorro, gato, galinha e tartaruga são animais, depois, aprendemos que cachorro e gato são mamíferos, galinha é uma ave, e tartaruga é um réptil.

No caso da Reconciliação Integrativa, na apresentação do novo conteúdo o professor deve procurar tornar mais claras as semelhanças e diferenças entre as ideias envolvidas. Assim, a Reconciliação Integrativa consiste em perceber que, apesar das particularidades dos conteúdos, todos eles tratam do mesmo assunto.

O diagrama a seguir indica que a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora são interdependentes e simultâneas tanto na dinâmica da estrutura cognitiva como no processo ensino-aprendizagem.



**Figura 2: Diagrama Comparativo Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora.**

Moreira salienta que a forma como os conteúdos são linearmente organizados favorece a Aprendizagem Mecânica.

(...) normalmente no ensino de qualquer disciplina na escola. Os conteúdos estão listados em um programa que é seguido linearmente, sem idas e voltas, sem ênfases, e que deve ser cumprido como se tudo fosse importante, ou como se os aspectos mais importantes devessem ficar para o final. O resultado desse enfoque é, geralmente, aprendizagem mecânica. (MOREIRA, 2012, p. 19).

Cabe ressaltar, que iniciar um conteúdo na sua forma mais geral, não necessariamente significa apresentá-lo em sua forma final, abstrata, sofisticada matematicamente. Pois, ao fazermos isso, estaremos contradizendo a Diferenciação Progressiva, bem como a Reconciliação Integrativa. E mais, não estaremos levando em consideração o conhecimento prévio do aluno.

### **1.3. OS TIPOS DE APRENDIZAGEM E OS PRINCÍPIOS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Na teoria de Ausubel, podemos identificar três tipos de Aprendizagem Significativa, sendo eles: A aprendizagem através de Conceitos, a aprendizagem através de Proposições e aprendizagem através de Representações.

Cada uma delas possui suas próprias características. A aprendizagem através de Conceitos é caracterizada por Ausubel, por fazer a distinção de dois tipos principais de aquisição do conceito. Sendo eles:

- Formação de Conceitos - é caracterizada por ser uma aprendizagem por descoberta onde existe a intervenção dos processos psicológicos como a discriminação, a generalização, o levantamento e a comprovação das hipóteses levantadas.
- Assimilação de conceitos - é caracterizada pelo fato de os indivíduos aprenderem novos significados de conceito, depois de lhes serem apresentados atributos dos conceitos. Desta forma, os indivíduos irão relacionar estes novos atributos com ideias já estabelecidas em suas estruturas cognitivas.

A aprendizagem através de Proposições é caracterizada por Ausubel por não fazer referência à aprendizagem de um símbolo (que pode ser uma palavra ou algo que este símbolo represente), mas por fazer uma relação entre as ideias pertinentes a ele. Deste modo a sentença ou proposição a ser aprendida será relacionada com as ideias pré-existentes na estrutura cognitiva do indivíduo.

Segundo Moreira (2012), no que se refere a tipos de Aprendizagem Significativa, a Aprendizagem Representacional apesar de ser a mais elementar, é a mais fundamental, pois, dela dependem os outros tipos de aprendizagem.

(...) aprendizagem representacional é a que ocorre quando símbolos arbitrários passam a representar, em significado, determinados objetos ou eventos em uma relação unívoca, quer dizer, o símbolo significa apenas o referente que representa. (MOREIRA, 2012, p.16).

Vale ressaltar que mesmo que a Aprendizagem Representacional, esteja próxima da Aprendizagem Mecânica, na teoria de Ausubel ela ainda sim é caracterizada como Significativa. Porque, na Aprendizagem Representacional os símbolos têm seus significados ligados a um referente concreto, já na Aprendizagem Mecânica, a relação existente entre símbolo e objeto/evento será apenas de associação, sem significado. Com isso na teoria de Ausubel a Aprendizagem Representacional e a Conceitual estão intimamente relacionadas.

Ainda segundo Ausubel, a Aprendizagem Significativa, se dá de três formas distintas, sendo elas: Aprendizagem Combinatória, Subordinada e Aprendizagem Superordenada.

Na Aprendizagem Combinatória, a nova informação muitas vezes não é ampla o suficiente para fazer a absorção dos Subsúncos, contudo, será também muito abrangente para ser absorvida por eles. Assim, a Aprendizagem Combinatória é, então, uma forma de Aprendizagem Significativa em que a atribuição de significados a um novo conhecimento implica necessariamente na interação com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, mas não é nem mais inclusiva nem mais específica do que os conhecimentos originais.

Já a Aprendizagem Subordinada, é caracterizada pelo fato de as novas ideias serem subordinadas às ideias mais relevantes, ou seja, que possuam um maior grau de abstração, de generalização e de inclusão do significado. Deste modo, a Aprendizagem Significativa é dita Subordinada, quando os novos conhecimentos com potencial significativos adquirem significados, para o indivíduo que aprende. Isto ocorre por um processo de ancoragem cognitiva interativa, em conhecimentos prévios relevantes mais gerais e inclusivos já existentes na sua estrutura cognitiva.

A Superordenada tem como característica principal o novo conhecimento a ser aprendido ser mais geral do que as ideias que o indivíduo já possui a respeito do tema. Portanto, a Aprendizagem Superordenada irá envolver, processos de abstração, indução e síntese, que irão levar a novos conhecimentos, estes por sua vez, irão passar a subordinar (depende) aqueles que lhes deram origem.

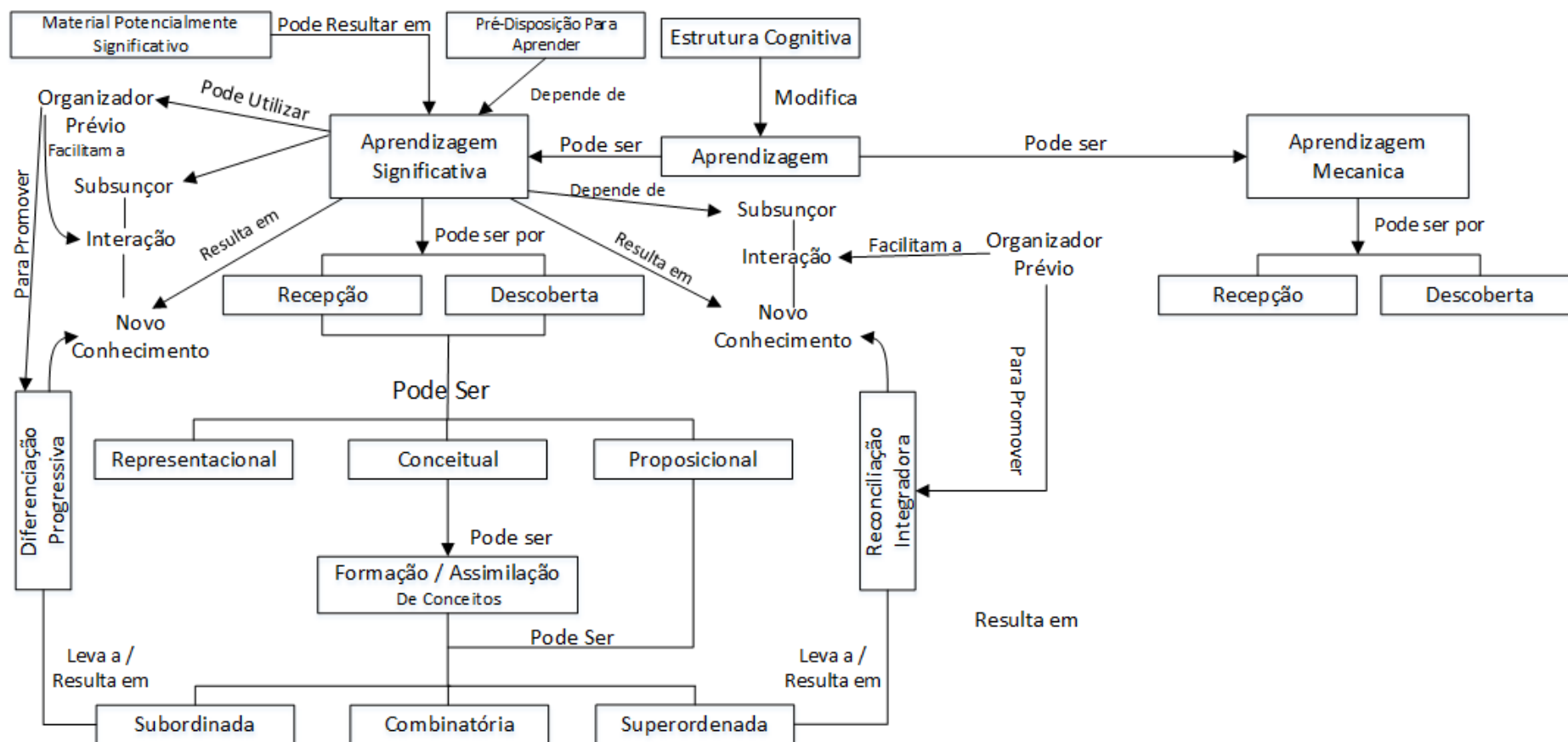


Figura 3: Mapa Conceitual – Aprendizagem Significativa.

Fonte: Próprio Autor.

#### **1.4. ELEMENTOS RELEVANTES PARA O PLANEJAMENTO DE UMA AULA QUE FAVOREÇA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.**

Considerando-se, conforme a Teoria de Ausubel, que aprendizagem ocorre quando as novas ideias e informações são organizadas e integradas à estrutura cognitiva a partir dos pontos de ancoragem, a estrutura cognitiva do aluno no momento da aprendizagem se torna o foco das atenções como sendo o fator cognitivo mais importante a ser considerado.

Assim, torna-se imprescindível que o professor inicialmente identifique os conceitos organizadores básicos do conteúdo a ser ensinado, determinando a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino. Esse primeiro passo orienta a identificação de quais Subsunçores o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva que pudessem servir de âncoras para a nova aprendizagem.

Nesse momento, começa o trabalho direto com o aluno. A pergunta a ser respondida é: “O que o aprendiz já sabe?” Investigar o que o aprendiz já sabe é avaliar para conhecer a estrutura cognitiva, determinando quais os Subsunçores relevantes já estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno. Essas informações são a base para a forma de apresentação e organização da sequência didática, influenciando nas escolhas da metodologia e recursos que serão mais eficientes frente a realidade cognitiva do aluno.

Até aqui pode-se resumir:

- 1º Identificar os conceitos organizadores básicos do conteúdo a ser ensinado;
- 2º Identificar os Subsunçores dos quais os alunos vão precisar para a aprendizagem deste conteúdo;
- 3º Determinar quais os Subsunçores estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno para o qual se está planejando o ensino;
- 4º Fazer o planejamento, selecionando, sequenciando e preparando os conteúdos a serem ensinados organizando um material que seja Potencialmente Significativo. A escolha de recursos e metodologias devem ter como objetivo, facilitar a passagem da estrutura conceitual da matéria de



ensino para a estrutura cognitiva do aluno de uma maneira significativa, organizando um material que seja Potencialmente Significativo.

Nesta 4ª etapa, a do planejamento da ação didática, Ausubel indica uma fase inicial que é a de preparação dos Organizadores Prévios, de modo a permitir ao aluno acessar o conteúdo relevante em sua estrutura cognitiva ou fornecer “ideias âncoras” e relacionar estes com o novo conhecimento dando uma visão geral do novo conteúdo.

Ausubel ainda propõe dois processos para nortear a maneira e a sequência didática dos conceitos a serem trabalhado em aula: a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora.

Na Diferenciação Progressiva o conteúdo deve ser organizado de modo que os conceitos mais gerais do conteúdo sejam apresentados primeiro, e depois, os mais específicos, um a um. Isso porque a organização na mente do indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas e gerais estão no topo da estrutura e progressivamente incorporam os elementos que são menos inclusivos e mais diferenciados.

A Reconciliação Integradora tem dois momentos. Primeiro em relação ao material que deve proporcionar a exploração de relações entre ideias, indicando semelhanças e diferenças entre os conceitos relacionados. Segundo em relação ao trabalho pedagógico do professor que deve relacionar as ideias presentes no material instrucional com aquelas já disponíveis na estrutura cognitiva do aluno.

## CAPÍTULO 2 – CRIPTOGRAFIA

Neste capítulo é apresentado o que é a Criptografia, quais suas relações com a Matemática e com a Educação Matemática, além de ser a base das atividades de codificação e decodificação.

### 2.1. A CRIPTOGRAFIA

A palavra Criptografia é uma palavra que vem do grego e é a junção de duas outras a primeira *kriptós* que significa escondido, oculto e *grápho* que significa grafia.

É uma arte ou ciência de escrever em códigos para que somente o destinatário da mensagem possa lê-la. De maneira simples, a Criptografia transforma o texto original em outra informação chamada cifrada ou texto código que à primeira vista para quem a lê pode parecer um texto randômico (gerado ao acaso) incompreensível.

Desde os tempos mais antigos, são buscadas formas para disfarçar mensagens de tal maneira que somente o destinatário consiga compreender seu conteúdo. Tal arte é bastante antiga e já se encontrava presente desde os tempos da hieroglífica dos egípcios. Os romanos também faziam uso da Criptografia através de códigos secretos, para que seus planos de batalha pudessem chegar até seus generais. Mesmo existindo desde os tempos antigos, a forma como a Criptografia é pensada, não mudou muito até os tempos atuais, assim como a necessidade de proteger uma informação.

Existem aparelhos que podem ser utilizados para criptografar uma mensagem, o primeiro deles foi o *citale* espartano, utilizado durante o século V a.C.

O *citale* era um bastão de madeira, onde se enrolava uma tira de couro e assim então escrevia a mensagem em todo o comprimento do bastão. Por estar escrita em uma tira de couro, uma forma de esconder tal mensagem era removendo a tira de couro do *citale* e então usá-la como cinto, deste modo bastava colocar a parte escrita com a mensagem voltada para a parte interna do cinto para que esta passa-se despercebida. Por se tratar de uma mensagem escrita de maneira

diferente, enrolada na tira de couro, quando desenrolada a mensagem ficava sem sentido para quem a lesse, pois, era preciso que o receptor da mensagem tivesse um *citale* de mesmo diâmetro para que pudesse enrolar a tira de couro e ler a mensagem de maneira correta e com sentido. O *citale* espartano é apresentado conforme a figura 4.



**Figura 4: Citale Espartano**

Existem também outras formas de criptografar, quando é utilizada a substituição de uma letra por outra a Criptografia recebe o nome de cifra. Este tipo de Criptografia foi utilizado por Júlio César, Imperador de Roma, na sua Criptografia César substituía cada letra da mensagem original por outra que estivesse três casas a frente no mesmo alfabeto. Desta forma no momento de escrever a mensagem, César utilizava seu alfabeto normal e em seguida utilizava o alfabeto cifrado para que fosse possível fazer a codificação da mensagem que seria então enviada. Por se tratar de um método inovador para a época tal cifra ficou conhecida como Cifra de César. O alfabeto da Cifra de César é apresentado na tabela 2.

|                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alfabeto Normal  | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| Alfabeto Cifrado | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C |

**Tabela 2: Método de substituição utilizado por Júlio César.**

A Criptografia se desenvolveu e vem se desenvolvendo marcada por três fases, sendo elas: a artesanal, mecânica e digital.

