**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA
E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MATERIAIS MANIPULATIVOS E ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS/INVESTIGATIVAS: uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos.

Samuel do Amaral Souza

Volta Redonda

2015

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA
E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MATERIAIS MANIPULATIVOS E ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS/INVESTIGATIVAS: uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos.

Samuel do Amaral Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação do Professor Msc. André Seixas de Novais.

Volta Redonda

2015

S725m

SOUZA, Samuel Do Amaral.

Materiais Manipulativos e Atividades Investigativas: Uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos / Samuel do Amaral Souza, 2015,

51 f.

Orientador: Prof. MSC: André Seixas de Novais

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ),Volta Redonda, 2015.

1.Geometria Espacial 2.Materiais Manipulativos 3.Atividades Exploratórias/investigativas. I. Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), campus Volta Redonda. Licenciatura em matemática. II. NOVAIS, André Seixas de. III. Título

CDU: 514

Samuel do Amaral Souza

MATERIAIS MANIPULATIVOS E ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda, submetido à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes professores:

Prof. e Msc. André Seixas de Novais - orientador

Prof. e Msc. Giovana da Silva Cardoso

Prof. e Msc. Isaque de Souza Rodrigues

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ser um grande amigo e estar me guiando em todos os momentos, fortalecendo-me nas dificuldades para prosseguir no caminho certo e conseguir concluir os trabalhos.

Aos meus pais, Irlete do Amaral Souza e Sebastião Domingos de Souza por me apoiarem e acreditarem no meu potencial em todos os momentos, pelas palavras de confiança e a segurança que sempre me transmitiram.

Ao meu irmão, Renan do Amaral Souza que sempre esteve ao meu lado, me auxiliando quando era preciso, obrigado pela amizade e esforço.

Agradeço ao meu professor orientador, André Seixas de Novais pela grande paciência que teve comigo, pelas palavras de apoio durante o percurso do trabalho.

A todos os professores que colaboraram de alguma forma com minha formação, e também aos colegas e amigos que contribuíram em vários momentos com o companheirismo.

SOUZA, Samuel do Amaral. **MATERIAIS MANIPULATIVOS E ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS/INVESTIGATIVAS: uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos.** 2015. 51 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática): Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda, 2015.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta metodológica para o ensino de geometria espacial que utilize materiais manipulativos e atividades exploratórias/investigativas. A visualização e compreensão dos entes geométricos em terceira dimensão é um fator de grande dificuldade nos estudantes. Para encontrar respostas à questão das dificuldades encontradas pelos estudantes, foi estruturada uma proposta de atividade voltada para a introdução dos conceitos de geometria espacial embasada pelo uso de materiais manipulativos e atividades exploratórias/investigativas. Após a aplicação da proposta, foram analisados os dados da atividade e de um questionário sobre a opinião dos participantes, afim de se confirmar as hipóteses levantadas e alcançar os objetivos da pesquisa. Chegou-se a conclusão que a introdução desse conceito por meio do uso de materiais manipulativos e atividades exploratórias/investigativas diminuem alguns obstáculos encontrados.

Palavras-chave: geometria espacial; materiais manipulativos; atividades exploratórias/investigativas.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

As atividades de Estágio Curricular Supervisionado III e do Programa Institucional de Bolsa e Iniciação a Docência – PIBID me proporcionaram uma interação maior com os estudantes da educação básica, tendo um maior contato com o tema Geometria Espacial, fazendo-me levantar várias indagações e reflexões sobre a forma de condução desse conteúdo. Um dos problemas que pude observar, é que os alunos tinham certa dificuldade na visualização e compreensão de conceitos envolvendo as figuras espaciais. Uma questão que me levou a reflexão foi "O uso de materiais manipulativos e atividades exploratórias/investigativas[1] podem minimizar as dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos envolvendo a Geometria Espacial?", esse será o problema base dessa pesquisa.

O tema escolhido para condução da pesquisa foi "Materiais manipulativos e atividades exploratórias/investigativas: uma experiência de atividade de ensino envolvendo a medida da área de sólidos geométricos em uma turma do ensino médio do Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ Campus Volta Redonda".

Alguns pressupostos levantados são o de que a representação de figuras tridimensionais no plano dificulta, em muitos casos, a visualização e a aprendizagem de conceitos envolvendo figuras espaciais; e a utilização de materiais manipulativos associado ao uso de atividades exploratórias/investigativas pode contribuir na melhoria da compreensão das propriedades e entes matemáticos de sólidos geométricos.

O objetivo da pesquisa é apresentar uma proposta didático-metodológica que enfatize o uso de materiais manipulativos associados ao uso de atividades exploratórias/investigativas, no ensino dos conceitos de medidas de áreas de sólidos geométricos. Como objetivos específicos têm-se: 1) realizar um levantamento bibliográfico sobre o uso de atividades exploratórias/investigativas e materiais manipulativos no ensino de matemática; 2) apresentar e aplicar uma proposta de ensino utilizando materiais

[1] As semelhanças e distinções entre atividades exploratórias e investigativas serão descritas posteriormente.

manipulativos e atividades exploratórias/investigativas e; 3) aplicar uma pesquisa de opinião sobre as impressões dos alunos com relação às atividades envolvendo materiais manipulativos.

Muitos são os relatos de educadores matemáticos sobre as dificuldades dos estudantes na visualização e compreensão de figuras tridimensionais por meio de representações planas, como é realizado regularmente nas aulas envolvendo tal conteúdo.

Acreditamos que iniciando o estudo desses conceitos por meio de modelos físicos dos sólidos geométricos, podemos possibilitar uma familiarização entre as representações planas e os modelos tridimensionais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (1998) destacam a importância de um ensino de Matemática voltado à apropriação do conhecimento por parte do aluno, que o usará para compreender e transformar a sua realidade. Os PCNs, com relação ao ensino de Geometria Espacial reforçam e recomendam que:

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos. (1998, p.116).

Pelos motivos citados acima, justifica-se o problema de pesquisa em questão.

No segundo capitulo do trabalho será apresentada a fundamentação teórica, que dará base aos temas: materiais manipulativos, atividades exploratórias/investigativas e o ensino de geometria objetivando responder uma das hipóteses levantadas. No terceiro capitulo será exibido os métodos empregados no trabalho, tanto na pratica teórica quanto na pratica de campo, buscando detalhar passo a passo. No quarto capitulo será analisada as resoluções feitas pelos estudantes, buscando respostas para as hipóteses levantadas no inicio do trabalho. No quinto capitulo será analisado o questionário de opinião dos estudantes, buscando também encontrar respostas para uma das hipóteses. E finalizando com a conclusão do trabalho, respondendo assim se os objetivos foram alcançados e se as hipóteses foram esclarecidas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. O uso de materiais manipulativos no ensino de matemática

Apesar do avanço sistemático das tecnologias de comunicação, promovido pela evolução dos computadores, que por sua vez estreitou de forma significativa a maneira de como o conhecimento se desenvolve, ainda existem escolas que insistem em promover um processo de ensino centrado no professor, sendo o aluno um receptor pacífico do conhecimento. Segundo Vasconcelos:

> O processo ensino aprendizagem pode ser assim sintetizado: o professor passa para o aluno, através do método de exposição verbal da matéria, bem como de exercícios de fixação e memorização, os conteúdos acumulados culturalmente pelo homem, considerados como verdades absolutas. Nesse processo predomina a autoridade do professor, enquanto o aluno é reduzido a um mero agente passivo. Os conteúdos, por sua vez, pouco tem a ver com a realidade concreta dos alunos, com sua vivência. Os alunos menos capazes devem lutar para superar as suas dificuldades, para conquistar o seu lugar junto aos mais capazes. (1995 *apud* LEITE, 2007, p.3)

Cada aluno tem sua própria forma de aprender, alguns são mais autônomos com uma facilidade elevada de abstração, em contrapartida outros são menos autônomos, apresentando maiores dificuldades na compreensão dos conceitos. A fim de atingir de forma mais significativa a maior parte dos estudantes o professor deve buscar novas formas de abordar os conteúdos. O uso de materiais manipulativos nas aulas de Matemática oferece mecanismos que facilitam a compreensão de conceitos complexos, que em muitos casos são de difícil abstração por parte dos alunos. Para Minchillo:

> [...] quando existe curiosidade, interesse ou estratégias de aprendizagem mais envolventes, todo o processo tende a se tornar mais eficaz. Diante desse fato, professores buscam, constantemente, propostas pedagógicas diferenciadas. Procuram envolver os estudantes, atualizar em relação às suas práticas e criar e experimentar estratégias mais dinâmicas com o intuito de alcançar maior êxito nos processos envolvidos na aprendizagem. (2013, p.17)

Reys (1982) define materiais manipuláveis como:

> *Objectos* ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser *objectos* reais que têm aplicação nos afazeres do dia-a-dia ou podem ser *objectos* que são usados para representar uma ideia. (*apud* VALE, 1999, p.111 e 112).

O material manipulável proporciona ao aluno uma autonomia no processo de aprendizagem. Promover a visualização de objetos matemáticos por meio de uma representação física estimula o desenvolvimento da relação entre o concreto e o abstrato, estimulando de forma significativa à intuição do estudante. Em uma nova visão de ensino, como uma metodologia investigativa os professores deixam de ser expositores de informações e passam a ser facilitadores e mediadores do ensino aprendizagem. Leite acredita:

> [...] que um dos caminhos mais promissores para se melhorar o aprendizado escolar seja através da melhoria dos materiais de ensino. Os fatores mais importantes que influenciam o valor para o aprendizado dos materiais de ensino referem-se ao grau em que estes materiais facilitam uma aprendizagem significativa. (2007, p.5)

Contudo, o material manipulável não pode ser considerado como uma atividade de lazer para os alunos, ele deve ter como objetivo principal uma aprendizagem mais significativa para os estudantes. Por este motivo a atividade relacionada ao material manipulável deve ter um planejamento adequado, o professor deve pensar nos fatores indispensáveis para uma boa atividade, tais como: conhecer bem a turma, as dificuldades implícitas, conhecer todos os procedimentos, estar preparado para eventuais mudanças de estratégias, ter todos os recursos necessários e saber se a quantidade dos materiais é suficiente para a aplicação. Leite aponta que:

> Os materiais didáticos manipuláveis propiciarão aos alunos:
>
> - interação e socialização na sala de aula;
> - autonomia e segurança;
> - criatividade;
> - responsabilidade;
> - motivação;
> - compreensão de entes geométricos;
> - efetiva assimilação do conteúdo. (2007, p.6-7)

Após observarmos a importância da utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemáticas, serão apresentados os efeitos das atividades exploratórias/investigativas no aprendizado dos alunos.