A fase artesanal registra as primeiras manifestações históricas da Criptografia e coincide com o advento da escrita, cobrindo as Idades Antiga e Média. No início da Idade Moderna, com a invenção da Imprensa, aparecem os primeiros indícios da fase mecânica da Criptografia. Com a Revolução Industrial, a invenção do telégrafo e do rádio, a fase mecânica se desenvolve e seu apogeu ocorre com as máquinas de cifragens usadas durante a Segunda Guerra Mundial: a máquina alemã Enigma é

a mais ilustre representante e podemos entender como uma mudança de encaminhamento, de rumo, alteração no curso entre a Criptografia antiga e a moderna. A construção dos primeiros computadores abriu novos horizontes para a Criptografia e marca o início do uso de métodos matemáticos relevantes para a construção de códigos.

## **2.2. A CRIPTOGRAFIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) têm como metas para o Ensino Médio, um ensino que seja voltado para o mercado de trabalho, para a pesquisa e que dentro da sala de aula seja contextualizado e incentive a interdisciplinaridade. No mesmo sentido, atuam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), objetivando a formação de cidadãos críticos, pensantes que saibam atuar dentro e fora da sala de aula, bem como na sociedade onde vivem.

Neste sentido fazer a inserção do tema Criptografia como fator motivador dos alunos pode fazer com que a Matemática da sala de aula tenha mais significado e aplicação no dia a dia. Em um mundo cada vez mais digital, onde a informatização dos processos vem crescendo exponencialmente, a troca de informações deve ocorrer de maneira segura. Assim, deve existir uma forma de garantir esta segurança, neste sentido, a Criptografia atua como uma forma a mais de segurança para os dados.

O ato de permitir que muitos usuários acessem um mesmo sistema ao mesmo tempo independentemente do local onde estejam e em tempo real, faz com que seja necessário implantar um sistema que dê uma maior segurança às informações. Em alguns tipos de aplicações a segurança das informações tem caráter vital, pois, podem ser roubadas, falsificadas ou danificadas quando saem de um ponto do sistema até chegar ao outro. Com isso, a privacidade da mensagem se tornará ameaçada, uma vez que é lançada publicamente, podendo ser captada por outros dispositivos.

Neste aspecto a Criptografia atuará como uma proteção contra a disponibilidade acidental ou intencional de tais informações por pessoas desautorizadas. A privacidade atuará no direito do indivíduo ou organização de

poder determinar quando e como as informações sobre ele podem ou não ser transmitidas para outros.

A Criptografia atua como ferramenta para garantir que as informações cheguem ao seu destinatário e somente ele será capaz de interpretá-la. Segundo Terada,

O tema Criptografia tem um papel importante nos dias atuais, tendo em vista que é utilizado na auditoria eletrônica, na autenticação de ordens eletrônicas de pagamentos, no código de verificação do ISBN, nos navegadores de internet, entre outras situações da vida cotidiana. (TERADA, 1988, p. 02).

Diante disso, fica fácil perceber que o tema Criptografia pode servir como instrumento de ensino e aprendizagem para o ensino de Matemática. Através dele o professor possui um leque de atividades envolvendo codificação e decodificação aliadas aos temas trabalhados no Ensino Médio.

Para Cantoral (2000), a Criptografia pode ser um elemento motivador para o processo de ensino da Matemática.

Já Tamarozzi (2001), indica que o tema deixa à disposição dos professores uma grande quantidade de atividades e jogos de codificação e decodificação que podem envolver conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Médio. E ainda reforça a ideia dizendo que, mesmo exemplos elementares de Criptografia podem contribuir para que os professores tenham um material que é útil para ser usado em exercícios de fixação.

### **2.3. O ENSINO DE MATEMÁTICA E FUNÇÕES**

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de 2002 (PCN, 2002), o estudo das Funções é de extrema importância, uma vez que descrevem fenômenos do mundo a partir da relação entre grandezas. Modelar situações-problema, construindo modelos descritivos destes fenômenos permite várias conexões dentro e fora da própria Matemática. O estudo das Funções propicia aos alunos a compreensão e utilização da linguagem algébrica como a linguagem das ciências. Assim, é importante dar grande ênfase ao estudo das diferentes Funções, para que uma vez compreendido o conceito e suas propriedades, o aluno seja capaz de

estabelecer relação entre as operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas Funções.

A ideia de Função é muito utilizada na Matemática, assim como em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Biologia, Química e Física. Elas possuem várias aplicações cotidianas, como, por exemplo, em situações relacionadas à Física, envolvendo lançamentos de objetos, movimento uniformemente variado entre outros. Já na Biologia, as Funções são aplicadas no estudo dos processos de fotossíntese das plantas.

A Função é um grande instrumento de modelagem de fenômenos físicos. A Função Polinomial do 2º grau em especial, pode ser vista por exemplos em esportes como a ginástica de solo, onde o centro de massa do atleta descreve uma trajetória parabólica. Pode ser observada também nas partidas de futebol, onde em muitos lances a trajetória do movimento da bola é uma parábola.

As Funções no Ensino Médio, possuem um papel relevante, uma vez que, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) fazem a proposta de que o Ensino Médio seja desenvolvido de forma contextualizada e interdisciplinar. Logo tratar os conteúdos de Função de forma contextualizada, pode significar para o aluno um maior aproveitamento nas relações existentes entre o conteúdo estudado e as situações presentes no seu dia a dia, desta forma o conteúdo estudado pode ser mais significativo aos olhos dos estudantes.

Aprender Matemática é aprender a resolver problemas encontrando modelos que se aproximem às situações reais. A resolução de tais problemas necessita em muitos casos, fazer uso dos significados e procedimentos matemáticos para que tais procedimentos possam ser aplicados em situações novas.

Segundo Pinheiro (2005), o principal objetivo ao se trabalhar com a resolução de problemas na Matemática é levar o educando a entender a resolução de problemas como um processo, onde o principal interesse está no raciocínio desenvolvido, e não apenas na resposta encontrada.

## 2.4. A RELAÇÃO ENTRE CRIPTOGRAFIA E FUNÇÃO INVERSA

A Criptografia, assim como a Matemática, também é uma ciência. A Criptografia é a ciência responsável por permitir que sejam desenvolvidas técnicas para proteger informações. A proteção consiste em tornar a mensagem criptografada ilegível para as pessoas em geral e legível apenas para quem ela se destina. Com isso, para que o receptor consiga compreender a mensagem que a ele foi enviada, é necessário que ele faça a operação oposta ou Inversa a operação feita pelo emissor. Uma mensagem aberta que pode ser lida por todos é denominada mensagem ou texto normal.

Assim sendo, o processo de converter um texto ou mensagem normal em um protegido é chamado de cifragem. A decifragem ou decodificação é a tarefa oposta, ou seja, que tem a finalidade de converter o texto cifrado em texto normal. Um conceito que é absolutamente fundamental para a Criptografia é o de Função, no que diz respeito ao sentido matemático de ser uma relação de transformação. Entre as técnicas de cifragens mais comuns existentes está a cifra de substituição, onde a cifragem é feita substituindo cada letra da mensagem por outra letra, símbolo ou número. Assim como toda cifragem ao se criar uma cifra de substituição é preciso que se possua uma espécie de regra para cifrar e uma regra Inversa para decifrar a mensagem. É neste sentido que fazemos uso das Funções e mais especificamente das Funções Inversas.

As Funções são definidas por regras (lei de formação), que servirão para determinar como faremos a associação entre os elementos do Domínio com os elementos do Contradomínio. Para que exista uma maior precisão no ato de cifrar e de decifrar, é interessante que ao se trabalhar com Função a mesma seja uma Função onde seja possível codificar e decodificar mensagem chegando sempre no mesmo elemento. Assim, serão necessárias algumas definições que servirão como base para a aplicação em técnicas de cifragem por substituição e transposição. Sendo elas.

Definição 1: Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos diferentes do vazio. Uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma Função, se e somente se, todo elemento de  $A$  estiver associado, por meio de  $f$ , a um único elemento de  $B$ . O conjunto  $A$  é chamado Domínio da Função e

o conjunto  $B$  Contradomínio. Esta definição é importante, pois, será utilizada para complementar os conceitos de Função Inversa.

Definição 2: Uma Função  $f$  é dita Injetora se para dois elementos distintos  $x_1$  e  $x_2$  do Domínio, temos  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Definição 3: Uma Função  $f$  é Sobrejetora, se cada ponto do Contradomínio é a imagem de pelo menos um ponto no Domínio, isto é, se para cada  $y \in B$  existe ao menos um  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ .

Definição 4: Se uma Função  $f$  é Injetora e Sobrejetora, então dizemos que  $f$  é uma Função Bijetora. São condições necessárias para que possamos estabelecer a Função Inversa, responsável pela decifragem do texto.

Logo, uma Função  $f$  admite Função Inversa, se e somente se,  $f$  for uma Função Bijetora. É importante garantir que a Função possua uma Inversa para que seja possível fazer a decifragem do texto. Uma Função  $f$  associa um elemento de  $A$  há um elemento de  $B$ . Já a Função Inversa,  $f^{-1}$ , associa cada elemento de  $B$  há um elemento de  $A$ .

Portanto, em Criptografia Funções Bijetoras são utilizadas como ferramentas para codificar mensagens e sua Inversa para decodificar.



## CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Este capítulo apresenta como se desenvolveu a pesquisa.

### 3.1. A METODOLOGIA

A pesquisa caracteriza-se por ser bibliográfica, exploratória e explicativa. Consiste em um estudo sobre a Aprendizagem Significativa em Educação Matemática, com o desenvolvimento de uma proposta de sequência didática, buscando proporcionar uma Aprendizagem Significativa no conteúdo de Função Inversa.

O estudo tem como principal fundamentação teórica, a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Deste modo para um maior entendimento da teoria buscamos contribuições de Moreira e Masini, que serviram de base para a construção da nossa proposta didática. Foram também realizadas leituras de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Médio, Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e textos que abordam o ensino-aprendizagem de Matemática, com foco voltado para Aprendizagem Significativa.

Como hipótese de pesquisa, partimos do seguinte questionamento: como construir um plano de trabalho, para um conteúdo de Matemática, que favoreça a Aprendizagem Significativa como preconizada na teoria de David Ausubel?

O foco do nosso estudo foi o conteúdo de Função Inversa, escolhemos pautar nosso estudo fazendo uso da Criptografia. Foi escolhido a Criptografia por dois aspectos, o primeiro a experiência anterior do autor com o tema, no curso de Sistemas de Computação, na disciplina de Redes de Computadores e o segundo, pois, a Criptografia trabalha com conceitos semelhantes aos usados nos conteúdos do Ensino Médio de Função Inversa e Matriz Inversa.

Assim, buscou-se produzir um material potencialmente significativo através de uma sequência de atividades a fim de se atingir uma Aprendizagem Significativa. Uma vez definidos o tema e a hipótese, outra questão surgiu: como construir um plano de trabalho para o ensino de Função Inversa a partir do tema Criptografia de

modo a favorecer a Aprendizagem Significativa como preconizada na teoria de David Ausubel? Diante destes questionamentos foram traçados os seguintes objetivos, sendo eles:

- a) Analisar a Teoria da Aprendizagem Significativa;
- b) Elencar os elementos que devem ser considerados ao se planejar uma aula a fim de favorecer a Aprendizagem Significativa;
- c) Analisar o Tema Criptografia e relacioná-lo com a Educação Matemática e, mais especificamente, com o conteúdo de Função Inversa.
- d) Construir uma proposta para o conteúdo de Função Inversa a partir da Criptografia, organizado de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa.

Após analisados todos estes aspectos partiu-se então para a construção do plano de trabalho, da proposta didática e definição das atividades que deles fazem parte.

A construção da proposta didática, foi definida por etapas, sendo que: Como já citado anteriormente, o conteúdo considerado foi o de Função Inversa. A primeira etapa do planejamento se constitui em verificar os conceitos envolvidos no conteúdo e os conhecimentos prévios necessários à sua aprendizagem.

A segunda etapa tem por objetivo servir de motivação, para despertar o interesse do aluno, que segundo Ausubel, representa uma das condições para a Aprendizagem Significativa ocorrer. Por fim utilizou-se a motivação inicial a questão da segurança de dados pessoais na Internet, levando ao tema Criptografia.

A terceira etapa intitulada de “O que o aluno já sabe?” Tem por objetivo descobrir o que os alunos possuem em sua estrutura cognitiva sobre o tema Criptografia.

Para a quarta etapa, intitulada de “Os Organizadores Prévios”, se faz necessária atividades que pudessem desenvolver ou despertar o conceito de Operação Inversa, tornando-se um Subsunçor na estrutura cognitiva do aluno.

Assim, foi apresentando um percurso histórico do desenvolvimento da Criptografia e as atividades escolhidas buscaram construir o conceito de Inversa por meio do ato de codificar e decodificar de forma que o aluno perceba que para cada associação feita ao par (letra, número) é possível que esta associação seja desfeita,

fazendo simplesmente a associação Inversa (número, letra), ou seja, estamos fazendo a ação Inversa. O conceito de Inversa vai aos poucos sendo refinado e detalhado.

A última atividade é um desafio, pois, não é dada a forma de decodificação e os alunos têm de descobri-la. A resolução desta atividade é a nossa ligação para introdução ao tema de Função Inversa. A seguir será formalizado o conteúdo de Função Inversa.

## **CAPÍTULO 4 – PROPOSTA DIDÁTICA**

Neste capítulo é apresentada uma sequência didática para o ensino de Função Inversa a partir do tema Criptografia.

### **4.1. A PROPOSTA DIDÁTICA**

#### **1ª Etapa – Tem por objetivo verificar os conceitos envolvidos.**

O conteúdo considerado para este trabalho é o de Função Inversa. A primeira etapa do planejamento se constituiu de verificar os conceitos envolvidos no conteúdo e os conhecimentos prévios necessários à sua aprendizagem, quais sejam:

- Conceito de Operação Inversa;
- Conceito e definição de Função;
- Domínio, imagem e Contradomínio de uma Função;
- Conceito e definição de Função Bijetora;
- Representação gráfica de uma Função;
- Simetria, Reflexão e Rotação.

Quanto aos pré-requisitos, são todos conceitos trabalhados em unidades de conteúdo imediatamente anteriores ao do conteúdo de Função Inversa. No caso, o professor já tem avaliado o conhecimento que os seus alunos possuem destes pré-requisitos, podendo optar por organizar um momento prévio para resgate dos mesmos se julgar necessário. Neste trabalho, consideramos que os conhecimentos prévios foram adquiridos com aproveitamento pelos alunos.

Em relação ao conceito de “Inversa”, este necessita ser ativado e preparado para atuar como um Subsunçor, a partir do qual o conteúdo poderá ser ancorado. Os alunos conhecem a palavra “Inversa” em Matemática relacionada ao conteúdo de Operações Inversas. Neste caso, Operação Inversa trabalhava mais com a ideia de desfazer uma operação: se  $4+8=12$  então  $12-8=4$  e  $12-4=8$ , se  $3 \times 5=15$  então  $15:5=3$  e  $15:3=5$ . Este “desfazer” não implica necessariamente em uma relação biunívoca, elemento a elemento, como na Função. Toda operação realizável dentro dos campos numéricos estudados admite Operação Inversa, mas nem toda Função admitirá Função Inversa, salvo restrições convenientes em seu Domínio. Por esse motivo não optamos por “usar” como Subsunçor a “ideia” de Inversa a partir das Operações Inversas, mas sim por trabalhar esta ideia, por meio da Criptografia, na qual a relação é de sobrejeção, com uma atividade preparada para ser utilizada como Organizadores Prévios.

**2ª Etapa – Tem por objetivo promover a motivação, despertar o interesse do aluno, segundo Ausubel, uma das condições para a Aprendizagem Significativa ocorrer.**

A proposta para o início da aula busca despertar o interesse do aluno de forma que ele se sinta motivado a aprender, o que segundo Ausubel, é uma condição para a Aprendizagem Significativa. Nesta perspectiva busca-se trabalhar a partir de algo comum aos alunos e que lhes passa gerar certa curiosidade em aprender, e descobrir mais.

A interação com a Internet é algo corriqueiro na vida das pessoas hoje em dia, e a segurança dos dados é um problema real que afeta a todos, estando constantemente exposto na mídia, por isso, foi escolhido como fator desencadeador para as atividades que se seguem.

Neste primeiro momento do planejamento são feitos os seguintes questionamentos: "Você acredita que usar a conta bancária via internet é seguro?", "Você teria medo de fazer transações bancárias via internet?", "O que nos garante a segurança dos dados?".



Figura 5: Slide 1 e 2 – Introdução.

A discussão sobre estas questões, tão atuais e relevantes no cotidiano das pessoas se configuram como perguntas motivacionais, que preparam para uma situação problema: *O que se usa para garantir a segurança dos dados?* A resposta a essa pergunta é que consideramos como um fator motivacional e que possa gerar a curiosidade e vontade de aprender como isso é feito.

A Criptografia é a base do material potencialmente significativo e através do qual serão trabalhados os Organizadores Prévios. Seu conceito começa a ser discutido a partir da apresentação das seguintes manchetes:

- *Criptografia atrapalha polícia, diz promotor.*
- *Obama diz ser contrário ao uso da Criptografia em smartphones.*
- *Conheça cinco apps para segurança e Criptografia das mensagens do seu celular.*
- *Amazon lança novo serviço de e-mail criptografado.*

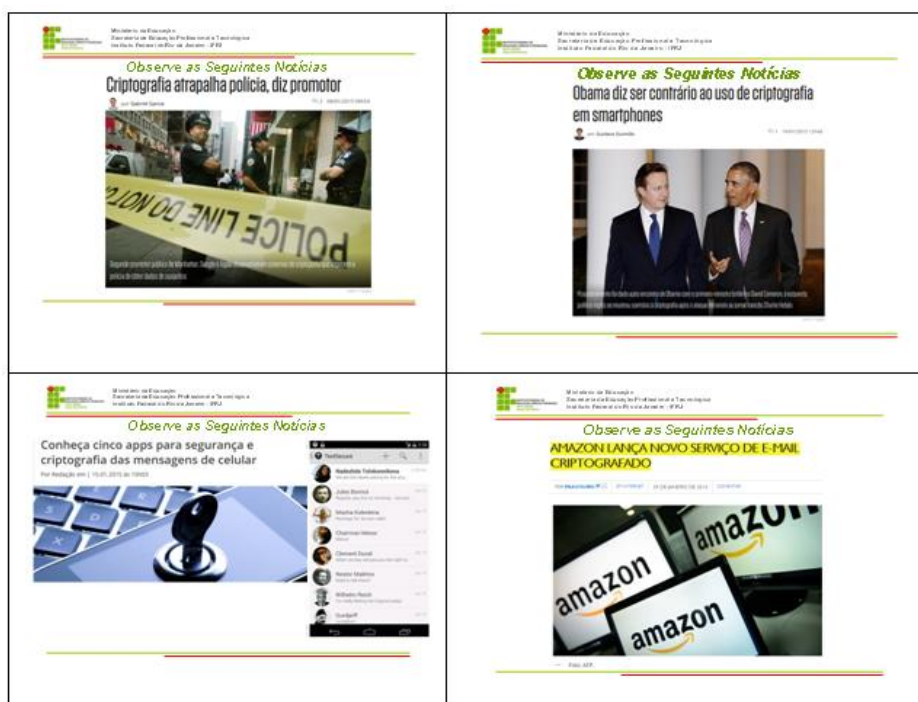


Figura 6: Slide de 3 a 6 – Criptografia.

**3ª Etapa – O que o aluno já sabe? – Tem por objetivo identificar o que o aluno já sabe.**

É feita a seguinte pergunta: "*Mas o que é Criptografia?*". Esta pergunta corresponde à ideia inicial da teoria de Ausubel que é descobrir o que o aluno já sabe, o que tem em sua estrutura cognitiva, de modo que esta discussão até aqui nos aponte para o que o aluno já conhece do tema, uma vez que ele será base para os Organizadores Prévios. Espera-se que os alunos respondam, a partir das discussões e informações das reportagens que Criptografia é uma forma de esconder os dados reais da informação.

O conceito de Função Inversa será potencialmente significativo para o aluno que já tiver o conceito de Função e o de Operação Inversa presentes em sua estrutura cognitiva, aos quais poderão ser ancorados o de Função Inversa como uma categoria de Funções. O conceito de Função já foi considerado, como dito anteriormente, como um elemento presente na estrutura cognitiva do aluno. No entanto, o de Inversa, no sentido de Função Inversa, como aquela ação que é capaz

de dado um elemento resultante de uma transformação nos leve ao elemento original, não.

#### **4ª Etapa – Os Organizadores Prévios –Tem por objetivo desenvolver os Organizadores Prévios.**

Assim se faz necessária uma atividade que possa usar como Organizador Prévio o conceito de Operação Inversa que se tornará um Subsunçor na estrutura cognitiva do aluno. Este conceito é amplo, e pode funcionar como subordinador de outros conceitos, como um ponto de ancoragem no processo de assimilação de novos conceitos. Ideia reforçada por Brum:

O estudante deve ser exposto a um conteúdo escolar potencialmente significativo, ou seja, que tenha sentido lógico, sendo que as novas informações possam se relacionar com ideias básicas relevantes já construídas e disponíveis na estrutura cognitiva dos estudantes. (BRUM, 2013, p. 04).

O conceito de Inversa assim compreendido pelo aluno e presente em sua estrutura cognitiva será fundamental para que o novo conteúdo tenha o sentido lógico. A ideia de processo inverso é que lhe dará condições de compreender a lógica dos processos e algoritmos utilizados para determinar uma Função Inversa, aumentando as chances de que este seja aprendido de forma significativa.

Como o conteúdo a ser aprendido não é de todo “novo” para o aluno, podemos classificar o conceito de Inversa a partir da Criptografia como um Organizador Prévio "comparativo", já que estamos usando para integrar novas ideias a conceitos similares já presentes na estrutura cognitiva do aluno.

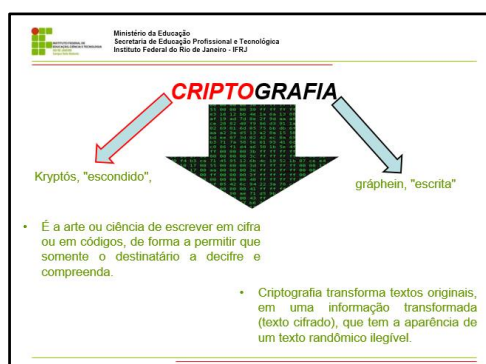
Tendo em mente que os Organizadores Prévios, são as conexões e construções pessoais que os alunos possuem, e que são elaborados de maneira única em cada pessoa, de acordo com a sua interação cotidiana com o mundo, vale salientar que ao se falar em Aprendizagem Significativa, devemos ter em mente toda a estrutura semântica do material a ser apresentado. Deste modo, a elaboração e



execução deste planejamento deve garantir que a linguagem utilizada pelo professor e no material didático seja o mais próximo possível da linguagem cotidiana do aluno.

Até o momento o planejamento já apresentou aos alunos os Organizadores Prévios e relacionou-os com o conhecimento do aluno sobre o tema. Mais algumas informações relevantes são expostas.

Definição: "*Criptografia é a arte ou ciência de escrever em cifra ou em códigos, de forma a permitir que somente o destinatário a decifre e compreenda*". E complementada com a seguinte informação, "*A Criptografia transforma textos originais, em uma informação transformada (texto cifrado), que tem a aparência de um texto randômico (gerado aleatoriamente) ilegível*".



**Figura 7: Slide 7 - O que é Criptografia?**

Neste momento são mostrados instrumentos que foram usados ao longo da história para que mensagens fossem criptografadas ou escondidas. Como por exemplo, Bastão de Licurgo, Cifra de César, Cilindro de Jefferson, Código Morse, A máquina ENIGMA e o Colossus.



Figura 8: Slide 8 a 11 - Exemplos de Técnicas de Criptografia ao longo da História.

Para cada um dos instrumentos de Criptografia supracitados, é feita uma indagação para os alunos, a fim de saber se eles possuem pelo menos uma ideia de como era feita a Criptografia com cada um deles. Exemplificando para os alunos como o processo ocorria.

Chegamos então a comentar como a Criptografia é usada nos nossos dias atuais. Exemplificando que, *"Nos dias atuais, com o aumento do comércio e de transações eletrônicas que requerem algum tipo de segurança, a Criptografia tornou-se uma ferramenta fundamental para a utilização da Internet"*.

Após a discussão com a turma e apresentada a definição de Criptografia e alguns exemplos, a intenção deste material é envolver os alunos em atividades potencialmente significativas, apresentadas de forma lógica e que utilize os "pontos de ancoragem" que foram lançadas no primeiro momento da aula. Deste modo temos uma atividade que Ausubel define como aprendizagem por descoberta, que é caracterizada pelo fato do conteúdo a ser aprendido ser descoberto pelo educando.

O aluno realiza tarefas antes de atingir de fato a aprendizagem de Função Inversa. A Criptografia é utilizada para que os alunos desenvolvam e agreguem mais informações ao conceito de Inversa.

Nesta parte da aula iniciam, às atividades.

**Atividade 1 - Esta atividade tem por objetivo apresentar uma das formas mais simples de Criptografia, a Criptografia de substituição de letras por números.**

A atividade a seguir, apresenta uma das formas de Criptografia mais básicas, que consiste em fazer a substituição das letras por números. Desta forma, cada letra é associada a um número e fazemos a substituição da letra pelo número. Neste exercício trabalharemos apenas com números para que os alunos não confundam o número do texto, com o número da substituição no momento da criação das palavras, que é feita letra por letra. A separação das palavras é feita por um traço (-).

|          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> | <b>G</b> | <b>H</b> | <b>I</b> | <b>J</b> | <b>K</b> | <b>L</b> | <b>M</b> |
| 0        | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       |
| <b>N</b> | <b>O</b> | <b>P</b> | <b>Q</b> | <b>R</b> | <b>S</b> | <b>T</b> | <b>U</b> | <b>V</b> | <b>X</b> | <b>Y</b> | <b>W</b> | <b>Z</b> |
| 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20       | 21       | 22       | 23       | 24       | 25       |

**Figura 9: Criptografia de Substituição**

A) – Tendo como base a tabela acima, codifique a frase: **"AGORA EU SEI EXATAMENTE O QUE FAZER"** utilizando a tabela.

Mensagem Codificada: \_\_\_\_\_

B) – Decodifique a mensagem a seguir, utilizando a tabela: **"|16-20-0-13-19-14| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |17-0-11-0| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |2-17-4-18-2-4|"**.

Mensagem Decodificada: \_\_\_\_\_

A ideia é que ao realizar tal atividade o aluno perceba que para cada associação feita ao par (letra, número) é possível que esta associação seja desfeita, fazendo simplesmente a associação Inversa (número, letra), ou seja, estamos fazendo a ação Inversa.

Em seguida, é dito aos alunos que: O ato de fazer alguma coisa e depois desfazê-la é um ato comum que é praticado todos os dias. Avaliando rapidamente, conseguimos pensar em algumas ações que realizamos e que depois fazemos a ação Inversa. Todas as ações a seguir os alunos já possuem, temos então uma tentativa de trazê-los à tona, para serem utilizados também como pontos de ancoragem. Sendo as ações diárias:

- *Abrir e fechar a porta de casa;*
- *Entrar na sala de aula para assistir às aulas e sair quando elas terminam;*
- *Subir as escadas e descer as escadas;*
- *Colocar a chave na fechadura e retirar a chave da fechadura;*
- *Abrir o zíper da mochila e fechar o zíper da mochila.*

Em todos estes casos, existe uma ação Inversa, ou seja, o ato de abrir e o ato de fechar, o ato de subir e o ato de descer, o ato de colocar e o ato de retirar.

Isto também ocorre na Matemática. Matematicamente também é possível fazer e desfazer ações, que são entendidas como Operações Inversas. No caso da soma a Operação Inversa é a subtração, no caso da multiplicação a divisão.

Assim, é feito o seguinte questionamento: "Como faremos para decodificar as mensagens que foram codificadas?" Espera-se que os alunos respondam que basta olhar na tabela os números que representam as letras e em seguida fazer a substituição dos mesmos. Caso os alunos não respondam fazendo referências à tabela, faremos questionamentos sobre o uso da tabela e a associação das letras e números nela.

**Atividade 2 – O Código de César: Tem por objetivo incentivar aos alunos a fazerem uso de uma das primeiras formas de Criptografia que se tem notícia, a Cifra de César.**

O conceito de Criptografia de substituição, será reforçado, uma vez que a Cifra de César utiliza tal metodologia.

Suetônio, escritor romano que viveu no início da era cristã (69 d.C.), em seu livro *Vida dos Césares*, escreveu a biografia dos imperadores romanos de Júlio César, a Domiciano. Na publicação, o autor conta que Júlio César (100 – 44 a.C.) usava na sua correspondência militar uma chave de substituição muito simples, na qual cada letra da mensagem original era substituída pela letra que a seguia em três posições no alfabeto. A letra A era substituída pela D, a B pela E, e assim sucessivamente.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Y | W | Z |
| D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Y | W | Z | A | B | C |

Figura 10: Cifra de César

- A) – Com base na tabela acima, como podemos fazer para decodificar utilizando a cifra de César?

---



---



---

- B) – Tendo por base a tabela da Cifra de César mostrada acima, codifique a mensagem a seguir: **"EU VOU PEDIR PROS ANJOS CANTAREM POR MIM"**.

Mensagem

Codificada: \_\_\_\_\_

- C) – Tendo como base a tabela da Cifra de César, mostrada acima, decodifique a mensagem a seguir: **"SHQVHL HP XH JYDUGDU, PDV IRL PHOKRU DVVLP"**.

Mensagem Decodificada: \_\_\_\_\_

A ideia é que ao se realizar esta segunda atividade, se tenha mais referências a ações Inversas realizadas na Criptografia, a fim de fixar o ato de fazer e desfazer. O conceito de Inversa vai aos poucos sendo refinado e detalhado.

Após concluída a atividade, é perguntado aos alunos: por que nesta forma de codificação é tão fácil descobrir como a mensagem foi codificada? É possível fazer uma variação desta forma de codificação mantendo as mesmas características de associar letras? Após uma breve discussão com a turma, é explicado para os alunos que mesmo que avancemos tantas casas quantas forem possíveis, ainda sim a forma de compreender a mensagem é simples de ser decodificada, pois, só teremos 26 variações de codificação neste tipo de Criptografia. Em seguida iniciamos à atividade 3.

**Atividade 3 – Seu Código: Essa atividade tem como objetivo observar se os alunos compreenderam que é necessário fazer o código e pensar Inversamente para decodificá-lo.**

Essa atividade deve ser realizada em trios, nela os alunos devem criar uma forma de codificar e decodificar as mensagens. Eles devem deixar evidente a forma como é feita a codificação e como devemos proceder para retornar à mensagem original (decodificação).

- A) – Com a ajuda dos seus companheiros de grupo, crie uma forma de codificação, e em seguida, codifique a seguinte mensagem: "Nós estudamos no IFRJ"

Obs.: Lembre-se de anotar detalhadamente como vocês criaram a forma de codificar a mensagem.

---

---

---

- B) – **DESAFIO**: Observe bem a seguinte mensagem codificada e tente descobrir qual forma de codificação foi utilizada. Em seguida escreva a mensagem decodificada.