2.2. Atividades Exploratórias e Atividades Investigativas

Para compreender o significado de atividades exploratórias e atividades investigativas há a necessidade de, inicialmente, apresentar algumas definições das palavras explorar e investigar. Em um dicionário padrão da língua portuguesa (FERREIRA, 2009, p. 857), encontramos a seguinte definição para explorar “1) Procurar, descobrir. 2) Percorrer estudando, procurando 3) Pesquisar, observar, estudar, especular”, já para investigar (FERREIRA, 2009, p. 1127) tem-se que é “1) Seguir os vestígios de. 2) Fazer diligências para achar; pesquisar, indagar, inquirir. 3) Examinar com atenção; esquadrinhar.”.

Em um contexto mais aplicável a sala de aula Ponte *et. al*. (2003, p. 13) destaca que a palavra investigar tem como significado “procurar conhecer o que não se sabe”, na matemática o sentido da palavra não se altera. Quando um matemático faz uma investigação matemática, ele procura encontrar resultados que ainda são desconhecidos, ou então para verificar se a sua intuição sobre o assunto está inteiramente correta. Em um contexto mais matemático Ponte coloca que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (2009, p.13).

Fiorentini & Cristóvão (2006) descreve as atividades investigativas utilizadas nas aulas de matemática como:

> [...] aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático. Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase das explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática. Devido a essa natureza mais flexível de tarefa, aula ou atividade, podendo as explorações tornarem-se, ou não, investigativas. (*apud* JULIANI, 2007, p.2).

2.2.1. Distinção entre tipos de atividades em sala de aula

Para uma melhor compreensão sobre a atividade Investigativa, vamos distinguir quatro atividades que são muito utilizadas nas aulas de matemática: Exercícios, Problemas, Exploração e Investigativa. Ponte (2003, *apud* CORRADI, 2011, p.167) apresenta o diagrama da figura 1 para fazer distinções mais claras entre esses tipos de atividades.

Figura 1: Exercícios, problemas, exploração e investigação (PONTE, 2003).

Da figura 1, é possível perceber que as quatro atividades são distintas, mas existem ligações fortes entre as próprias, tanto os exercícios quanto os problemas são atividades fechadas, o sentido utilizado na palavra “Fechado” quer transmitir ao leitor que o aluno não terá a liberdade de escolher os passos ou a linha de raciocínio utilizada para encontrar respostas. Tanto o ponto de partida quanto o ponto de chegada de ambas as atividades são determinadas pelo professor.

As atividades exploratórias e as investigativas se assemelham no aspecto aberto de serem lidadas em sala de aula, as duas atividades proporcionam ao aluno a liberdade de resolver as questões pelos seus próprios métodos, podendo chegar a resultados distintos, desenvolvendo nos alunos uma maior autonomia na hora de resolver os problemas.

A distinção das atividades exploratórias e atividades investigativas estão na forma como são aplicadas, a investigativa está embasada em uma problemática classificada como difícil, que exige um tempo maior para ser analisada e resolvida além da tendência à generalização de conceitos e propriedades, já a exploratória está embasada em exercícios que não exigem uma grande dificuldade para os estudantes, que estão voltadas para a exploração do conteúdo.

A distinção entre os exercícios e os problemas vai além do grau de dificuldade que a atividade pode proporcionar ao aluno, os exercícios são diretos, eles solicitam um determinado resultado, preocupando-se apenas com a mecânica utilizada para encontrar a solução (CORRADI, 2011, p.167). Já o problema exige dos estudantes uma interpretação com o enunciado e também um raciocínio elevado para conseguir encontrar a resposta.

A resolução de problemas tem ligações fortes com a investigação matemática, dependendo apenas da forma como é conduzida pelo professor. Na resolução de problemas é indicado de forma clara os dados e o que é pedido no enunciado, já na investigação matemática em cima de um problema as coisas mudam de cenário, a abordagem a resolução do problema é fechada. Na investigação o aluno tem a liberdade de começar por um caminho definido por si só, tendo assim descobertas matemáticas que são próprias. Pela liberdade que a investigação proporciona para os alunos, nem sempre as conclusões e descobertas dos estudantes são idênticas, nem todos os alunos irão chegar ao mesmo ponto, mas todos ganharão ricas contribuições e inspirações para seu conhecimento matemático. Para Ponte *et. al.*:

> Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em matemática exista uma relação estreita entre problemas e investigação. (2003, p.16).

Particularmente a proposta a ser apresentada por esse trabalho, será uma atividade exploratória com possível adaptação a investigação. A atividade dará ao aluno a liberdade de resolver e explorar os problemas da forma que escolherem, mas como o grau de dificuldade da atividade é razoavelmente baixo, está se enquadraria em um modelo exploratório.

Para Ponte (2003, p.99) a grande diferença da atividade investigativa para as demais está em suas situações-problema, que exigem um grande planejamento, a atividade deve ser dividida em quatro momentos principais (tabela 1):

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio.

Tabela 1: Momentos da atividade investigativa.

Todos os momentos enunciados na tabela 1 são fundamentais para uma investigação matemática sólida. O primeiro e o segundo momento estão ligados às bases da investigação, são momentos propícios para o investigador analisar a situação base, especular hipóteses, reunir dados e perceber quais são as ferramentas bases que podem ser utilizadas para encontrar os resultados esperados de sua investigação matemática. No terceiro momento o investigador estará envolvido na parte prática da investigação, neste momento ele realizará os testes, podendo assim, verificar se as hipóteses utilizadas no inicio da investigação são realmente validas ou não, e se alguma hipótese não for valida deve então ser descartada. No quarto e ultimo momento o investigador estará envolvido na argumentação, para poder justificar cada hipótese utilizada, também é um momento para as demonstrações matemáticas, formalizando assim suas hipóteses e o investigador deve avaliar o caminho percorrido para encontrar os resultados, se foi dificultoso e se os resultados encontrados têm grande relevância.

2.2.2. A importância do processo exploratório/investigativo

A atividade exploratória/investigativa tem um papel importante de mostrar aos estudantes o verdadeiro papel do estudo da matemática, da busca por respostas investigando os dados e criando hipóteses para os problemas. Para Braumann (2002) aprender matemática:

> [...] não é simplesmente compreender a matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. (*apud* FIORENTINI, 2012, p.66)

Na educação básica é importante que o aluno tenha contato com uma Matemática voltada para solução de problemas da sociedade e das ciências. Apresentar esse campo do conhecimento de maneira mecânica e formal, apenas aumentará a percepção de que a Matemática é uma disciplina abstrata e sem significado no mundo real. Com o uso de atividades exploratórias/investigativas o estudante poderá entrar em contato com o processo de experimentação e validação, reconhecendo assim a Matemática como ferramenta indispensável à sociedade.

Segundo Braumann (2002):

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado de cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo... Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da matemática (*apud* FIORENTINI, 2012, p.66).

As atividades exploratórias/investigativas poderão mudar algumas percepções sobre a Matemática, alunos com dificuldades poderão encontrar sentido em sua utilização, diminuindo a ideia de uma Matemática completamente fora da realidade, em alguns casos o aluno pode não ter experimentado realmente uma exercitação matemática genuína, em que possa estar envolvido no inicio, meio e fim do tema tratado. O aluno tem a oportunidade de realmente praticar o que aprendeu até então, ele é um ser ativo no processo e pode tirar suas próprias conclusões e encontrar resultados próprios e de grande valor para seu saber matemático. Para Ponte *et. al*.:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (2003, p.23)

A escola deve proporcionar aos alunos o preparo para a convivência em uma sociedade que está em constante mudança. O aluno precisa vivenciar um ambiente em que ele tenha voz ativa, que possa trabalhar em grupo, fazer as suas diversas experimentações e tirar conclusões sobre as descobertas encontradas. As atividades exploratórias/investigativas proporcionam todas as experiências relatadas anteriormente, a construção do saber e as descobertas estão fortemente ligadas a um ensino-aprendizagem mais conciso, pois o aluno está totalmente ativo no processo de aprendizagem.

2.2.3. Papel do professor e do aluno

Ernest (1991) *apud* Serrazina *et. al*. (p.44, 2002) mostra uma tabela (tabela 2) que esclarece os papeis dos alunos e dos professores conforme escolhido o método da atividade proposta.

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o *objectivo* em mente. Conduz o aluno para a solução ou *objetivo.*	Segue a orientação.
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Tabela 2: Papel do professor e do aluno.

Na descoberta guiada o professor se assemelha à locomotiva e os alunos aos vagões, ou seja, a locomotiva que puxa os vagões para o caminho a ser percorrido, os vagões em momento algum deixam de seguir a locomotiva, até porque eles não têm o controle de nada, apenas seguem a locomotiva por onde ela for. Nesse modelo, os alunos seguem os comandos do professor e, no máximo, perguntam sobre algumas dúvidas que possam aparecer no caminho, dificilmente poderão explorar o conteúdo de uma forma distinta.

Nos problemas o foco do aluno está totalmente ligado na forma de resolução, sendo importante utilizar às ferramentas aprendidas no período corrente, restringindo desta forma as opções de exploração. O professor formula o problema e deixa para os alunos resolverem, podendo pedir sua ajuda caso tenham dúvidas, mas ele não estará preocupado em intervir em diversas situações, até porque o caminho não é o que importa, mas sim o resultado encontrado.

E por último, na abordagem investigativa, tanto para o professor quanto para o aluno o que importa é o vasto terreno dos caminhos que podem ser percorridos. O aluno estará preocupado em escolher um problema em meio à situação e descobrir vários caminhos e analisá-los, ele procurará investigar para poder afirmar se são corretos ou não, além das descobertas que estão espalhadas pelo caminho, que muitas vezes podem ser muito mais importantes do que as afirmações. Em meio às situações de análise o professor precisará estar ativo na argumentação e nas intervenções para ajudar os alunos a pensarem e analisarem de forma correta.

O professor precisa exercer o papel de mediador nas atividades exploratórias/investigativas, ele precisa evitar expor as respostas diretamente durante a aplicação, devendo assim favorecer a utilização das opiniões e argumentos dos estudantes. A intervenção do professor é essencial para o bom andamento da atividade, muitas vezes o professor precisa ajudar o estudante que permanece bloqueado em uma determinada ideia dando-lhe dicas e o conduzindo para um caminho produtivo, é importante também, a condução correta do pensamento do aluno, pelo do professor, sem expor que o aluno está errado em um determinado caminho.

Ao utilizar as atividades exploratórias/investigativas para introduzir um novo assunto, o professor está privilegiando a construção de conceitos matemáticos relacionados ao tema, promove a habilidade de criação, ajuda no desenvolvimento do senso crítico e aproxima o estudante da matemática realizada no dia a dia.

Nesse tipo de estratégia, o professor deve apresentar um ponto de partida e, por meio de suas intervenções, novas etapas são alcançadas pelos estudantes, fazendo-os refletir sobre as suas próprias conclusões. É o aluno quem descobre o novo conteúdo, e o caminho do conhecimento percorrido foi todo feito por ele, sendo o professor um facilitador da aprendizagem. Ernest (1996) destaca que:

> A resolução de problemas e as investigações como métodos de ensino requerem que se considere o contexto social da turma e as suas relações de poder. A resolução de problemas permite ao aluno aplicar a sua aprendizagem criativamente, numa nova situação, mas o professor ainda mantém muito do seu controlo sobre o conteúdo e o modo de ensinar. Se a abordagem investigativa é adoptada de modo a permitir ao aluno a formulação de problemas e questões para investigação de modo relativamente livre, torna-se emancipadora (*apud* FIORENTINI, 2012, p. 68)

Após analisarmos a importância dos materiais manipulativos e as atividades exploratórias/investigativas, no processo de ensino aprendizagem, é importante compreender o processo de execução do ensino de geometria espacial nas salas de aula, para assim, ser possível a estruturação da proposta de atividade.

2.3. O ensino de geometria espacial

Um tema de grande discussão na comunidade de Educação Matemática entre a década de 80 e os anos 2000, foi com relação ao abandono do ensino da geometria nas salas de aula. Muitas vezes, por falta de tempo na conclusão da ementa curricular, o professor limita-se a apresentar os temas de geometria no final do ano letivo e de forma superficial. Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1999) *apud* Martines & Andrade (2011, p.6), destacam os principais motivos do abandono do ensino de geometria nas aulas de Matemática:

> 1) A não renovação do ensino de geometria, o que causou um obstáculo na aprendizagem de seus conteúdos;
>
> 2) A formação dos professores, que nos cursos de licenciatura tiveram uma formação que não se preocupou em como eles incluiriam a Geometria em suas práticas pedagógicas;
>
> 3) A formação falha do professor é aumentada com a sobre carga de trabalho o que os obriga a lecionar os conteúdos

> conforme apresentados nos livros didáticos e estes sempre colocavam o conteúdo de geometria no final, o que significava ter-se pouco tempo para lecioná-la ou nem mesmo ter este tempo;
>
> 4) E finalmente a questão curricular que relegou a Geometria a um segundo plano entre os conteúdos a serem ensinados.

Para uma compreensão adequada desses objetos matemáticos, inicialmente o aluno precisa reconhecer os elementos de cada uma das figuras geométricas envolvidas, tais como, polígonos, círculos, poliedros, sólidos, faces, arestas, vértices e etc., estabelecer conjecturas por meio da visualização e em um segundo momento haver a explanação formal das propriedades e generalizações realizadas pelo professor.

> No que se refere às aulas de geometria espacial e geometria analítica, verifica-se que os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos. (ROGENSKI & PEDROSO, 2007, p.5)

Apenas a apresentação de definições e a representação plana do objeto tridimensional, por meio do “quadro-negro”, não são suficientes para que o aluno possa compreender de forma plena as propriedades envolvidas. Normalmente as ilustrações feitas pelos professores no quadro, são representações planas de uma figura tridimensional, complicando a compreensão de alguns elementos do sólido. Apesar das ilustrações do livro didático apresentarem sombreamentos que dão a noção de profundidade, não passam de representações planas de figuras espaciais, tornando-se um complicador na compreensão de conceitos. Por exemplo, alguns alunos não conseguem compreender como o pé da altura de uma pirâmide pode não estar sobre a base dela, no caso de pirâmides oblíquas.

> O aluno recorre à habilidade de visualização para executar diferentes processos mentais. Porém, os materiais concretos permitem ver o objeto em estudo, mas não garantem a habilidade de visualização, que segundo Kaleff (idem, p.17) “não é inata a todos os indivíduos”. Dessa forma, encontramos indivíduos que visualizam e outros que não-visualizam. Sendo assim, a exploração de diferentes materiais manuseáveis aguça a curiosidade e oportuniza o desenvolvimento da percepção sensorial. (ROGENSKI & PEDROSO, 2007, p.4)

A partir da fundamentação teórica discutida, foi possível perceber a importância de utilizar novos recursos no ensino de geometria, e que os materiais manipulativos facilitam a visualização e compreensão dos entes geométricos. Também foi apontada a importância da utilização das atividades exploratórias/investigativas nas aulas de Matemática, fazendo com que o aluno exerça o papel de matemático investigador, além de contribuir na sua autonomia, analise de conjecturas, trabalho em grupo e nas experimentações. Após todas essas reflexões serão apresentados os métodos dessa pesquisa.

3. MÉTODOS

Para confirmação ou não das hipóteses levantadas, alcance dos objetivos e respostas para a problemática em questão, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e uma de campo.

A pesquisa bibliográfica teve como objetivo compreender de uma forma sólida os conhecimentos sobre os materiais manipulativos e as atividades exploratórias/investigativas para estruturação da proposta de atividade. Após esta etapa foi planejado uma proposta metodológica de uma atividade exploratória/investigativa que utilizasse os materiais manipulativos em geometria espacial.

Com a atividade elaborada, foi feita uma aplicação das mesmas em uma turma do Ensino Médio a fim de colher dados a serem analisados.

3.1. Pesquisa bibliográfica

Para fundamentar a pesquisa bibliográfica foram utilizados os livros disponíveis na biblioteca do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda (IFRJ), além destes foram utilizados artigos, dissertações e teses na base do Google Acadêmico.

Após o estudo do material bibliográfico, foi realizado fichamentos que proporcionaram a elaboração da fundamentação teórica necessária, focada nos seguintes temas:

- O uso dos materiais manipulativos no ensino de geometria.
- Atividades exploratórias e investigativas.
- As dificuldades na compreensão de conceitos de Geometria Espacial.

3.2. Proposta de atividades

Com base na bibliografia levantada foi elaborada uma proposta exploratória/investigativa (apêndice 1, p. 49), que utilizou materiais manipulativos para facilitar a compreensão dos entes geométricos.

As atividades foram escolhidas de forma a introduzir novos conceitos, a partir conhecimentos do Ensino Fundamental. Não foi mencionado ou ensinado o cálculo dos volumes dos sólidos, mas as atividades deram a possibilidade da visualização das figuras em 3ª dimensão e a analise dos seus elementos e propriedades, ajudando os alunos a se familiarizarem com a geometria espacial.

O modelo escolhido para aplicar a atividade teve um caráter mais exploratório focado em descobertas guiadas (ERNEST, 1991, *apud* SERRAZINA, 2002, p.44) com pequenas fases de investigação Ponte (2003, p. 99), pois contexto escolar em que os alunos se encontravam favorecia tal procedimento. Conforme Fiorentini & Cristóvão (2006, *apud* JULIANI, 2007, p. 2) podemos tirar como base que a aplicação poderia ter um desfecho totalmente investigativo se a intenção da atividade fosse de generalizar e empregar testes (FIORENTINI & CRISTÓVÃO, 2006, *apud* JULIANI, 2007, p. 2), o que nessa pesquisa não foi o caso. Pequenas adaptações no material podem caracterizá-lo como atividade plenamente investigativa, o que fica como sugestão para trabalhos futuros.

A atividade foi dividida em cinco tópicos, respectivamente relacionados aos seguintes sólidos: paralelepípedo, prisma reto de base triangular, hexaedro, tetraedro e pirâmide de base hexagonal. Em todas as atividades as equipes recebiam um material manipulativo estruturado por palitos de madeira e bolinhas de isopor, representando os sólidos geométricos mencionados (Figura 2).

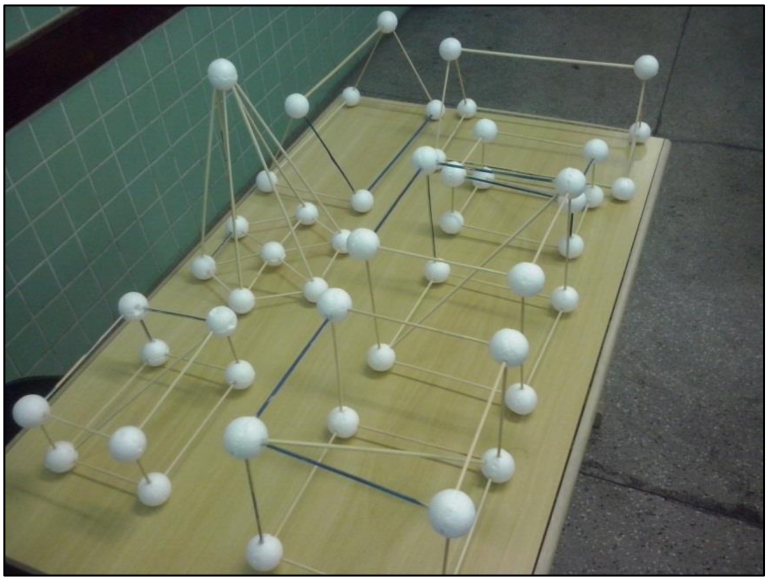


Figura 2: Estruturas de palito e isopor, representando os sólidos geométricos.