**B NBUFNBUJDB F GBTDJOBOUT**

Forma de Codificação:

---

---

---

Mensagem Decodificada: \_\_\_\_\_

É pedido que voluntariamente dois ou três grupos, coloquem a mensagem codificada no quadro, para que os demais alunos possam tentar descobrir qual a forma de codificação utilizada. Esta explicação, por parte dos grupos, é a ligação para introdução ao tema de Função Inversa.

A compreensão do conceito de Inversa deve estar evidente como sendo aquele que leva o elemento transformado ao seu original. Como no caso da codificação e decodificação que é utilizado na Criptografia. Desta forma a Criptografia se utiliza de uma regra específica para decodificar a partir da regra de codificação. Logo, para que seja possível fazer e desfazer tal processo, é necessário que se estabeleça uma relação um a um entre dois elementos, original e codificado.

Deste modo, ao se aplicar a regra da Inversa ao termo codificado, e para que não exista dúvida ao se desfazer o processo, o elemento real a ele associado, deve sempre existir. Esses elementos são a base para a compreensão de que a existência da Função Inversa tem de estar atrelada (subordinada) à condição de Bijeção, para isso, são propostas duas atividades, para verificar a necessidade de a Função ser Injetora e a segunda para verificar a necessidade de ser Sobrejetora.

**Atividade 4 – Tem por objetivo verificar se os alunos compreenderam que para decodificar uma mensagem é necessário fazer a operação Inversa da Codificação.**

Tendo por base a seguinte mensagem codificada "**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**", descubra como foi feita a codificação da mensagem e em seguida crie uma forma de decodificá-la. Obs.: Lembre-se de anotar detalhadamente como vocês acham que é a forma de codificar a mensagem. E como fazemos para decodificá-la.

**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**

Forma de Codificação:

---



---



---

Mensagem Decodificada: \_\_\_\_\_

Nesta atividade colocamos a sua resolução para evidenciar o aparecimento de Funções como codificadores, e a necessidade de uma Função Inversa para decodificar.

**Respostas da Atividade**

- A) – Tendo por base a seguinte mensagem codificada "**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**", descubra como foi feita a codificação da mensagem e em seguida crie uma forma de decodificá-la.

A mensagem foi decodificada fazendo a soma de 5 para cada posição da letra, por exemplo a letra A que se encontra na primeira posição do alfabeto foi acrescida de 5 posições e assim feita a substituição pela letra F. Assim sendo a chave de codificação usada foi  $f(x) = x + 5$ . Onde  $x$  representa o número da posição da letra no alfabeto.

Mensagem Decodificada: "**BEM VINDO A FUNCAO INVERSA**". A forma utilizada para decodificar a mensagem foi encontrando a Inversa da Função acima  $g(x) = x - 5$ , onde  $x$  representa a posição que a letra se encontra no alfabeto, por exemplo quando na mensagem codificada temos a letra G (posição 7), logo,  $g(7) = 7 - 5 \rightarrow g(7) = 2$ , logo letra B. O mesmo vale para todas as letras do alfabeto.

Assim, temos a decodificação feita através da Função Inversa, portanto:  $F(x) = x + 5$  e sua Inversa  $G(x) = x - 5$

Tais ideias são trabalhadas oralmente com os alunos através das intervenções pedagógicas. O seguinte questionamento será feito:



Mas o que é Função Inversa?

Vamos observar atentamente as Funções que encontramos no exercício anterior  $f(x)$  e  $g(x)$ , onde  $x$  representava a posição da letra no alfabeto. Assim, chegamos à conclusão de que  $F(x) = x + 5$  e  $G(x) = x - 5$ .

Para resolver o exercício do desafio fizemos os seguintes cálculos:

$$x = 2(\text{letra B}) \rightarrow f(2) = 2 + 5 = 7(\text{letra G})$$

$$x = 5(\text{letra E}) \rightarrow f(5) = 5 + 5 = 10(\text{letra J})$$

$$x = 13(\text{letra M}) \rightarrow f(13) = 13 + 5 = 18(\text{letra R})$$

Logo, os valores 7, 10 e 18 são imagens da Função  $f$  no Contradomínio, formando os pares ordenados  $(x, f(x))$ . E como se está trabalhando com codificação os valores são as codificações para as letras B, E e M:

Gerando os pares:

| $x$ | $f(x) = x + 5$ | Pares    | Troca de Letras |
|-----|----------------|----------|-----------------|
| 2   | 7              | (2, 7)   | (B, G)          |
| 5   | 10             | (5, 10)  | (E, J)          |
| 13  | 18             | (13, 18) | (M, R)          |

Porém, para voltarmos para as letras originais precisamos fazer uma Operação Inversa e para isso utilizamos a Função  $g(x) = x - 5$ .

Com isso chegamos a seguinte conclusão:

$$x = 6(\text{letra G}) \rightarrow f(6) = 7 - 5 = 2(\text{letra B})$$

$$x = 10(\text{letra J}) \rightarrow f(10) = 10 - 5 = 5(\text{letra E})$$

$$x = 18(\text{letra R}) \rightarrow f(18) = 18 - 5 = 13(\text{letra M})$$

Gerando os pares:

| x  | $g(x) = x - 5$ | Pares    | Troca de Letras |
|----|----------------|----------|-----------------|
| 7  | 2              | (7, 2)   | (G, B)          |
| 10 | 5              | (10, 5)  | (J, E)          |
| 18 | 13             | (18, 13) | (R, M)          |

Observando bem as duas tabelas, podemos notar que é possível obter os pares da Função  $g$  invertendo a ordem dos pares da Função  $f$ .

Por isso, podemos dizer que  $g$  é a *Função Inversa de  $f$*  e a representamos  $g(x) = f^{-1}(x)$ .

A dinâmica proposta nesta última atividade busca fazer ligações de/para o organizador com novas informações referente ao conteúdo propriamente dito. Temos atividades que se encaixam na teoria de Ausubel como sendo atividades de Reconciliação Integradora, estas atividades possuem o objetivo de trazer novas informações a respeito das condições necessárias para que se possa trabalhar com Funções Inversas.

Como os alunos já estudaram previamente conteúdos sobre Funções Injetivas e Sobrejetivas, já conhecem as definições dos conceitos abordados. Assim eles estarão de posse de conhecimentos que lhes possibilitarão, refletir e questionar o porquê de tais condições serem necessárias.

A Criptografia é mais uma vez utilizada para trazer à tona e fazer ligações com ideias que já estão previamente estabelecidas na estrutura cognitiva dos alunos. Como os conceitos de injetividade e sobrejetividade já estão presentes, as atividades visam não só resgatar tais conceitos, como também agregar e/ou reorganizar significados a elementos já existentes. É possível que se tenha uma recombinação dos conceitos previamente apresentados aos alunos e, portanto, presentes na sua estrutura cognitiva. Caracterizando assim o que se define como Reconciliação Integrativa.

**Atividade 5 (Injetora) – Tem como objetivo evidenciar para os alunos a obrigatoriedade das Funções serem Injetoras para que seja possível obter a Inversa.**

A atividade que se segue tem como objetivo mostrar para os alunos que temos de trabalhar sempre com Funções Injetora para que seja possível obter a Inversa. Caso contrário seria possível que letras diferentes fossem codificadas da mesma forma. Uma vez que isso ocorra como faríamos para desfazer a codificação? Seria algo impossível visto que uma ou mais letras estariam associadas ao mesmo símbolo.

|   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F  | G | H | I | J | K | L | M |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5  | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |
| N | O | P | Q | R | S  | T | U | V | X | Y | W | Z |
| 6 | 1 | 7 | 8 | 9 | 10 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Tendo por base a tabela acima decodifique a mensagem que se segue:

**|6-1-1| |1| |7-1-10-10-1-3-1-4| |10-1-2-1-9|**

---



---

**Atividade 6 (Sobrejetora) – Tem como objetivo evidenciar para os alunos a obrigatoriedade de as Funções serem Sobrejetoras para que seja possível obter a Inversa.**

A próxima atividade tem seu foco voltado para mostrar que além de termos que trabalhar sempre com Funções Injetoras na codificação, devemos ter também obrigatoriamente que a Função seja Sobrejetora, para que seja possível obter a Inversa. Caso contrário seria possível que algumas letras ficassem sem associações na hora de fazer a codificação ou decodificação. O que impossibilitaria de fazer a decodificação

| A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| N  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 14 | 15 | 17 | 25 | 26 | 27 | 29 | 32 | 33 | 34 | 37 | 39 | 40 |

Tendo por base a tabela acima decodifique a mensagem que se segue, lembrando que os números com traço (-), não possuem letras associadas:

**|14-1-15| |5| |17-15-27-27-9-33-5-12|**

---



---

As duas atividades anteriores (5 e 6), servem para mostrar que, uma vez que trabalhamos com Funções Inversas temos sempre que estar utilizando Funções que sejam ao mesmo tempo Injetora e Sobrejetora, logo, Funções Bijetoras. Assim todo elemento do Domínio terá um correspondente no Contradomínio e todo o conjunto Imagem da Função cobrirá o Contradomínio. Desta forma sempre será possível se obter a Inversa de uma Função.

Então se  $f(x) = x + 5$ ,  $f^{-1}(x) = x - 5$ .

Na Função  $f$ , podemos fazer destaque para duas características importantes sendo:

O Contradomínio de  $f$  coincide com o conjunto das Imagem, ou seja, todo elemento do Contradomínio é correspondente de algum elemento do Domínio;

Cada elemento do Contradomínio de  $f$  é imagem de um único elemento do Domínio.

Estas condições devem ser satisfeitas para que a Função tenha uma Inversa ou seja Invertível. As Funções que satisfazem a essas duas condições são denominadas Funções Bijetoras. Portanto, apenas as Funções Bijetoras possuem

Inversas. Dada uma Função  $f: A \rightarrow B$ , Bijetiva, denomina-se Função Inversa de  $f$  a Função  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tal que, se  $f(a) = b$ , então  $f^{-1}(b) = a$ , com  $a \in A$  e  $b \in B$ .

### Determinando e Representando a Função Inversa

Caso a Função seja Bijetora, e, portanto, possua Inversa, é possível determinar a sua Inversa. Para isso, "trocamos" a variável  $x$  por  $y$  na lei de formação, e em seguida "isolamos" o  $y$ , obtendo assim, a lei que define a Função Inversa. Vale ressaltar que precisamos ter cuidado com o Domínio uma vez que determinamos a Inversa. A representação da Função Inversa é feita colocando um  $-1$  como expoente na letra que representa a Função, como por exemplo, seja  $f$  uma Função invertível qualquer  $f^{-1}$  é a representação para denominar sua Inversa.

Exemplo: Obtenha a lei da Função Inversa da Função  $f$  dada por  $y = x + 5$

$$y = x + 5$$

↓ ↓

$$x = y + 5 \rightarrow \text{Trocando } y \text{ por } x \text{ e } x \text{ por } y$$

$$y = x - 5 \rightarrow \text{Isolando } y$$

Então  $y = x - 5$  é a lei de formação da Função Inversa dada por  $y = x + 5$ .

Esta atividade tem por objetivo trabalhar a construção do gráfico da Função Inversa, baseado nas características do gráfico original e da inversão dos pares ordenados, além também da reflexão da reta de simetria do gráfico  $y=x$ .

**Atividade 7 – GeoGebra – Tem por objetivo trabalhar a construção do gráfico da Função Inversa, a partir das características do gráfico da Função original e Invertendo os pares ordenados.**

Nesta atividade é pedido que os alunos trabalhem no software GeoGebra<sup>2</sup>, para trabalhar de maneira dinâmica com os gráficos.

---

<sup>2</sup> O GeoGebra é um programa de matemática dinâmica, feito com o intuito de ser utilizado em sala de aula, o qual junta aritmética, álgebra, geometria e cálculo. O GeoGebra possibilita o desenho de pontos, vetores, segmentos, linhas e funções, e ainda, a alteração dinâmica deles, assim que terminados. Com o GeoGebra também é possível inserir equações e coordenadas diretamente nos gráficos.

Tendo por base a Função  $f(x) = x + 3$ , determine a sua Inversa algebricamente, em seguida faça o gráfico da Função original. Marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos pontos inversos  $(y,x)$  e trace o gráfico da Inversa que foi determinada algebricamente.

Agora, escolha uma Função e determine a sua Inversa algebricamente, depois faça o gráfico da Função original, marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos  $(y,x)$  e trace a Inversa que foi determinada algebricamente. Trace a reta  $y=x$  e verifique as características da Função original em relação à Inversa. Em seguida responda:

O que ocorre com os pares ordenados  $(x,y)$  da Função original em relação à Função Inversa?

Existe alguma relação entre o gráfico da Função original e reta  $y=x$  e o gráfico da Inversa?

### Respostas da Atividade

Tendo por base a Função  $f(x) = x + 3$ , determine a sua Inversa algebricamente, em seguida faça o gráfico da Função original. Marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos pontos inversos  $(y,x)$  e trace o gráfico da Inversa que foi determinada algebricamente.

Determinando algebricamente a Inversa de  $f(x) = x + 3$ .

$$y = x + 3$$

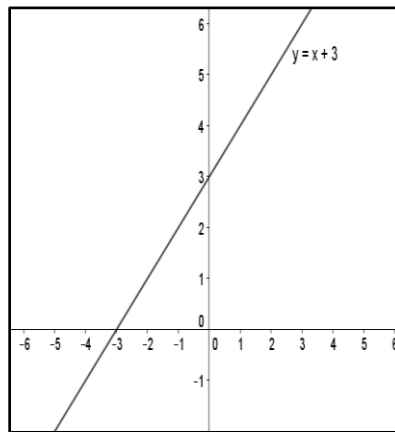
↓ ↓

$$x = y + 3 \rightarrow \text{Trocando } y \text{ por } x \text{ e } x \text{ por } y$$

$$y = x - 3 \rightarrow \text{Isolando } y$$

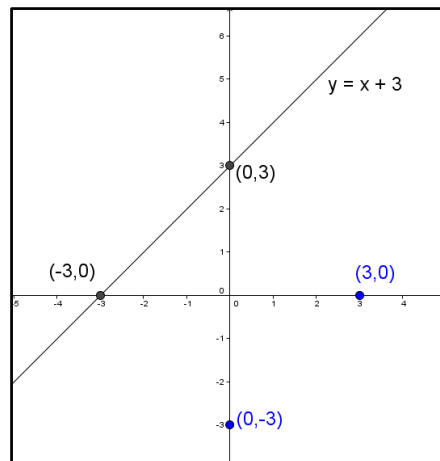
Então  $y = x - 3$  é a lei de formação da Função Inversa dada por  $y = x + 3$ .

Gráfico da Função original:



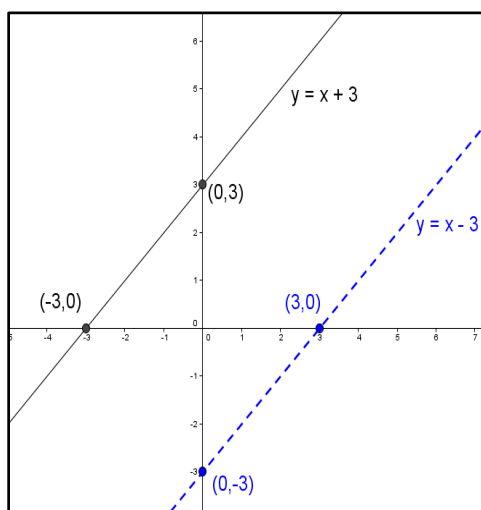
**Figura 11: Gráfico da Função Original.**

Marcando os pontos  $(x,y)$  e determinando os pontos  $(y,x)$ .



**Figura 12: Marcação dos Pontos da Inversa.**

Traçando o gráfico da Inversa que foi determinado algebricamente.



**Figura 13: Gráfico da Função Inversa e da Original.**

Para as questões propostas teremos as seguintes respostas:

O que ocorre com os pares ordenados  $(x,y)$  da Função original em relação à Função Inversa?

Os pares ordenados da Função original aparecem Permutados (em ordem Invertida) na Função Inversa, ou seja, para todo par ordenado  $(x,y)$  da Função original, eles aparecerão na Inversa como sendo  $(y,x)$ .

Existe alguma relação entre o gráfico da Função original e reta  $y=x$  e o gráfico da Inversa?

Sim. O gráfico da Função original é Simétrico em relação à reta  $y=x$ .

Como visto anteriormente a teoria de Ausubel é composta por etapas cujo objetivo final é a construção de um material potencialmente significativo. O autor destaca que as primeiras e, geralmente mais difíceis tarefas são as que determinam a estrutura conceitual do que será ensinado. Nesta etapa deve-se identificar quais serão os Subsunoçores que terão relevância para a aprendizagem do novo conteúdo, bem como identificar a estrutura cognitiva do aluno.

Assim sendo:

- A primeira etapa do nosso planejamento, visa verificar os conceitos envolvidos no conteúdo de Função Inversa, bem como os conhecimentos prévios necessários à sua aprendizagem.



- A segunda etapa é a etapa de motivação, que visa despertar o interesse do aluno, segundo Ausubel, uma das condições para a Aprendizagem Significativa ocorrer.
- A terceira etapa visa descobrir o que o aluno já sabe sobre o tema, ou seja, se possui Subsúncos relevantes, fazemos uso de diversas formas de Criptografia adotadas ao longo da história, como também formas de Criptografia simples, tendo por objetivo enraizar no aluno o conceito de fazer e desfazer, uma operação retornando sempre à informação original.
- A quarta etapa está centrada nos Organizadores Prévios, atividades com níveis crescentes de refinamento, tendo em mente a reconciliação integradora visando trazer novas informações a respeito das condições necessárias para que se possa trabalhar com Funções Inversas.

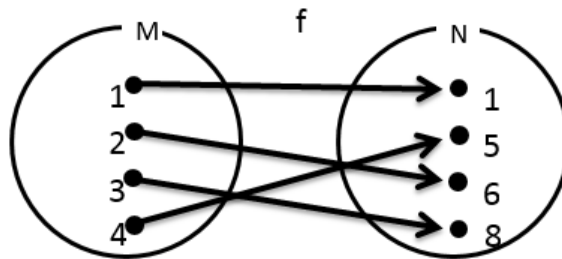
A próxima etapa do planejamento 5ª etapa visa realizar uma avaliação a respeito da eficácia do planejamento proposto. Sobre avaliação em Aprendizagem Significativa Moreira (1999) destaca que, só tem sentido se o ensino tiver sido organizado de modo a facilitar a Aprendizagem Significativa.

### **5ª Etapa – Tem por objetivo apresentar as atividades avaliativas.**

Apresentamos a seguir as atividades avaliativas.

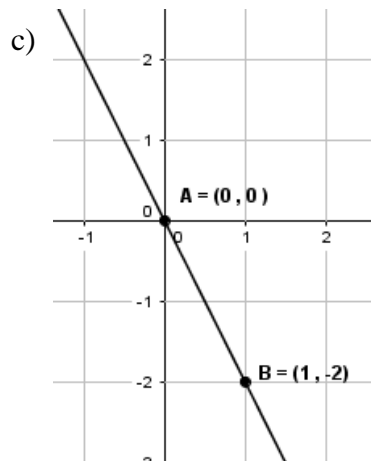
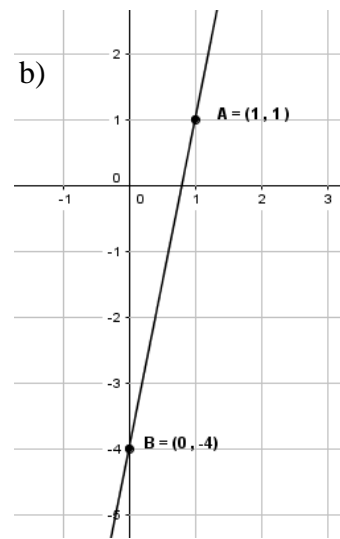
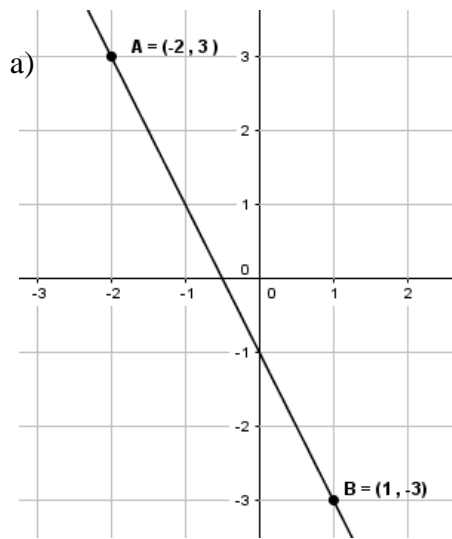
A primeira atividade, visa verificar se os alunos compreenderam que ao se fazer a Inversa de uma Função, os pares ordenados  $(x,y)$  da original, aparecerão como pares ordenados da Inversa como sendo  $(y,x)$ .

1. O esquema a seguir representa uma Função Bijetora  $f$ , de  $M$  em  $N$ . Faça o esquema da Função Inversa.



Já a segunda atividade trabalha com Funções do primeiro grau, assim, o exercício tem por objetivo verificar se os alunos compreenderam que, ao se fazer o gráfico de uma Função Inversa, geometricamente é necessário Inverter todos os pares ordenados  $(x,y)$  da original, para pares ordenados  $(y,x)$  da Inversa, logo os pontos encontrados para a Inversa, por se tratar de uma Função Polinomial do primeiro grau, já estarão na posição do gráfico da Inversa.

2. Dados os gráficos a seguir determine o gráfico da Inversa.



A atividade número três, objetiva verificar se o aluno é capaz de encontrar algebricamente a Inversa de uma Função. Ou se o aluno foi capaz de entender como se faz para encontrar algebricamente a Inversa de uma Função.

3. Obtenha a Função Inversa das seguintes Funções:

a)  $f(x) = 3x - 2$

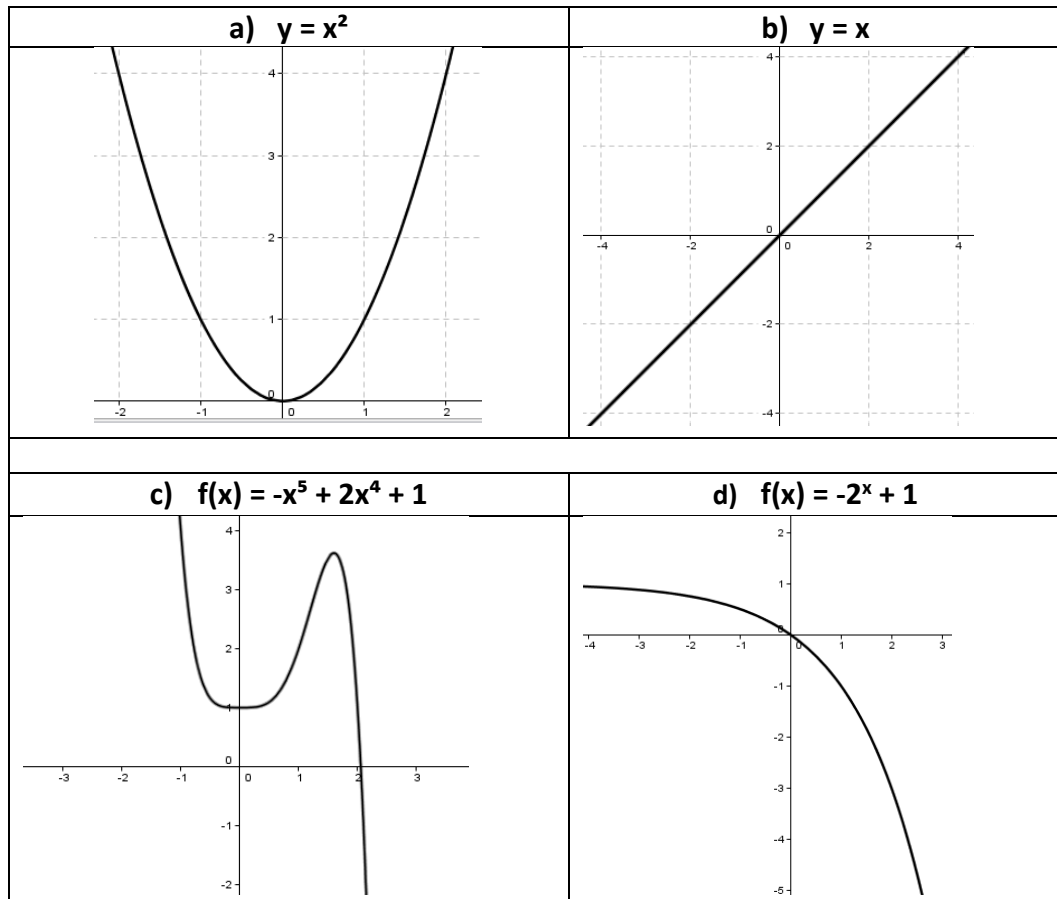
b)  $f(x) = x - 7$

c)  $f(x) = 3x - 6$

A atividade quatro serve para verificar se os alunos entenderam que são necessárias algumas condições para determinar a Inversa de uma Função, entre elas a Função deve ser ao mesmo tempo Injetora e Sobrejetora, com isso os alunos

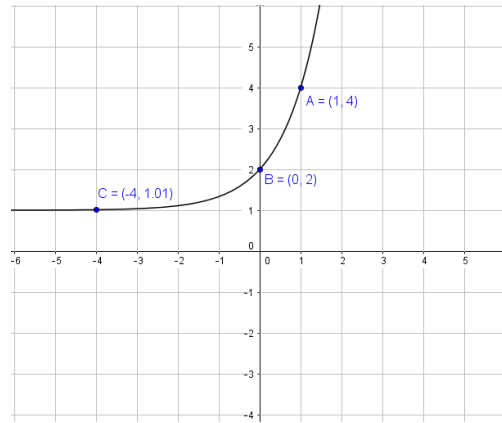
devem se atentar à forma do gráfico da Função original. Pois, alguns dos gráficos propostos no exercício não possuem Inversa, justamente pelo fato de não serem Funções Injetoras e Sobrejetora.

4. Verifique graficamente e algebricamente se as Funções possuem Inversa. E justifique sua resposta.



A quinta atividade, visa verificar se os alunos compreenderam que ao se fazer o gráfico da Inversa, basta que sejam invertidos os pares ordenados  $(x,y)$  da original e traçados os traçado o gráfico da Inversa obedecendo a sequência dos pontos e formato do gráfico da original.

5. A partir do gráfico dados desenhe o gráfico da sua Inversa.



## **CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Logo no início desta pesquisa, a intenção era verificar se usando a Criptografia como contexto para o ensino de Função Inversa tornaríamos a Aprendizagem Significativa. No entanto, ao longo das leituras e aprofundamento sobre o que é a Aprendizagem Significativa e como ela se desenvolve percebeu-se que teríamos, antes de tudo, de responder a seguinte pergunta: é possível construir uma sequência didática para o ensino de Função Inversa usando a Criptografia dentro do que preconiza a Aprendizagem Significativa? Assim, partimos para o desafio de construir esta sequência didática.

Já havia estudado sobre a Aprendizagem Significativa na disciplina sobre Teorias de Aprendizagem, mas este trabalho exigiu um aprofundamento no tema e nos conceitos que a norteiam, permitindo fazer associação entre os conceitos existentes na teoria de Ausubel e buscar atividades que de fato se encaixem em tal teoria. Esta foi uma tarefa bastante árdua, na qual foram enfrentadas algumas dificuldades, principalmente porque os textos trazem pouquíssimos exemplos da utilização da teoria de Ausubel em Matemática.

O processo de construção da sequência foi um processo marcado por diversos momentos de impasse e de modificação. O primeiro deles foi em como abordar o tema. A princípio foi pensada uma aula explicando o que seria a Criptografia, mas Ausubel enfatiza muito no despertar a vontade do aluno, de modo que foi necessário rever a forma de introduzir o conteúdo e buscar no tema uma conexão com a realidade que tivesse potencial para despertar a atenção dos alunos.

Na construção da proposta didática, foi necessário ter sempre em mente o objetivo de construir um material que se tornasse potencialmente significativo. Sabe-se que aprender e ensinar Matemática são processos que não podem ser separados e, que, quando bem entendidos, são essenciais para uma boa prática docente. Portanto, o professor deve, sempre que possível, buscar novas formas para o processo ensino-aprendizagem, tendo em mente os conceitos matemáticos e, mais do que isso, compreender o contexto social e a realidade do aluno.

Ao final deste trabalho percebeu-se que é sim possível construir uma proposta didática dentro do que preconiza Ausubel para Aprendizagem Significativa, apesar de não ser uma tarefa simples. São muitas as variáveis a serem consideradas e uma atividade que isolada pode ser interessante, nem sempre se encaixa na sequência didática exercendo o papel que precisamos que ela cumpra.

Verificou-se que organizar o planejamento de um conteúdo propiciando a Aprendizagem Significativa exige novos olhares para o conteúdo. Não basta que definamos apenas os objetivos, mas mais do que isso, precisa-se determinar quais são os conhecimentos prévios necessários, investigar quais os possíveis Subsúncos, ou onde/como procurarmos as âncoras que os alunos podem utilizar.

Dessa forma, é necessário olharmos para o conteúdo com olhar investigativo e integrativo a fim de elencarmos quais são os elementos que podem servir de Subsúncos.

Por fim definir o que para cada turma pode servir como Organizador Prévio. Esse é um processo contínuo porque para cada turma, apesar do mesmo conteúdo, pode-se ter níveis de conhecimento prévios diferentes, Organizadores Prévios que funcionem com uma turma pode não ser o adequado para outra, uma vez que os interesses e realidades não coincidam;

A busca de indícios para a ocorrência de uma Aprendizagem Significativa não é uma tarefa simples. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), verificar se uma aprendizagem ocorreu simplesmente perguntando ao estudante os atributos de um conceito ou proposição é arriscado, em virtude da possibilidade da utilização de respostas mecanicamente memorizadas.

Uma forma de verificar tal aprendizagem proposta por Moreira e Masini (2001), é fazer uso de situações novas e que não sejam familiares com as conhecidas pelos alunos. Desta forma, exige-se que os alunos façam uma espécie de transformação do conhecimento assimilado. Outras possíveis formas de avaliação, são através da resolução de problemas ou na construção de mapas conceituais por parte dos alunos. Esta questão de avaliação é um encaminhamento para um aprofundamento futuro deste trabalho, com a aplicação das atividades e a

construção de um instrumento avaliativo para verificar sua eficácia uma vez que demanda de mais tempo para se fazer uma aplicação.

A realização desta pesquisa foi uma tarefa bastante árdua, porém, foi bastante recompensadora quando finalizada. Vale ressaltar que este trabalho contribuiu de maneira positiva, como um passo a mais no processo de crescimento tanto pessoal, quanto de futuro educador. Foi um aprendizado que mudou nossa forma de pensar sobre o planejamento de uma aula, descobrindo aspectos importantes para os quais não nos atentávamos antes, como por exemplo a questão dos Organizadores Prévios. Portanto um professor deve estar sempre estudando e acumulando conhecimento, pois, aprende e ensina a todo momento.