Os únicos pré-requisitos necessários para realização das tarefas foram: conhecimento do Teorema de Pitágoras, cálculo de área de figuras planas e trigonometria no triângulo retângulo. Todos os participantes já haviam estudado esses temas em anos anteriores.

Como instrumento de medida eles podiam utilizar apenas uma régua de 30 cm e para dinamizar os cálculos a calculadora científica foi liberada.

Antes de entregar os sólidos aos grupos, foram definidos e apresentados os elementos de um poliedro: arestas, faces e vértices. Assim como apótema, diagonal e altura, utilizando como referência as estruturas de palito e isopor (Figura 2).

A entrega dos "sólidos" foi realizada conforme descrito na Tabela 3. Por exemplo, a equipe B recebeu primeiramente o cubo, ao término das atividades referentes a esse sólido, recebeu o paralelepípedo, seguido do prisma triangular, pirâmide hexagonal e tetraedro.

Atividade / Grupos	**Paralele-pípedo**	**Cubo**	**Tetraedro**	**Pirâmide Hexagonal**	**Prisma Triangular**
A	1º	5	4	3	2
B	2º	1º	5º	4	3
C	3	2	1	5	4
D	4	3	2	1	5
E	5	4	3	2	1

Tabela 3: Distribuição dos sólidos

Este tipo de estratégia foi utilizado por haver apenas duas estruturas congruentes por sólido e para evitar que dois grupos estivessem realizando as mesmas atividades ao mesmo tempo.

3.3. Objeto da pesquisa e amostra

A atividade foi aplicada em uma turma, 5º período do ensino médio/técnico (equivalente ao 3º ano do EM nas escolas em geral) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda (IFRJ). Uma amostra de 28 estudantes participou das atividades (pesquisa de campo). Ao término os dados foram coletados para uma posterior análise dos resultados.

3.4. Objetivos e análise das atividades

A proposta da atividade foi focada no aluno como centro do processo de ensino, coautor de sua aprendizagem e o professor como sendo o mediador, auxiliando assim os estudantes nas resoluções.

A proposta tinha como objetivos gerais de despertar no estudante:

- O trabalho colaborativo com seus colegas.
- A execução de experimentações.
- A autonomia.
- A descoberta de propriedades.
- Manipulação, visualização e exploração dos sólidos.

A atividade também teve objetivos específicos para os sólidos estudados. Em geral queríamos que os participantes encontrassem os valores das diagonais, apótemas, alturas e ângulos sem utilizar fórmulas prontas, e também que encontrassem os valores das áreas de cada sólido para se familiarizarem com os mesmos. A atividade obrigava o estudante a pegar as estruturas (sólidos) e medir suas arestas para que somente depois faça os cálculos. Desta forma torna-se evidente a diferença com os exercícios tradicionalmente utilizados em sala de aula, porque nessa atividade o aluno precisará se envolver com o sólido.

Desta forma, foram recolhidas as resoluções de cada grupo para serem analisadas se os estudantes seguiram as recomendações de utilizarem somente os pré-requisitos básicos, que são somente o teorema de Pitágoras e as fórmulas de área de triangulo e retângulo e se tiveram êxito em resolver os problemas.

3.5. Pesquisa de opinião

Por fim, foi aplicado um questionário (apêndice 2, p. 51) na turma, afim de captar a percepção dos alunos sobre a qualidade da atividade e sua importância para compreensão dos conceitos. Foram feitas três perguntas, sendo a primeira envolvendo os materiais manipulativos, a segunda sobre a atividade exploratória/investigativa e a terceira sobre qual as principais dificuldades na resolução da atividade.

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capitulo serão discutidos os resultados das atividades exploratórias/investigativas proposta para introduzir os conceitos de geometria espacial.

4.1. Atividades envolvendo o paralelepípedo

Nessas atividades os estudantes deveriam determinar a medida da diagonal das faces, assim como a diagonal do paralelepípedo e a medida de sua área total (figura 3). As únicas medidas que poderiam ser mensuradas utilizando a régua eram as dimensões do paralelepípedo, pintadas de azuis.

Usando uma régua de 30 cm, meça apenas a aresta pintada de azul, na estrutura formada por palitos e isopor, que representam sólidos geométricos, para determinar as medidas indicadas.

Prisma Reto de Base Retangular (Paralelepípedo)

a) Determine as medidas das diagonais das faces?
b) Determine a medida da diagonal do paralelepípedo?
c) Determine a medida da área total do paralelepípedo?

Figura 3: Atividades envolvendo o paralelepípedo.

É importante destacar que nenhuma das equipes cometeu erros nessas atividades, apesar de haver pequenas diferenças de resultados referentes às medições realizadas com a régua.

No item **a** (figura 3) dessa questão foi solicitado aos alunos a encontrarem os valores das diagonais de cada face.

Por meio da Figura 4, percebemos que a equipe A utilizou apenas o Teorema de Pitágoras, pré-requisito do Ensino Fundamental, para encontrar os valores das diagonais das faces. Todos os grupos utilizaram o mesmo método de resolução, porém houve diferenças nos resultados em virtude da mensuração realizada com a régua.

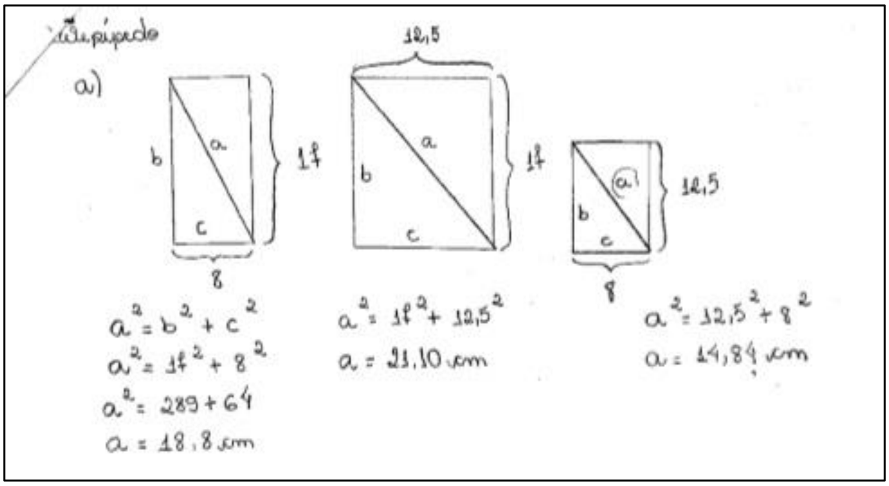


Figura 4: Resolução da equipe A, primeira atividade de paralelepípedo.

Conforme destacado por Leite (2007, p.6,7) foi possível perceber uma maior interação e socialização dos alunos, durante a realização da atividade. Além disso, percebeu-se a criatividade do grupo ao descrever um modelo geométrico em papel representando as faces do paralelepípedo, destacando a compreensão dos entes geométricos o que caracteriza a efetiva assimilação dos conteúdos estudados.

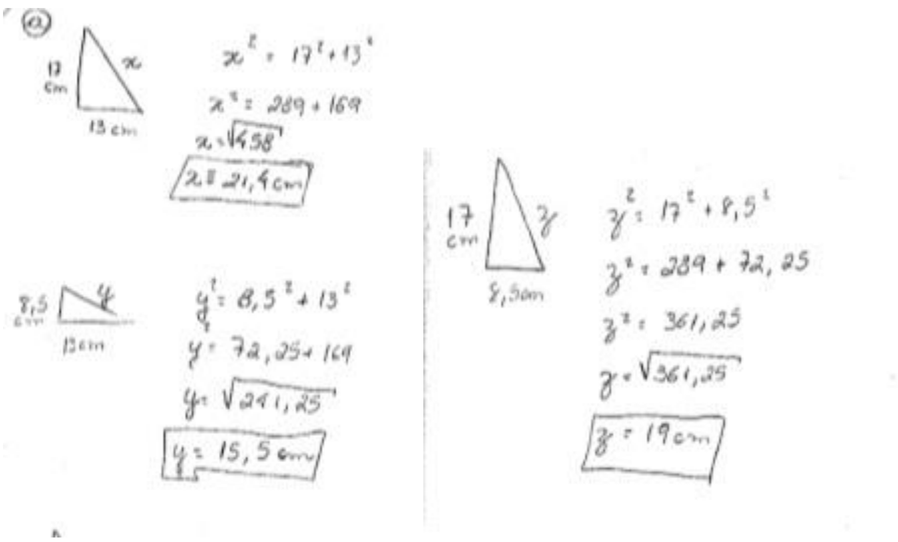


Figura 5: Resolução da equipe B, primeira atividade de paralelepípedo.

Com relação as diferenças de medições e resultados podemos destacar a resolução do grupo B (figura 5) , comparada com a do grupo A (figura 4), que encontraram 17cm, 13cm e 8,5cm como dimensões, e 17cm, 12,5cm e 8cm, respectivamente.

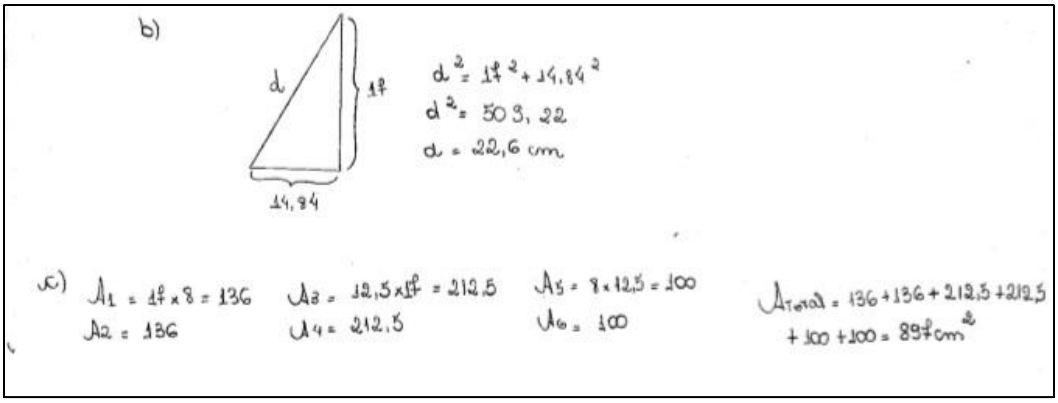


Figura 6: Resolução da equipe A, segunta e terceita atividades sobre paralelepípedo.