## 6. BIBLIOGRAFIA

ARAGÃO, Rosália M. R. **Teoria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel: Sistematização dos Aspectos Teóricos Fundamentais**. Campinas, São Paulo, 1976. Tese de Doutorado. UNICAMP

AUSUBEL, David P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, David P. **A Psicologia da Aprendizagem Verbal Significativa**. New York, Grune and Stratton, 1963.

AUSUBEL, David P. **Psicologia Educacional: Uma Visão Cognitiva**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, David P., NOVAK, Joseph D. e HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Tradução: Eva Nick. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda, 1980.

BERLITZ, Ângela Maria Jacobus. **Introdução a Teorias de Ensino-Aprendizagem**. Metodologia de Ensino de Física I. UNISINOS. Disponível em: <<http://professor.unisinos.br/angelab/metodologia%20de%20ensino%20de%20f%ed%20sica/ausubel.html>>. Acesso em: 15 ago 2015

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática, 7º Ano**. 6ª Edição. Moderna, 2006.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Conselho Nacional de Educação. Brasília: 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN: Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BRUM, Wanderley Pivatto; SCHUHMACHER, Elcio. **Construção de Uma Sequência Didática Para Aplicação de Conhecimentos Acerca de Geometria Esférica e Hiperbólica**. Revista Dynamis. ISSN 1982-4866. FURB, Blumenau, v. 19, n. 2, p. 62-71, edição especial. 2013.

CANTORAL, R. et al. **Desarrollo del Pensamiento Matemático**. México, Trillas: ITESM, Universidade Virtual, 2000.

CAVALCANTE, André L. B. **Teoria dos Números e Criptografia**. Faculdades Integradas – Faculdade de Tecnologia Dept. Sistemas de Informação.

COLL, César (Org.). **Psicologia do Ensino**. Armed Editora. Porto Alegre, 2000.

COUTINHO, S. **Números Inteiros e Criptografia RSA**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber; OLGIN, Clarissa de Assis. **Códigos e Senhas no Ensino Básico**. Educação Matemática em Revista – RS. 2009, 41-50.

JESUS, Marco Antonio Santos de; SILVA, Romeu Carlos Oleira. **A Teoria de David Ausubel – O Uso dos Organizadores Prévios no Ensino Contextualizado de Funções**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Pernambuco, 2004

LEÃO, Alex S. G., BISOGNIN, Vanilde. **Construção do Conceito de Função no Ensino Fundamental por Meio da Metodologia de Resolução de Problemas**. Educação Matemática em Revista, Rio Grande do Sul, 2009.

MOREIRA, M. A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e Sua Implementação em Sala de Aula**. Brasília: UNB, 2006.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. **Aprendizagem Significativa: a Teoria de David Ausubel**. São Paulo: Editora Moraes, 1982.

MOREIRA, M. A. **Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa**. Material de Apoio ao Minicurso Sobre Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa. II Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa, 2008.

MOREIRA, M.A. **O que é afinal Aprendizagem Significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, Mato Grosso, 2012.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagens**. São Paulo: EPU, 1999.

MORI, Iracema & ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: Ideias e Desafios**. 14ª Edição. Saraiva, 2005, São Paulo.

OLGIN, Clarissa de Assis. **Currículo no Ensino Médio: Uma Experiência Com o Tema Criptografia**. 2011. Tese (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2011.

OLGIN, Clarissa de Assis; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Engenharia Didática: Uma Experiência Com o Tema Criptografia**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, Vol. 4, Nº 2, Rio Grande do Sul, 2011.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P., **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática**. Lisboa, 1996. Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.pdf>>. Acesso em: 10 maio 2015

OLIVEIRA, H. **Atividades de Investigação na Aula de Matemática: Aspectos da Prática do Professor**. Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa, 1998.

PINHEIRO, N. A. M. **Educação Crítico - Reflexiva Para um Ensino Médio Científico Tecnológico: A Contribuição do Enfoque CTS Para o Ensino-aprendizagem do Conhecimento Matemático**. 2005, 306f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PONTE, J. P., BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ROCHA, Heloisa Vieira da. **A Teoria de Ausubel**. UNICAMP. 1999. Disponível em: <<http://www.ic.unicamp.br/~heloisa/MO642/AUSUBEL/index.htm>>. Acesso em 15 ago 2015.

SINGH, S.O Livro dos Códigos: **A Ciências do Sigilo - do Antigo Egito à Criptografia Quântica**. Rio de Janeiro: *Record*, 2003.

SHOKRANIAN, S; SOARES, M; GODINHO, H. **Teoria dos Números**. Brasília: UnB, 1999.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2007.

TAMAROZZI, Antônio Carlos. **Codificando e Decifrando Mensagens**. In Revista do Professor de Matemática 45, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

TERADA, Routh. **Criptografia e a Importância das Suas Aplicações**. Revista do Professor de Matemática (RPM). No 12, 1º semestre de 1988, 1-6.

## 7. APÊNDICE

### PLANO DE TRABALHO

**Tema:** O estudo de Função Inversa pela Criptografia.

**Introdução:**

O presente trabalho pretende discutir metodologias voltadas para a contextualização e realidade do aluno com o objetivo de tornar os conceitos que envolvem os conteúdos mais significativos. Assim, usaremos a Criptografia como recurso para tornar o ensino de alguns conteúdos do ensino fundamental e médio, mais desafiador, interessante e contextualizado.

Este plano de trabalho visa: discutir e apresentar o que é Criptografia, apresentar atividades que envolvam Criptografia, codificação, decodificação de mensagens e dados, conceituar Função Inversa a partir da experiência em codificar e decodificar. Com isso será possível, mostrar para os estudantes a aplicação do tema aos conteúdos matemáticos.

**Justificativa:**

A motivação para o estudo da Matemática no Ensino Médio está voltada para o nível de significação e aplicabilidade. Os alunos nesta faixa etária têm como característica o imediatismo. Partindo destes enfoques se torna mais fácil atrair sua atenção inicial, assim, a Matemática deve ser tratada de forma clara e contextualizada. Uma forma de tornar isso possível é fazer a integração entre a Matemática e outras áreas de conhecimento. Aliar a Matemática à Criptografia através dos conteúdos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, permite ao aluno perceber que existe a possibilidade da união do conhecimento matemático em situações práticas presentes no dia a dia.

A Criptografia oferece ao professor de Matemática do Ensino Médio a possibilidade de formar conceitos, exercitar e revisar os conteúdos aprendidos na sala de aula. Fazer uso de

atividades de codificação e decodificação, envolvendo os conteúdos matemáticos tem grande potencial para despertar o interesse dos alunos.

O conteúdo de Criptografia é utilizado para que se tenha uma maior segurança em redes de computadores e proteção de informações, assunto de extrema importância em uma sociedade globalizada e cuja rotina, cada vez mais, está ligada à tecnologia da informação.

Desta forma, então buscamos conteúdos que pudessem estar relacionados à informática, que fossem aplicados a esse campo de conhecimento.

**Conceitos/Pré-requisitos:**

- Funções;
- Domínio, imagem e Contradomínio;
- Conceito de Função Injetora, Sobrejetora, Bijetora;
- Gráfico, Plano Cartesiano;
- Simetria, reflexão e rotação.

**Objetivos:**

- Entender o que é Criptografia;
- Compreender a importância da inversão para decodificação da mensagem original;
- Solucionar atividades que envolvam Criptografia, codificação, decodificação de mensagens;
- Criar uma forma de codificação de mensagens própria.
- Compreender o conceito de Função Inversa;
- Reconhecer a necessidade da Bijeção como condição para a existência de uma Função Inversa;
- Identificar se uma Função é invertível;
- Identificar as características do gráfico da Função Inversa;
- Reconhecer o gráfico de uma Função Inversa dado o gráfico da Função;
- Determinar graficamente e algebricamente a Inversa de uma Função.

**1ª Aula**

**Tempo de duração: 100 minutos.**

**Recursos Educacionais Utilizados:** Data Show, giz, lista de exercício, quadro.

**Organização da turma:** Organização normal em fileiras e posteriormente em trios.

**Desenvolvimento da Aula:**

**Primeiro Momento:** Conceituação e Contexto.

A aula será iniciada fazendo para os alunos as seguintes indagações: "**Você acredita que usar a conta bancária via internet é seguro?**", "**Você teria medo de fazer transações bancárias via internet?**", "**O que nos garante a segurança dos dados?**"

Este primeiro Momento da aula, será importante, pois, será nosso fator desencadeador para a teoria da aprendizagem de Ausubel. A interação com a internet é algo corriqueiro na vida das pessoas hoje em dia, por isso, será utilizado como fator desencadeador para as atividades que se seguem.

Logo, temos de ter em mente que os Organizadores Prévios, são as conexões e construções pessoais que os alunos possuem. Como tal, terão um significado Peculiar, pessoal, íntimo. Com isso tais conhecimentos, deverão ser elaborados de maneira única em cada pessoa, de acordo com a sua interação cotidiana com o mundo. Vale salientar que ao se falar em Aprendizagem Significativa, devemos ter em mente também toda a estrutura semântica do material a ser apresentado.

Atentando à possibilidade de os alunos não possuírem os pré-requisitos necessários para que se ocorra uma Aprendizagem Significativa, por falta de Subsunoçores na estrutura cognitiva do aluno. Faz-se necessário utilizar o que Ausubel, Novak e Hanesian (1980) chamaram de Organizadores Prévios. Tais organizadores servirão como ativadores ou pontos de ancoragem para conhecimentos inexistentes ou adormecidos.

Isso, irá permitir uma maior integração dos novos conceitos a serem aprendidos. Um Organizador Prévio abstrai de nível, ou seja, pode ser mais ou menos específico de acordo com a abrangência e nível de especificidade que se deseja sobre o conteúdo que será posteriormente apresentado.

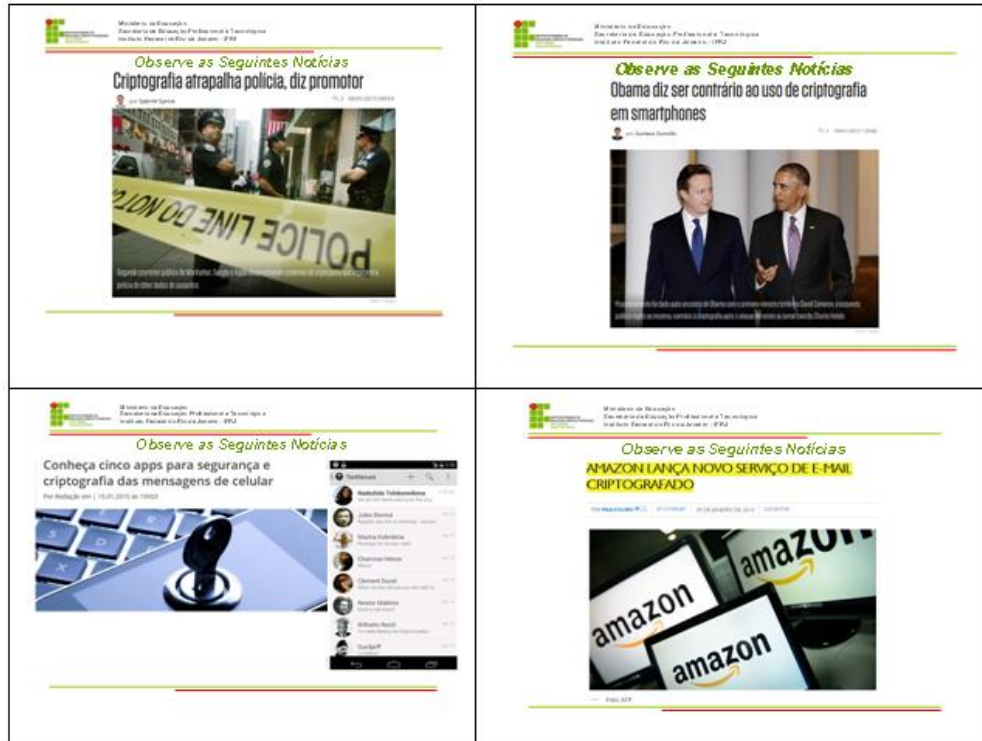
Com isso, os Organizadores Prévios apresentados deverão preencher a lacuna existente entre aquilo que o aluno já sabe sobre o assunto e o que precisa conhecer.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) ponderam que as Funções básicas de um Organizador Prévio são oferecer mecanismos para a incorporação e retenção do material mais detalhado que será apresentado mais à frente.

Aumentar o nível de detalhamento entre o último material apresentado e as ideias similares e complementares a ele que virão a seguir, de modo que estas não sejam conflitantes na estrutura cognitiva do aluno. Além disso, devem tornar evidentes as ideias que por acaso já existam na estrutura cognitiva e que possam servir de base às novas aprendizagens, potencializando assim a capacidade de aprendizagem do sujeito.

Frente a isso, será apresentado aos alunos o conceito que se deseja desenvolver/recuperar que é o de inversão usando a Criptografia. Diante disso, após os questionamentos citados acima, será apresentado aos alunos as seguintes notícias que se seguem.





Será feita a seguinte pergunta: "Mas o que é Criptografia?", espera-se que os alunos respondam que Criptografia é uma forma de esconder os dados reais da informação. Mesmo que os alunos não consigam responder a esta questão, em seguida trataremos a seguinte definição:

**Definição:** "Criptografia é a arte ou ciência de escrever em cifra ou em códigos, de forma a permitir que somente o destinatário a decifre e compreenda". E complementada com a seguinte informação, "A Criptografia transforma textos originais, em uma informação transformada (texto cifrado), que tem a aparência de um texto randômico (gerado aleatoriamente) ilegível". Serão mostrados instrumentos que foram usados ao longo da história para que mensagens fossem criptografadas ou escondidas. Como por exemplo, Bastão de Licurgo, Cifra de César, Cilindro de Jefferson, Código Morse, A máquina ENIGMA e o Colossus.

Para cada um dos instrumentos de Criptografia supracitados, será feita uma indagação para os alunos, a fim de saber se eles possuem pelo menos uma ideia de como era feita a Criptografia com cada um deles. Exemplificando para os alunos como o processo ocorria.

Chegaremos então a comentar como a Criptografia é usada nos nossos dias atuais. Exemplificando que, **"Nos dias atuais, com o aumento do comércio e de transações eletrônicas que requerem algum tipo de segurança, a Criptografia tornou-se uma ferramenta fundamental para a utilização da Internet"**.

Após feita a discussão com a turma e apresentada a definição de Criptografia, a intenção deste material é tentar que os alunos possuam uma estrutura cognitiva sobre Criptografia mais "nivelada". Assim, o conteúdo que foi detido por eles servirá como influenciador do processo ensino aprendizagem, definido por Ausubel. Teremos então os "pontos de ancoragem", que serão as informações que serão utilizadas para (re)descoberta do novo conteúdo (Função Inversa). O segundo momento da aula será utilizado para fazermos a utilização das âncoras que foram lançadas no primeiro momento da aula. Deste modo teremos uma atividade que Ausubel define como aprendizagem por descoberta, que é caracterizada pelo fato do conteúdo a ser aprendido ser descoberto pelo educando. O aluno possui algumas tarefas antes de atingir de fato a aprendizagem. Com isso, faremos uso de Criptografia elementar como um ponto de ancoragem para o conteúdo de Função Inversa.

**Segundo momento:** Atividades.

Nesta parte da aula daremos início, às atividades.

**Atividade 1** - Esta atividade tem por objetivo apresentar uma das formas mais simples de Criptografia, a Criptografia de substituição de letras por números.