Para item **b,** das atividades envolvendo o paralelepípedo, o grupo A (figura 6), assim como as demais equipes utilizaram os resultados do item anterior (diagonais das faces) para determinarem a diagonal do paralelepípedo, sem haver a necessidade de utilizar a fórmula $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, em que a, b, e c são as dimensões e D é a diagonal. A utilização direta de fórmula agiliza a resolução da atividade, mas por outro lado induz o aluno a uma memorização desnecessária, podendo limitá-lo a compreensão plena dos significados geométricos. A atividade despertou o aspecto investigativo dos alunos na busca pela resposta. Conforme apresentado por Ponte *et. al*. (2003), esta atividade deixou os alunos livres para decidirem que caminho tomar para a sua resolução, caracterizando atividades de cunho exploratório/investigativo.

No item **c** (figura 6) o grupo A igualmente as outras equipes, usaram as arestas medidas para encontrar o valor de cara área da face, e por último somaram as áreas encontradas para chegar ao resultado da área total do paralelepípedo. Nenhum grupo utilizou uma fórmula direta para encontrar o resultado, como por exemplo: $St = 2(\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac})$.

Nenhum dos grupos utilizou as fórmulas usuais para obtenção da diagonal e área do paralelepípedo. Os estudantes respeitaram todas as restrições impostas de apenas usar o Teorema de Pitágoras e as fórmulas de área de triângulo e do retângulo.

O objetivo de resolução das questões utilizando apenas requisitos previamente estudados, discussão em grupo (figura 7) e experimentação foram atingidos em sua íntegra.

Figura 7: Trabalhando em grupo

4.2. Atividades envolvendo o prisma reto de base triangular

Nessa atividade os estudantes deveriam calcular a medida da altura do triângulo da base, assim como encontrar o valor das áreas das faces e a área total do prisma reto de base triangular (figura 8).

Prisma Reto de Base Triangular

a) Determine a medida da altura de um dos triângulos da base?
b) Determine a medida da área lateral do prisma?
c) Determine medida da área da base do prisma?
d) Determine a medida da área total do prisma?

Figura 8: Atividades envolvendo o prisma reto de base triangular

Na figura 9 temos a resolução dos itens de **a** até **d** do grupo A:

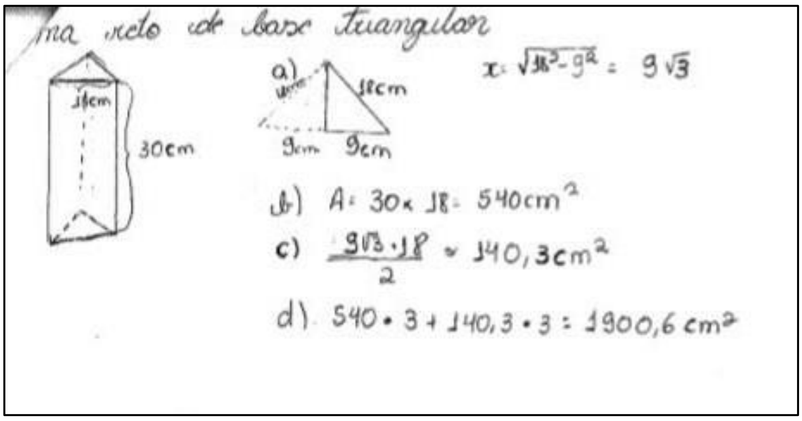


Figura 9: Resolução do grupo A de todos os exercícios sobre prisma reto de base triangular.

No item **a** (figura 9) o grupo usou o teorema de Pitágoras para encontrar a medida da altura da base. Na medição das arestas da base os alunos perceberam que o triângulo é equilátero, uma das questões conjecturadas pelos estudantes era se o pé da altura se localiza no ponto médio da base do triângulo, por meio do diálogo entre os estudantes e o pesquisador, no papel de professor mediador, justificativas matemáticas foram apresentadas para comprovar as hipóteses, os participantes relembraram que, em um triângulo equilátero, a altura, mediana, a bissetriz e a mediatriz estão todas sobre a mesma reta suporte e passam pelo ponto médio da base do triângulo. Na figura 10, é possível verificar intervenções do professor mediador.

Figura 10: Intervenção mediadora.

Utilizando as propriedades do triângulo equilátero o grupo conseguiu encontrar o resultado da questão sem utilizar a fórmula $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, que determina a altura de um triângulo equilátero em função de seu lado, mais uma vez podemos observar que houve liberdade para os estudantes explorarem os resultados.

No item **b** (figura 9) houve um erro aparentemente de falta de atenção. Os alunos calcularam apenas a área de uma das faces laterais, esquecendo-se das outras duas faces laterais existentes. No item **c** a área da base do prisma foi calculada corretamente por todas as equipes. Já no item **d** existiram pequenas desatenções por partes dos estudantes desse grupo, que multiplicaram a área da base do prisma por 3, devendo ser por 2, entretanto o resultado está correto, dessa forma leva-se a concluir que houve um pequeno descuido.

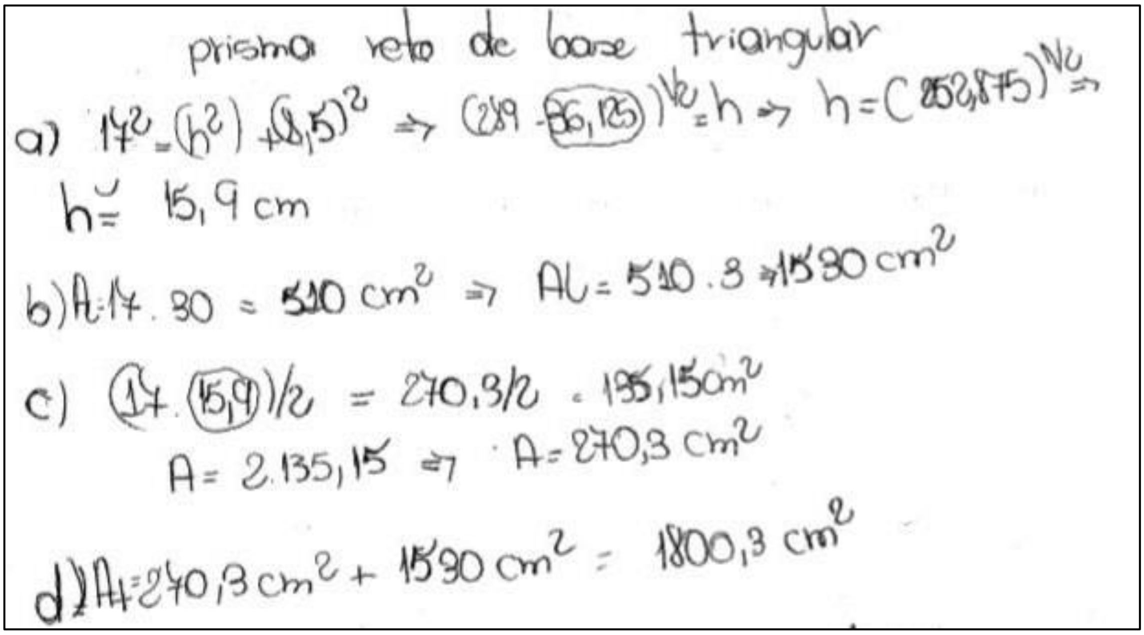


Figura 11: Resolução do Grupo E

No item **a** (figura 11) o grupo E cometeu um erro de cálculo no momento que coloca $(8{,}5)^2$ = 36,125. Este erro fez o grupo encontrar o valor errado para a altura da base do prisma. No item **b** o grupo calculou a área lateral do prisma corretamente, encontrando a área de cada retângulo lateral e multiplicando por três para encontrar o resultado. No item **c** os alunos precisaram utilizar a altura da base para encontrar o valor da área da base do prisma, como o valor da altura da base encontrado no item **a** estava errado, acabou havendo erro nesse item também. No item **d**, como a área da base encontrada no item **c** estava errada, resultou numa soma de áreas que não chegou ao valor correto. De qualquer forma, os objetivos alvejados para esta atividade foram atingidos, pois todos os grupos utilizaram o material manipulativo para conjecturarem as propriedades do prisma, usaram apenas conhecimentos do ensino fundamental para alcançarem os seus resultados, tiveram a liberdade para escolherem os seus próprios caminhos para resolução e reconhecendo o professor apenas como um mediador e não o detentor do conhecimento, ver figura 12.

Figura 12: Foto dos estudantes no trabalho cooperativo.

Nos demais grupos houve alguns pequenos erros como, por exemplo, o grupo B que confundiu a altura da base com a altura do prisma. Mas de forma geral os grupos conseguiram resolver a atividade com certa facilidade.

4.3. Atividades envolvendo o Cubo

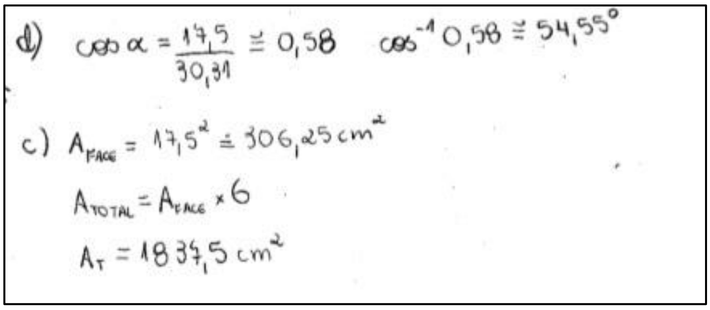
Nessa atividade os estudantes deveriam calcular a medida da diagonal das faces e do cubo, assim como a área total e um ângulo especifico do cubo, figura 13.