A atividade a seguir, apresenta uma das formas de Criptografia mais básicas, que consiste em fazer a substituição das letras por números. Desta forma, cada letra é associada a um número e fazemos a substituição da letra pelo número. Neste exercício trabalharemos apenas com números para que os alunos não confundam o número do texto, com o número da

substituição no momento da criação das palavras, que é feita letra por letra. A separação das palavras é feita por um traço (-).

|          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> | <b>G</b> | <b>H</b> | <b>I</b> | <b>J</b> | <b>K</b> | <b>L</b> | <b>M</b> |
| 0        | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       |
|          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| <b>N</b> | <b>O</b> | <b>P</b> | <b>Q</b> | <b>R</b> | <b>S</b> | <b>T</b> | <b>U</b> | <b>V</b> | <b>X</b> | <b>Y</b> | <b>W</b> | <b>Z</b> |
| 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20       | 21       | 22       | 23       | 24       | 25       |

A) - Tendo como base a tabela acima, codifique a frase:

**"AGORA EU SEI EXATAMENTE O QUE FAZER"** utilizando a tabela.

**Mensagem Codificada:** \_\_\_\_\_

B) - Decodifique a mensagem a seguir, utilizando a tabela:

"|16-20-0-13-19-14| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |17-0-11-0| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |2-17-4-18-2-4|".

Mensagem Decodificada: \_\_\_\_\_

### Respostas da Atividade

A) - Tendo como base a tabela acima, codifique a frase **"BEIJINHO NO OMBRO"** utilizando a codificação de avanço de 4 casas.

**Mensagem Codificada:**|0-6-14-17-0||4-20||18-4-8||4-22-0-19-0-12-4-13-19-4||14||16-20-4||5-0-25-4-17|

B) - Decodifique a mensagem a seguir:

"|16-20-0-13-19-14| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |17-0-11-0| |12-0-8-18| |0| |6-4-13-19-4| |2-17-4-18-2-4|".

Mensagem Decodificada: **“QUANTO MAIS A GENTE RALA, MAIS A GENTE CRESCE”**

A ideia é que ao realizar tal atividade o aluno percebe que para cada associação feita ao par (letra, número) é possível que esta associação seja desfeita, fazendo simplesmente a associação Inversa (número, letra), ou seja, estaremos fazendo a ação Inversa, com isso, o ato de realizar a Operação Inversa será mais um dos nossos pontos de ancoragem para o conteúdo de Função Inversa que será aos poucos refinado e detalhado no decorrer do plano de trabalho.

Diremos aos alunos que: O ato de fazer alguma coisa e depois desfazê-la é um ato comum que é praticado todos os dias. Avaliando rapidamente, conseguimos pensar em algumas ações que realizamos e que depois fazemos a ação Inversa. Todos os conhecimentos a seguir os alunos já possuem, temos aqui então uma tentativa de trazê-los à tona, para serem utilizados também como pontos de ancoragem. Sendo as ações diárias:

- Abrir e fechar a porta de casa;
- Entrar na sala de aula para assistir às aulas e sair quando elas terminam;
- Subir as escadas e descer as escadas;
- Colocar a chave na fechadura e retirar a chave da fechadura;
- Abrir o zíper da mochila e fechar o zíper da mochila.

Em todos estes casos, existe uma ação Inversa, ou seja, o ato de abrir e o ato de fechar, o ato de subir e o ato de descer, o ato de colocar e o ato de retirar.

Isto também ocorre na Matemática. Matematicamente também é possível fazer e desfazer ações, que são entendidas como operações Inversas. No caso da soma a Operação Inversa é a subtração, no caso da multiplicação a divisão.

Faremos o seguinte questionamento, **"Como faremos para decodificar as mensagens que foram codificadas?"** Espera-se que os alunos respondam que basta olhar na tabela os números que representam as letras e em seguida fazer a substituição dos mesmos. Caso os

alunos não respondam fazendo referências à tabela, faremos questionamentos sobre o uso da tabela e a associação das letras e números nela.

## Atividade 2 - O Código de César

A atividade tem por objetivo incentivar os alunos a fazerem uso de uma das primeiras formas de Criptografia que se tem notícia, a **Cifra de César**. O conceito de Criptografia de substituição, será reforçado, uma vez que na Cifra de César é utilizada tal metodologia.

Suetônio, escritor romano que viveu no início da era cristã (69 d.C.), em seu livro “**Vida dos Césares**”, escreveu a biografia dos imperadores romanos de Júlio César a Domiciano. Na publicação, o autor conta que Júlio César (100 – 44 a.C.) usava na sua correspondência militar uma chave de substituição muito simples, na qual cada letra da mensagem original era substituída pela letra que a seguia em três posições no alfabeto. A letra A era substituída pela D, a B pela E, e assim sucessivamente.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Y | W | Z |
| D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Y | W | Z | A | B | C |

Exemplo da Cifra de César

A) – Com base na tabela acima, como podemos fazer para decodificar utilizando a cifra de César?

---



---



---

B) – Tendo por base a tabela da Cifra de César mostrada acima, **codifique** a mensagem a seguir: "EU VOU PEDIR PROS ANJOS CANTAREM POR MIM".

**Mensagem**

**Codificada:** \_\_\_\_\_

C) – Tendo como base a tabela da Cifra de César, mostrada acima, **decodifique** a mensagem a seguir: "SHQVHL HP XH JYDUGDU, PDV IRL PHOKRU DVVLP".

**Mensagem Decodificada:** \_\_\_\_\_

### **Respostas da Atividade**

A) - Com base na tabela acima, como podemos fazer para decodificar utilizando a cifra de César?

Para decodificar utilizando a Cifra de César, basta que vejamos a letra na linha de baixo e a letra correspondente na linha de cima fazendo assim a correspondência para formar as palavras.

B) - Tendo por base a tabela da Cifra de César mostrada acima, **codifique** a mensagem a seguir: "EU VOU PEDIR PROS ANJOS CANTAREM POR MIM".

**Mensagem Codificada: HY WRY SHGLU SURV DQMRV FDQXDUHP SRU PLP**

C) - Tendo como base a tabela da Cifra de César, mostrada acima, **decodifique** a mensagem a seguir: "SHQVHL HP XH JYDUGDU, PDV IRL PHOKRU DVVLP".

**Mensagem Decodificada: "PENSEI EM TE GUARDAR, MAS FOI MELHOR ASSIM"**

A ideia é que ao se realizar esta segunda atividade é fazer mais referências a ações Inversas realizadas na Criptografia a fim de enraizar o ato de fazer e desfazer

Após concluída a atividade, será perguntado aos alunos por que essa forma de codificação, é de fácil de se decodificar as mensagens e se é possível fazer uma variação desta forma de codificação mantendo as mesmas características de associar letras. Após uma breve discussão com a turma, será explicado para os alunos que mesmo que avancemos tantas casas quantas forem possíveis, ainda sim a forma de compreender a mensagem será simples de ser decodificada, pois, só teremos a 26 variações de codificação neste tipo de Criptografia. Em seguida daremos início à atividade 3.

### **Atividade 3 - Seu Código**

Essa atividade deverá ser realizada em trios, nela os alunos deverão criar uma forma de codificar e decodificar as mensagens. Eles deverão deixar clara a forma como é feita a codificação e como devemos proceder para retornar à mensagem original (decodificação).

Essa atividade tem como objetivo observar se os alunos compreenderam que é necessário fazer o código e pensar Inversamente para decodificá-lo.

A) - Com a ajuda dos seus companheiros de grupo, crie uma forma de codificação, e em seguida, codifique a seguinte mensagem: "Nós estudamos no IFRJ"

**Obs.:** Lembre-se de anotar detalhadamente como vocês criaram a forma de codificar a mensagem.

---

---

---

B) - **DESAFIO:** Observe bem a seguinte mensagem codificada e tente descobrir qual forma de codificação foi utilizada. Em seguida escreva a mensagem decodificada.

**B NBUFNBUJDB F GBTDJOBOUT**

**Forma de Codificação:**

---

---

---

**Mensagem Decodificada:** \_\_\_\_\_

**Respostas da Atividade**

A) - Com a ajuda dos seus companheiros de grupo, crie uma forma de codificação, e em seguida, codifique a seguinte mensagem: "**Nós estudamos no IFRJ**"

Resposta Individual para cada grupo.

B) - **DESAFIO:** Observe bem a seguinte mensagem codificada e tente descobrir qual forma de codificação foi utilizada e em seguida escreva a mensagem decodificada.

**B NBUFNBUJDB F GBTDJOB OUF**

**Forma de Codificação:** A forma de codificação utilizada foi relativamente simples. Foi feita a substituição da letra pela letra seguinte do alfabeto. Assim a letra **A** foi substituída pela letra **B**, a letra **M** pela letra **N**.

**Mensagem Decodificada:** A MATEMÁTICA É FASCINANTE.

Será pedido que voluntariamente dois ou três grupos, coloquem a mensagem codificada no quadro, para que os demais alunos possam tentar descobrir qual a forma de codificação utilizada. Com esta explicação por parte dos grupos, será o nosso gancho para introdução ao tema de Função Inversa.

A compreensão do conceito de Inversa deve estar claro como sendo aquele que “**desfaz o que foi feito**”. Como no caso da codificação e decodificação que é utilizado na Criptografia. Desta forma a Criptografia irá se utilizar de uma regra específica para decodificar a partir da regra de codificação. Logo, para que seja possível fazer e desfazer tal processo, é necessário que se estabeleça uma relação um a um entre dois elementos, real  $x$  codificado. Deste modo, ao se aplicar a regra de inversão ao termo codificado, e para que não haja dúvida ao se desfazer o processo, o elemento real a ele associado, deve sempre existir. Esses elementos são a base para a compreensão de que a existência da Função Inversa tem de estar atrelada (subordinada) à condição de Bijeção.

## **Aula 2**

A aula será iniciada propondo aos alunos o seguinte exercício de desafio.



**DESAFIO:**

A) - Tendo por base a seguinte mensagem codificada "**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**", descubra como foi feita a codificação da mensagem e em seguida crie uma forma de decodificá-la. **Obs.:** Lembre-se de anotar detalhadamente como vocês acham que é a forma de codificar a mensagem. E como fazemos para Decodificá-la.

**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**

**Forma de Codificação:**


---



---



---

**Mensagem Decodificada:** \_\_\_\_\_

**Respostas da Atividade**

A) - Tendo por base a seguinte mensagem codificada "**GJR ANSIT F KZSHFT NSAJXYF**", descubra como foi feita a codificação da mensagem e em seguida crie uma forma de decodificá-la.

A mensagem foi decodificada fazendo a soma de 5 para cada posição da letra, por exemplo a letra A que se encontra na primeira posição do alfabeto foi acrescida de 5 posições e assim feita a substituição pela letra F. Assim sendo a chave de codificação usada foi  $f(x) = x + 5$ . Onde x representa o número da posição da letra no alfabeto.

B) - **Mensagem Decodificada: "BEM VINDO A FUNCAO INVERSA"**. A forma de decodificar a mensagem que foi utilizada foi fazendo a Inversa da Função acima  $g(x) = x - 5$ , onde x representa a posição que a letra se encontra no alfabeto, por exemplo quando na mensagem codificada temos a letra G (posição 7), logo,  $g(7) = 7 - 5 \rightarrow g(7) = 2$ , logo letra B. O mesmo vale para todas as letras do alfabeto.

Assim, temos a decodificação sendo feita através da Função Inversa, portanto:  $F(x) = x + 5$  e sua Inversa  $G(x) = x - 5$

Mas o que é Função Inversa?

Vamos observar atentamente as Funções que encontramos no exercício anterior  $f(x)$  e  $g(x)$ , onde  $x$  representava a posição da letra no alfabeto. Assim, chegamos à conclusão de que  $F(x) = x + 5$  e  $G(x) = x - 5$ .

Para resolver o exercício do desafio fizemos os seguintes cálculos:

$$x = 2(\text{letra B}) \rightarrow f(2) = 2 + 5 = 7(\text{letra G})$$

$$x = 5(\text{letra E}) \rightarrow f(5) = 5 + 5 = 10(\text{letra J})$$

$$x = 13(\text{letra M}) \rightarrow f(13) = 13 + 5 = 18(\text{letra R})$$

Logo, os valores 7, 10 e 18 são imagens da Função  $f$  no contra Domínio, formando os pares ordenados  $(x, f(x))$ . E como estávamos trabalhando com codificação os valores são as codificações para as letras B, E e M;

Gerando os pares:

| X  | $f(x) = x + 5$ | Pares    | Troca de Letras |
|----|----------------|----------|-----------------|
| 2  | 7              | (2, 7)   | (B, G)          |
| 5  | 10             | (5, 10)  | (E, J)          |
| 13 | 18             | (13, 18) | (M, R)          |

Porém, para voltarmos para as letras originais precisamos fazer uma Operação Inversa e para isso utilizamos a Função  $g(x) = x - 5$ .

Com isso chegamos a seguinte conclusão:

$$x = 6(\text{letra G}) \rightarrow f(6) = 7 - 5 = 2(\text{letra B})$$

$$x = 10(\text{letra J}) \rightarrow f(10) = 10 - 5 = 5(\text{letra E})$$

$$x = 18(\text{letra R}) \rightarrow f(18) = 18 - 5 = 13(\text{letra M})$$

Gerando os pares:

| X | $g(x) = x - 5$ | Pares | Troca de Letras |
|---|----------------|-------|-----------------|
|---|----------------|-------|-----------------|

|    |    |          |        |
|----|----|----------|--------|
| 7  | 2  | (7, 2)   | (G, B) |
| 10 | 5  | (10, 5)  | (J, E) |
| 18 | 13 | (18, 13) | (R, M) |

Observando bem as duas tabelas, podemos notar que é possível obter os pares da Função  $g$  invertendo a ordem dos pares da Função  $f$ .

Por isso, podemos dizer que  $g$  é a *Função Inversa* de  $f$  e representamos por  $g(x) = f^{-1}(x)$ .

Então se  $f(x) = x + 5$ ,  $f^{-1}(x) = x - 5$ .

Na nossa Função  $f$ , podemos fazer destaque para duas características importantes sendo:

- ✓ O Contradomínio de  $f$  coincide com sua imagem, ou seja, todo elemento do Contradomínio é correspondente de algum elemento do Domínio;
- ✓ Cada elemento do Contradomínio de  $f$  é imagem de um único elemento do Domínio.

Estas condições devem ser satisfeitas para que a tenha uma Inversa ou seja invertível. As Funções que satisfazem a essas duas condições são denominadas Funções Bijetoras. Portanto, apenas as Funções Bijetoras possuem Inversas.

A atividade que se segue tem como objetivo mostrar para os alunos que temos de trabalhar sempre com Funções Injetora para que seja possível obter a Inversa. Caso contrário seria possível que letras diferentes fossem codificadas da mesma forma. Uma vez que isso ocorra como faríamos para desfazer a codificação? Seria algo impossível uma vez que uma ou mais letras estariam associadas ao mesmo símbolo.

#### Atividade (Injetora)

|          |          |          |          |          |           |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b>  | <b>G</b> | <b>H</b> | <b>I</b> | <b>J</b> | <b>K</b> | <b>L</b> | <b>M</b> |
| <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>1</b> | <b>5</b>  | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> |
| <b>N</b> | <b>O</b> | <b>P</b> | <b>Q</b> | <b>R</b> | <b>S</b>  | <b>T</b> | <b>U</b> | <b>V</b> | <b>X</b> | <b>Y</b> | <b>W</b> | <b>Z</b> |
| <b>6</b> | <b>1</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>2</b> | <b>1</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> |

a) Tendo por base a tabela acima **decodifique** a mensagem que se segue:

|6-1-1| |1| |7-1-10-10-1-3-1-4| |10-1-2-1-9|

---



---

A próxima atividade tem seu foco voltado para mostrar que além de termos que trabalhar sempre com Funções Injetoras na codificação, devemos ter também obrigatoriamente que a Função seja Sobrejetora, para que seja possível obter a Inversa. Caso contrário seria possível que algumas letras ficassem sem associações na hora de fazer a codificação ou decodificação. O que impossibilitaria de fazer a decodificação.

#### Atividade (Sobrejetora)

| A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| N  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  |
| 14 | 15 | 17 | 25 | 26 | 27 | 29 | 32 | 33 | 34 | 37 | 39 | 40 |

- b) Tendo por base a tabela acima **decodifique** a mensagem que se segue, lembrando que os números com **traço (-)**, não possuem letras associadas:

|14-1-15| |5| |17-15-27-27-9-33-5-12|

---



---

As duas atividades anteriores, servem para mostrar que uma vez que trabalharemos com Funções Inversas teremos sempre que estar trabalhando com Funções que sejam ao mesmo tempo Injetora e Sobrejetora. Logo, Funções Bijetoras, assim todo elemento do Domínio terá um correspondente no Contradomínio e todo o Contradomínio será coberto pela imagem. Desta forma sempre será possível se obter a Inversa de uma Função.

#### Determinando e Representando a Função Inversa

Caso a Função seja Bijetora, e, portanto, possua Inversa, é possível determinar a sua Inversa. Para isso, "**trocamos**" a variável  $x$  por  $y$  na lei de formação, e em seguida "**isolamos**" o  $y$ , obtendo assim, a lei que define a Função Inversa. Vale ressaltar que precisamos ter

cuidado com o Domínio uma vez que determinamos a Inversa. A representação da Função Inversa é feita colocando uma -1 como expoente na letra que representa a Função, como por exemplo, seja  $f$  uma Função invertível qualquer  $f^{-1}$  é a representação para denominar sua Inversa.

**Exemplo:** Obtenha a lei da Função Inversa da Função  $f$  dada por  $y = x + 5$

$$y = x + 5$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x = y + 5 \rightarrow \text{Trocando } y \text{ por } x \text{ e } x \text{ por } y$$

$$y = x - 5 \rightarrow \text{Isolando } y$$

Então  $y = x - 5$  é a lei de formação da Função Inversa dada por  $y = x + 5$ .

Esta atividade tem por objetivo trabalhar a construção do gráfico da Função Inversa, baseado nas características do gráfico original e da inversão dos pares ordenados, além também da reflexão da reta de simetria do gráfico  $y=x$ .

### Trabalhando com Gráficos

Aqui será pedido que os alunos trabalhem no software GeoGebra<sup>3</sup>, para trabalhar de maneira dinâmica com os gráficos.

### Atividade GeoGebra

- Tendo por base a Função  $f(x) = x + 3$ , determine a sua Inversa algebricamente, em seguida faça o gráfico da Função original. Marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos pontos inversos  $(y,x)$  e trace o gráfico da Inversa que foi determinada algebricamente.
- Agora, escolha uma Função e determine a sua Inversa algebricamente, depois faça o gráfico da Função original, marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos  $(y,x)$  e

---

<sup>3</sup> O GeoGebra é um programa de matemática dinâmica, feito com o intuito de ser utilizado em sala de aula, o qual junta aritmética, álgebra, geometria e cálculo. O GeoGebra possibilita o desenho de pontos, vetores, segmentos, linhas e funções, e ainda, a alteração dinâmica deles, assim que terminados. Com o GeoGebra também é possível inserir equações e coordenadas diretamente nos gráficos.

trace a Inversa que foi determinada algebricamente. Trace a reta  $y=x$  e verifique as características da Função original em relação à Inversa. Em seguida responda:

- i. O que ocorre com os pares ordenados  $(x,y)$  da Função original em relação à Função Inversa?
- ii. Existe alguma relação entre o gráfico da Função original e reta  $y=x$  e o gráfico da Inversa?

### **Respostas da Atividade**

- a) Tendo por base a Função  $f(x) = x + 3$ , determine a sua Inversa algebricamente, em seguida faça o gráfico da Função original. Marque os pontos  $(x,y)$ , determine os respectivos pontos inversos  $(y,x)$  e trace o gráfico da Inversa que foi determinada algebricamente.

Determinando algebricamente a Inversa de  $f(x) = x + 3$ .

$$y = x + 3$$

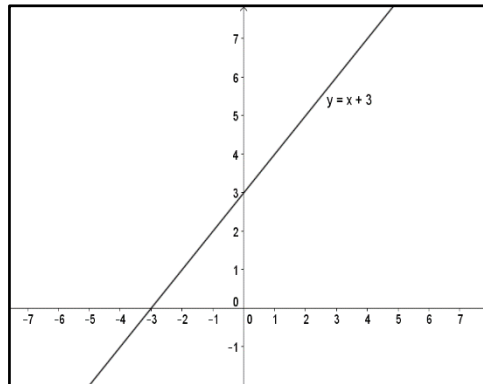
↓   ↓

$$x = y + 3 \rightarrow \text{Trocando } y \text{ por } x \text{ e } x \text{ por } y$$

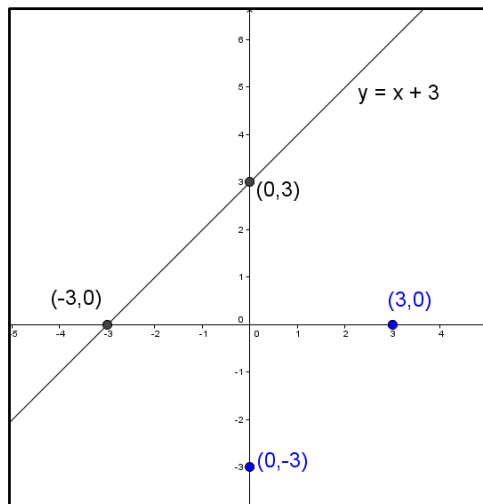
$$y = x - 3 \rightarrow \text{Isolando } y$$

Então  $y = x - 3$  é a lei de formação da Função Inversa dada por  $y = x + 3$ .

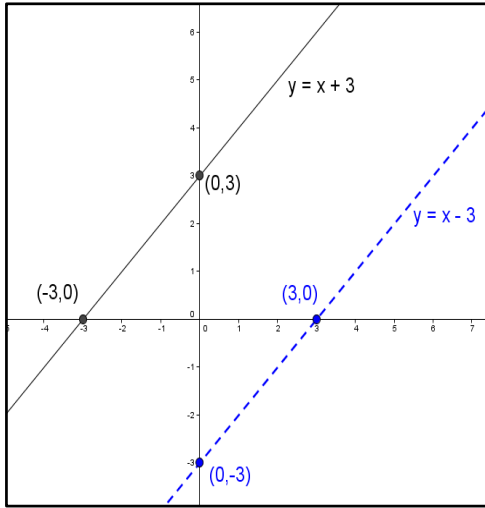
Gráfico da Função original:



Marcando os pontos  $(x,y)$  e determinando os pontos  $(y,x)$ .



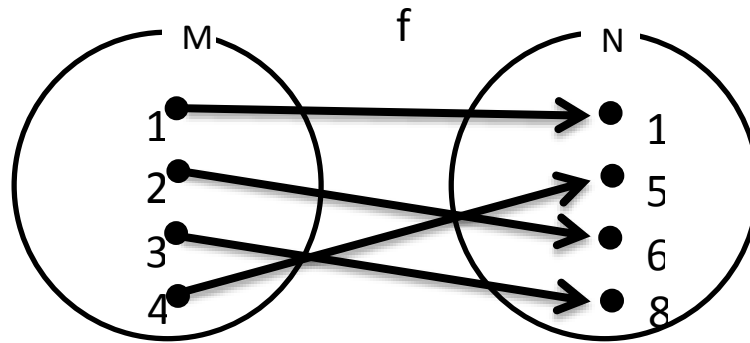
Traçando o gráfico da Inversa que foi determinado algebricamente.



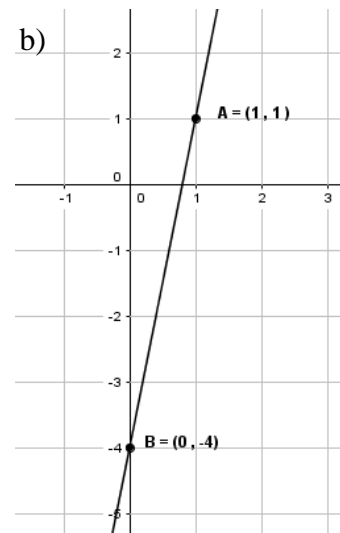
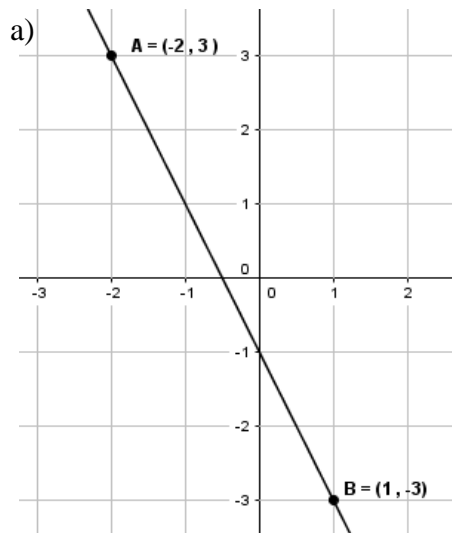


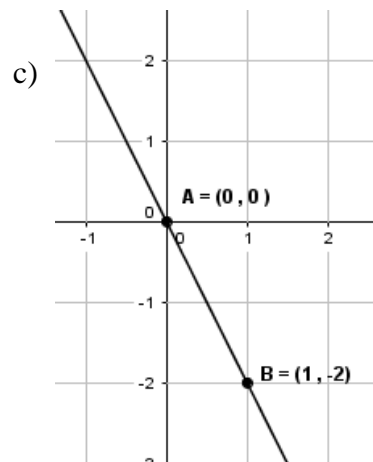
### Lista de Exercício.

- 1) O esquema a seguir representa uma Função Bijetora  $f$ , de  $M$  em  $N$ . Faça o esquema da Função Inversa.



- 2) Dados os gráficos a seguir determine o gráfico da Inversa.





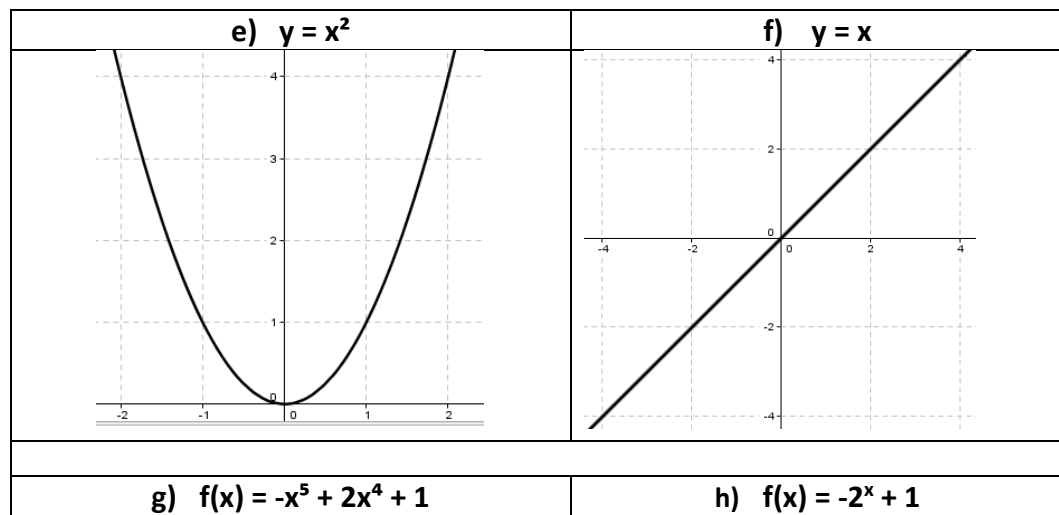
3) – Obtenha a Função Inversa das seguintes Funções:

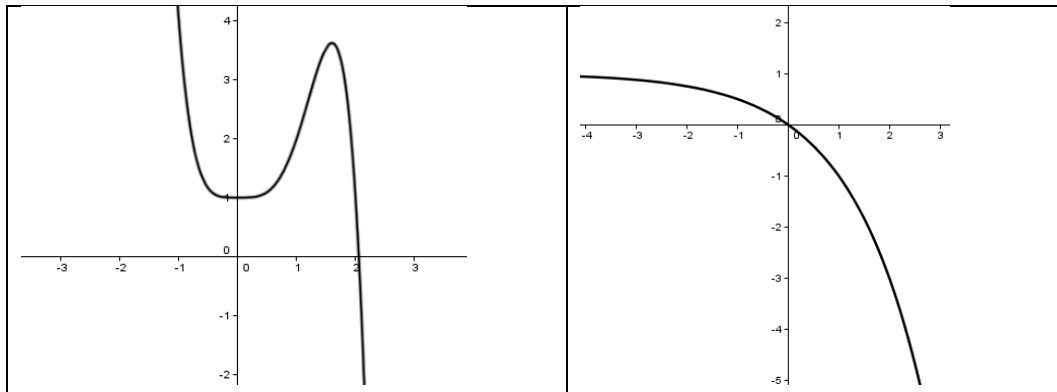
d)  $f(x) = 3x - 2$

e)  $f(x) = x - 7$

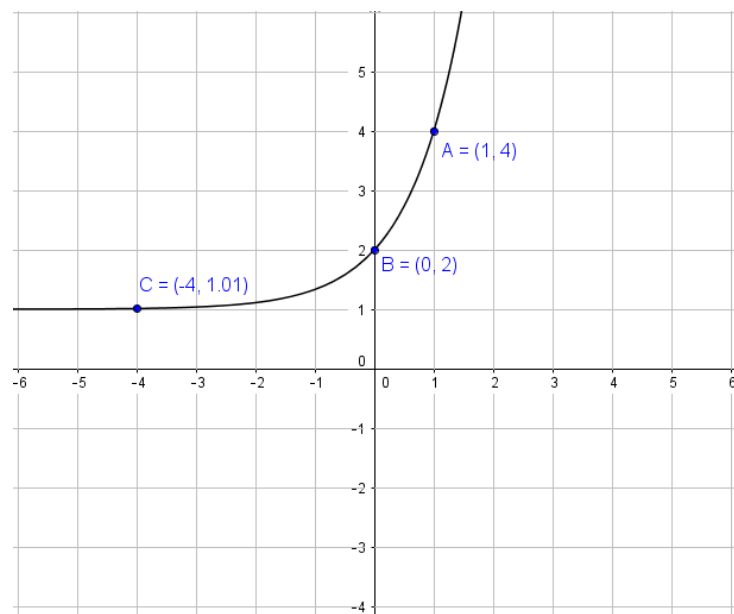
f)  $f(x) = 3x - 6$

4) – Verifique graficamente e algebricamente se as Funções possuem Inversa. E justifique sua resposta





5) A partir do gráfico dados desenhe o gráfico da sua Inversa.



**REFERÊNCIAS:**

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática, 7º Ano**. 6ª Edição. Moderna, 2006.

BRASIL. **Secretaria** de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

MORI, Iracema & ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: Ideias e Desafios**. 14ª Edição. Saraiva, 2005, São Paulo.

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26.html>.  
Acesso: 02/09/2013.