Cubo (Hexaedro)

a) Determine a medida da diagonal das faces?
b) Determine a medida da diagonal do cubo?
c) Determine a área total do cubo?
d) Qual é o ângulo entre a diagonal do cubo e a uma das faces?

Figura 13: Atividades envolvendo o cubo

Os itens **a, b e c** da figura 13 são parecidos com os exercícios resolvidos com base no sólido paralelepípedo, desta forma os alunos apenas reforçaram as relações e resolveram os itens sem dificuldades. Será dada atenção ao item **d** (figura 13) que foi motivo de dificuldade e mal interpretada por alguns grupos. Um exemplo de interpretação errada do item **d** foi o grupo “A” na figura 14:


d) $\cos \alpha = \frac{17,5}{30,31} \cong 0,58 \quad \cos^{-1} 0,58 \cong 54,55°$

c) $A_{FACE} = 17,5^2 = 306,25 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{FACE} \times 6$

$A_T = 1837,5 \text{ cm}^2$

Figura 14: Resolução do grupo A dos itens **c** e **d**.

No item **d** da figura 14 pedia-se para descobrir o valor do ângulo que se encontrava entre a diagonal e uma das faces do cubo. O grupo se equivocou ao utilizar o cosseno do ângulo procurado, na verdade deveriam ter usado o seno, provavelmente o grupo modelou de forma errada o triângulo retângulo necessário para aquisição das relações de seno, cosseno e tangente para resolver a questão.

Para encontrar o valor correto do ângulo pedido no item **d** (figura 13), os grupos deveriam utilizar as relações a seguir retiradas da figura 15.

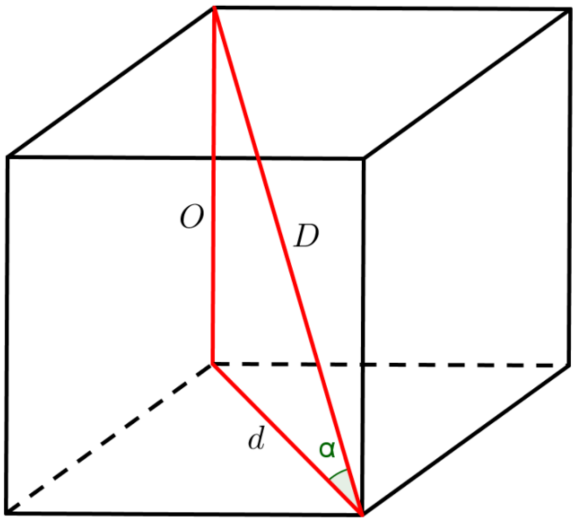


Figura 15: Triângulo interno ao Cubo.

Conforme a figura 15 pode ser observado o triângulo que contem o ângulo α, hipotenusa “D”, cateto oposto “O” e cateto adjacente “d”, pelas relações de seno, cosseno e tangente a seguir poderemos encontrar o valor do ângulo α .

$$\alpha = arcsen\left(\frac{d}{D}\right)$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{O}{D}\right)$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{d}{O}\right)$$

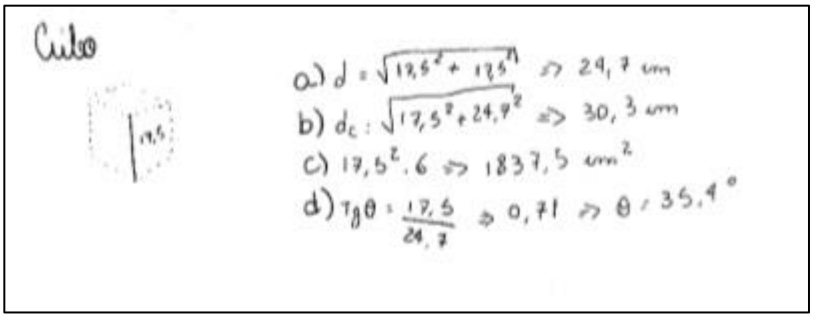


Figura 16: Resolução do grupo C de todos os exercícios sobre o cubo.

O grupo C acertou todos os itens sobre o cubo, na figura 16, percebe-se que o grupo C utilizou corretamente a relação de tangencia, encontrando assim o ângulo aproximado a 35,4º, pedido no item **d**.

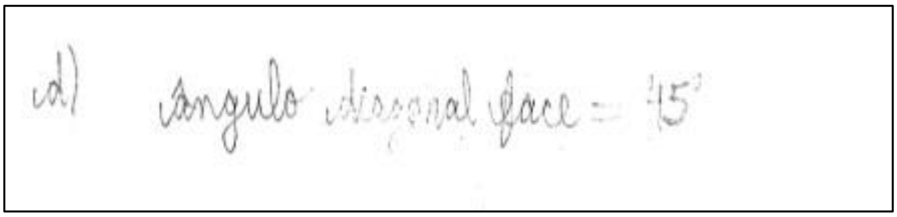


Figura 17: Resolução do grupo E dos itens **c** e **d.**

Na figura 17 lê-se a solução do grupo E, que concluiu que o ângulo pedido era igual a 45º, provavelmente por ter o objeto em mãos acabou chegaram a tal resultado de forma visual, como a diagonal da face de um cubo forma 45º com a aresta dessa face, deve ser convincente para eles de que a diagonal do cubo mantém está propriedade com a sua face. O grupo não poderia afirmar o seu resultado apenas pela visualização, no inicio da atividade foi destacado que os cálculos deveriam ser apresentados, além de que a intuição muitas das vezes nos leva a resultados incorretos.

A ideia do paragrafo anterior é apenas uma hipótese, existe a possibilidade do grupo apenas ter arriscado um valor para o ângulo, porque não sabiam resolver o problema.

É importante mencionar que os exercícios foram resolvidos em grupo, à atividade tinha como propósito também estimular o trabalho em equipe, incentivar a discussão de ideias para chegarem a um consenso.

4.4. Atividades envolvendo o Tetraedro

Nessas atividades os estudantes deveriam calcular a medida do apótema lateral, assim como a altura, área total e um ângulo especifico do tetraedro, veja figura 18.

Pirâmide de base triangular (Tetraedro)

a) Determine a medida do apótema lateral?
b) Determine a medida da altura da pirâmide?
c) Qual é o ângulo formado entre a aresta lateral e a base da pirâmide?
d) Determine a área total do tetraedro?

Figura 18: Atividades envolvendo o Tetraedro.

A maioria dos grupos não tiveram dificuldades nessa atividade, uma dúvida geral entre os grupos era sobre o pé da altura do tetraedro. O professor mediador expôs a questão do baricentro, que era desconhecida da grande maioria dos participantes. Na figura 19 é possível observar o material manipulativo, representando o tetraedro e uma discussão sobre o pé de sua altura.

Figura 19: Estudante segurando um tetraedro.

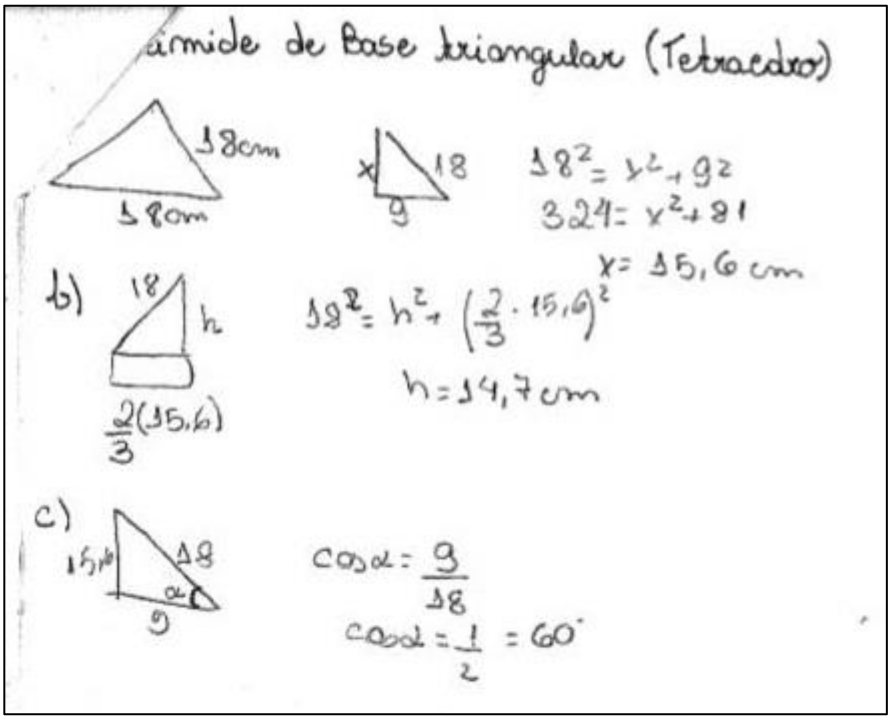


Figura 20: Resolução do grupo B dos itens **a, b e c.**

Na item **c** (figura 20) o grupo provavelmente deve ter esquecido de utilizar a propriedade do baricentro, uma possível falta de atenção, até porque este mesmo grupo utilizou a mesma propriedade na letra “b” logo acima.

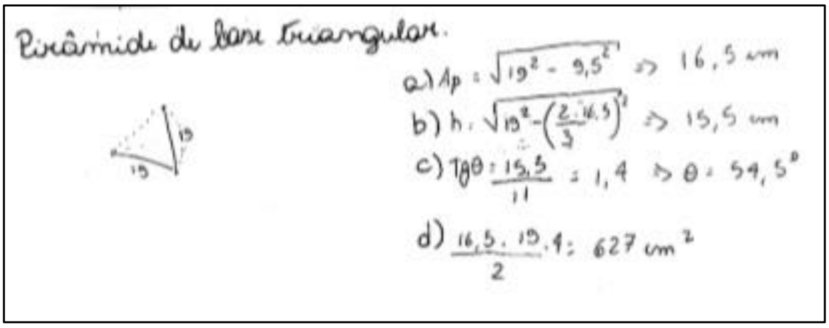


Figura 21: Resolução do grupo C.

Por observar o grande número de estudantes pedindo ajuda sobre o que seria o baricentro e sua propriedade, foi feito então uma breve explicação para os grupos sobre o baricentro. O grupo C (figura 21) foi uma das equipes que assimilou corretamente o baricentro e obteve sucesso em sua resolução do item **c**. O grupo utilizou o arco tangente para encontrar o valor do ângulo solicitado no item c, outros grupos encontraram o resultado correto utilizando, por exemplo, o arco seno (grupo E).

4.5. Atividades envolvendo a Pirâmide de base hexagonal

Nesse exercício os estudantes deveriam calcular a medida do apótema lateral e da base, assim como a altura, área total e um ângulo especifico da pirâmide de base hexagonal (figura 22).

Pirâmide de base hexagonal

a) Determine a medida do apótema lateral?
b) Determine a medida do apótema da base?
c) Determine a altura da pirâmide?
d) Determine a área da base?
e) Determine a área lateral da pirâmide?
f) Determine a área total da pirâmide?
g) Qual é o ângulo que fica entre uma aresta lateral e a base da pirâmide?

Figura 22: Atividades envolvendo a pirâmide de base hexagonal.

Os alunos não tiveram dificuldades para resolver a maioria das questões pedidas, a maior dificuldade esteve novamente na determinação do ângulo solicitado no item g (figura 22).

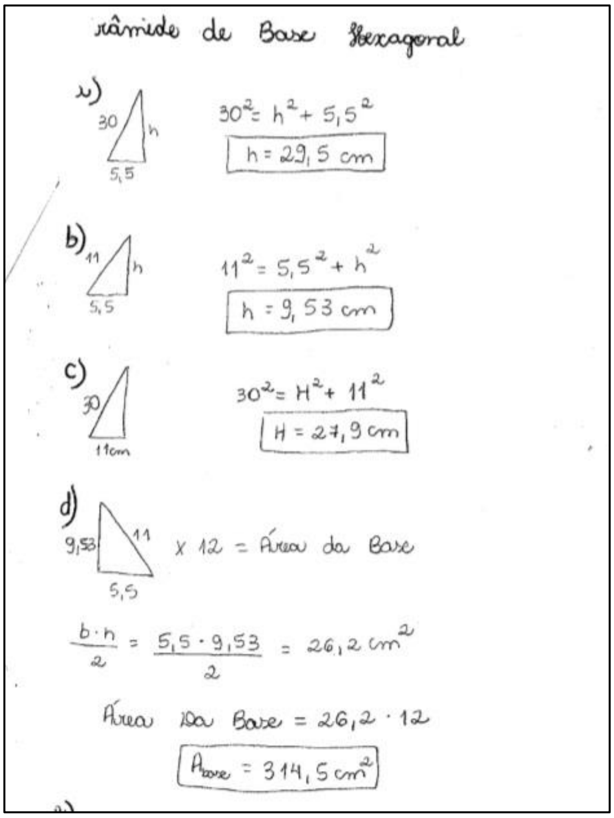


Figura 23: Resolução do grupo D dos itens **a, b, c** e **d.**

Nos itens **a, b** e **c** na resolução apresentada na figura 23, foi usado o teorema de Pitágoras mais uma vez, o grupo conseguiu calcular a medida do apótema da base e lateral e a altura, utilizaram modelos matemáticos para chegarem as suas conclusões.

No item **d** os alunos apenas utilizaram o valor encontrado do apótema da base que é igual à altura de cada um dos seis triângulos da base, para calcular a área de cada triângulo da base, curiosamente este grupo dividiu a base em 12 triângulos iguais, para somar a área de cada um, encontrando assim o valor total da área da base, caracterizando a liberdade na escolha do processo de resolução, proporcionado pelas atividades exploratórias/investigativas.

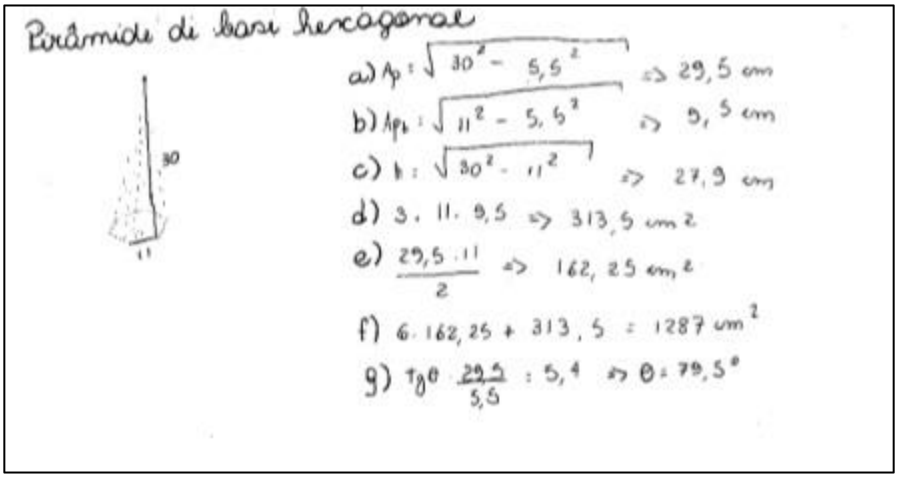


Figura 24: Resolução do grupo C de todos os itens.

Na figura 24 podemos observar que os itens **a**, **b** e **c,** o grupo C utilizou o teorema de Pitágoras, na verdade todos os grupos utilizaram o mesmo método para encontrar o resultado. Diferentemente do grupo D (figura 23), no item **d,** este grupo dividiu a base da pirâmide em seis triângulos iguais para calcular a área da base. No item **e** o grupo esqueceu apenas de que são seis faces laterais, deste modo deveriam ter multiplicado por seis para encontrar a área lateral. No item **f** os alunos simplesmente somaram as áreas laterais com a da base. E por último o grupo tentou calcular o ângulo pedido, mas infelizmente calcularam o valor de um ângulo de forma errada.

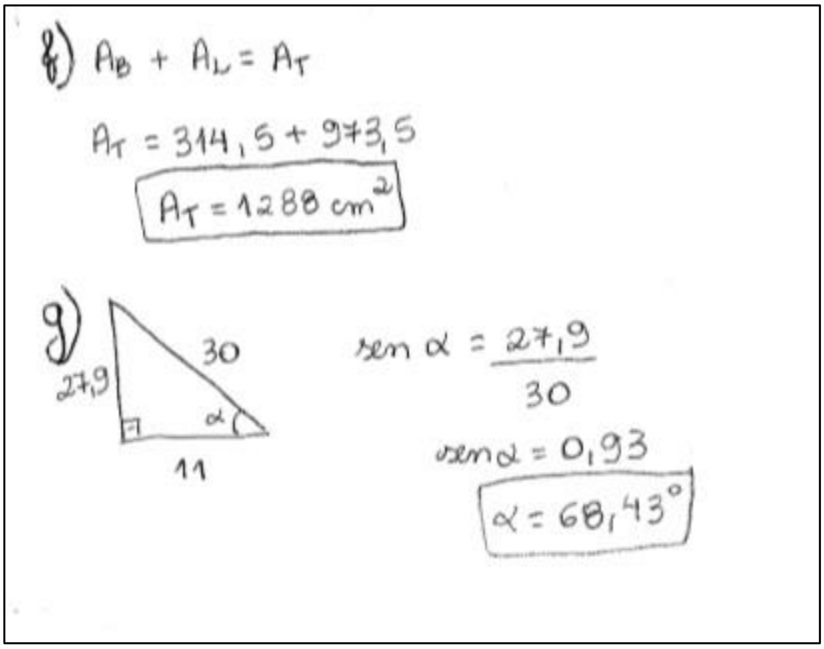


Figura 25: Resolução do grupo D.

Na (figura 25) podemos observar uma resolução correta do ângulo pedido no item **g**, o grupo desenhou ao lado o triângulo que contem o ângulo, com as medidas devidamente organizadas no esboço, os alunos resolveram juntar os dados para encontrar o resultado utilizando o seno, usaram o cateto oposto ao ângulo que é igual a altura da pirâmide e a hipotenusa que é igual a uma aresta lateral, desta forma os estudantes encontraram o valor do seno do ângulo, e na calculadora descobriram o arco seno da razão encontrada, descobrindo assim o ângulo pedido.

A atividade em geral proporcionou aos grupos a possibilidade de estarem realizando experimentações, conjecturas de propriedades e confirmação de resultados, conforme destacado por Ponte (2003, p. 23). As experimentações estavam ligadas as distintas formas que os alunos poderiam manipular os sólidos geométricos, as conjecturas podiam ser pensadas conforme a indagação das perguntas e os resultados eram encontrados pelos alunos, sendo somente eles quem analisavam se estaria correto ou não.

Foi percebido que a maioria dos erros cometidos pelos grupos foram por falta de atenção e interpretação das questões, mesmo com os erros cometidos os alunos mostraram a capacidade de trabalhar de forma colaborativa, autonomia na análise e discussão de resultados, maior potencial de argumentações e justificativas matemática, além de estarem agindo como “matemáticos”. Ao utilizarem apenas conhecimentos previamente estudados para alcançarem os seus resultados, mostraram-se como coautores de sua própria aprendizagem, colocando o professor no papel fundamental de mediador e facilitador desse processo.

4.6. Percepção dos participantes sobre as atividades

Neste capitulo serão analisadas as respostas dos estudantes feitas com base num questionário (apêndice 2, p.51), as perguntas estão relacionadas com a atividade aplicada.

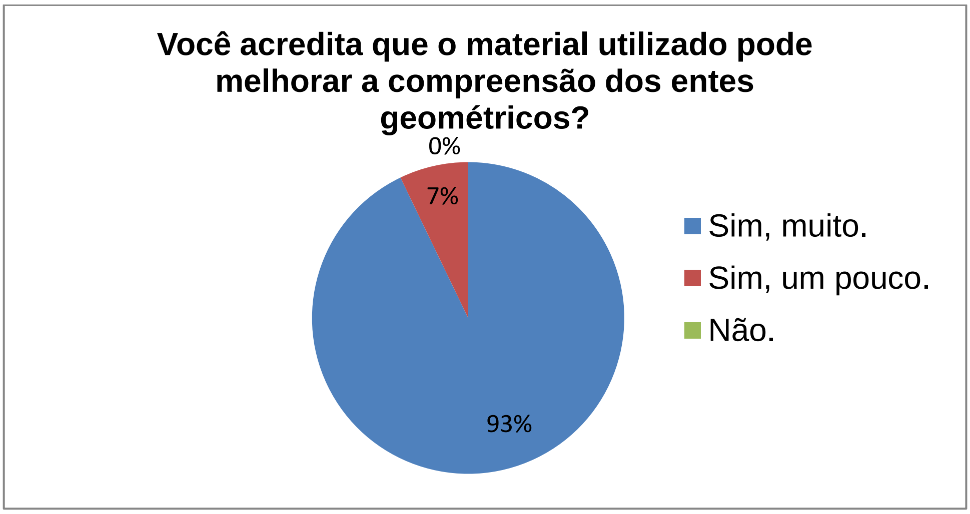


Figura 26: Percepção sobre Materiais Manipulativos.

(figura 26) Isto destaca a grande aceitação dos estudantes na utilização dos materiais manipulativos no ensino de geometria. A porcentagem da escolha pela alternativa “sim, muito” chega a 93%, mostrando assim o impacto que o material pode exercer nas atividades de geometria.

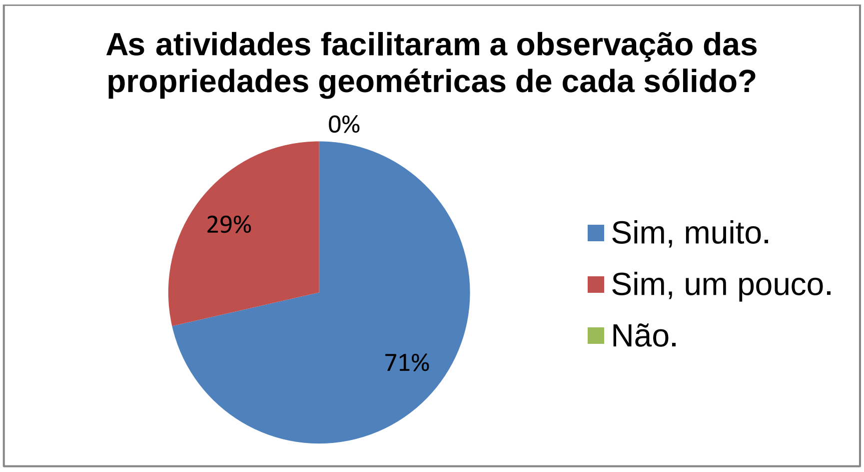


Figura 27: Percepção sobre a Atividade.

No gráfico da figura 27 pode ser observado que existiu uma grande aceitação do método desenvolvido de ensino para os estudantes, mais do que 70% dos estudantes escolheram a alternativa “Sim, muito”.

A terceira pergunta feita no questionário solicitou aos estudantes relatarem qual a maior dificuldade para resolver os exercícios. A tabela 4 destaca as principais respostas dos alunos.

Opiniões	Quant	%	Principais citações dos alunos
Não houve dificuldades	8	28,6%	*“Não encontrei dificuldade alguma. Tornou algo até então abstrato em conteúdo palpável, muito útil!”* *“Devido a excelente técnica de ensino abordada pelo Samuel utilizando poliedros em 3D, não houve nenhuma dificuldade.”*
Sobre o baricentro	4	14,3%	*“Achar o baricentro, pois não recordava a propriedade, acho que nem conhecia.”*
Dificuldades com trigonometria	3	10,7%	*“Relembrar a matéria de trigonometria pertinente aos cálculos de ângulos.”*
Nomenclatura	4	14,3%	*“O uso de propriedades e nomenclaturas matemáticas pouco utilizadas rotineiramente.”*
Medição das arestas	2	7,1%	*“A medição dos comprimentos das arestas.”*
Conceitos do ensino fundamental	3	10,7%	*“A utilização dos conceitos básicos que deveriam estar bem esclarecidos, mas que, porém não foram devidamente aprendidos no ensino fundamental.”*
Outros	4	14,3%	*“A falta de contato com essa matéria.”*

Tabela 4: Tabela com informações da terceira pergunta do questionário.

Sem contar os oito alunos que não tiveram dificuldade, os demais estudantes precisaram se superar para ajudar os colegas nas resoluções, porque a dificuldade envolvendo os conteúdos ou métodos estava presente nas atividades. Por ser um trabalho em grupo, um colega pode ajudar o outro em suas dificuldades além de ter o auxilio do condutor da atividade nos momentos que fossem oportunos.

A trigonometria foi um dos pontos mais destacados nas dificuldades, principalmente quando envolvia seno, cosseno, tangente, além das propriedades do baricentro e apótema, nesses casos foi apresentado uma explicação momentânea na lousa, por perceber que os estudantes não lembravam ou desconheciam o significado e as propriedades de cada um dos conceitos.

Importante destacar que os alunos que não tiveram dificuldades, escreveram sobre a ajuda que o material manipulativo ou o modelo exploratório/investigativo contribuíram para concluírem o trabalho com sucesso.

5. CONCLUSÕES

Com a estruturação da fundamentação teórica e da pesquisa de campo foi possível encontrar algumas respostas para o problema inicialmente levantado "O uso de materiais manipulativos e atividades exploratório/investigativas podem minimizar as dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos envolvendo a Geometria Espacial?", além de alcançar os objetivos destacados e confirmar algumas hipóteses.

Por meio da revisão bibliográfica foi possível estabelecer as relações entre exercícios, problemas, atividades exploratórias e atividades investigativas, além de promover uma melhor compreensão sobre o uso de materiais manipulativos em sala de aula. Esse método norteou o pesquisador para a elaboração de uma proposta de atividade que envolvesse essas técnicas e garantisse uma melhor compreensão dos conceitos de geometria espacial aos estudantes. Alcançando assim os objetivos propostos.

A compreensão plena das propriedades de um sólido geométrico, em alguns casos, pode não ser assimilada por haver a necessidade de uma conversão da representação plana de um objeto tridimensional, onde nesses casos, a utilização de materiais manipulativos é recomendada, conforme destaca Rogenski & Pedroso (2007). Confirmando assim um dos pressupostos da pesquisa.

Foi possível corroborar, por meio das análises dos resultados, que a conjectura das propriedades geométricas foram descobertas e discutidas pelos participantes, em um modelo colaborativo de aprendizagem, sem a utilização de fórmulas e conceitos prontos.

Após a análise das respostas emitidas pelos estudantes sobre a opinião/percepção das atividades conclui-se que houve uma boa aceitação desse modelo, onde os participantes, em sua grande maioria, consideraram que os materiais manipulativos ajudaram na compreensão das propriedades geométricas e as atividades exploratórias/investigativas garantiram a construção dos conceitos envolvidos de forma mais dinâmica e autônoma.

Conclui-se assim que as hipóteses e objetivos da pesquisa foram atingidos, respondendo a questão levantada.

Em termos de limitação da pesquisa destacamos que a amostra não é suficiente para realização de inferências estatísticas, entretanto os resultados poderão servir como um instrumento de estudo e aplicação dos professores de matemática. Pesquisas futuras podem utilizar o modelo proposto, incluindo outras variáveis, em uma amostra mais significativa.

6. REFERENCIAIS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da educação e cultura. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Ciência da natureza, matemática e tecnologia**. Brasília: MEC, 1998.

CORRADI, Daiana. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I,(p. 162-175), 2011.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo dicionário Aurélio da língua português. Coordenação Marina Baird Ferreira, Margarida dos Anjos. - 4.ed. – Curitiba: Ed. Positivo; 2009.

FIORENTINI, D. **Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática**. *Cuadernos de Investigacion y Formacion en Educacion Matemática*, v. 7, p. 63-78, 2012.

FROTA, M. C. R. **Práticas investigativas e experiência matemática. Artigo. PUCMinas**. 2005.

JULIANI, Monica. **Minha primeira experiência em aula investigativa de matemática**, FE-UNICAMP, 2007.

LEITE, J. M. **Materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem de geometria espacial**. Londrina: UTFPR, 2007.

MARTINS, E. B. ANDRADE, S. Ensino e aprendizagem de geometria espacial: uma aplicação de metodologia de resolução de problemas. Artigo. 2011.

MINCHILO, M. **Um artefato para a construção de sólidos geométricos com o isopor e aplicações**. Tese (Mestrado). Lavras. UFLA. 2013.

Ponte, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2, (p. 93-169). (2003).

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROGENSKI, M. L. C. PEDROSO, S. M. D. **O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades**. Artigo. 2007.

SERRAZINA, Lurdes *et. al***. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores.** Artigo. 2002.

VALE, I. **Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz**. In: Associação de Professores de Matemática (APM), Actas do ProfMat, (pp. 111-120), Lisboa: APM, 1999.

Apêndice 1 – Lista da atividade

Caros alunos, para resolução deste trabalho vocês poderão utilizar apenas:

- O Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- A medida da área do triângulo qualquer é igual à metade do produto entre a base e a altura relativa a esta base.
- A medida da área de um paralelogramo é dada pelo produto entre a base e a altura relativa a esta base.

Usando uma régua de 30 cm, meça apenas a aresta pintada de azul, na estrutura formada por palitos e isopor, que representam sólidos geométricos, para determinar as medidas indicadas.

Prisma Reto de Base Retangular (Paralelepípedo)

a) Determine as medidas das diagonais das faces?
b) Determine a medida da diagonal do paralelepípedo?
c) Determine a medida da área total do paralelepípedo?

Prisma Reto de Base Triangular

a) Determine a medida da altura de um dos triângulos da base?
b) Determine a medida da área lateral do prisma?
c) Determine medida da área da base do prisma?
d) Determine a medida da área total do prisma?

Cubo (Hexaedro)

a) Determine a medida da diagonal das faces?
b) Determine a medida da diagonal do cubo?
c) Determine a área total do cubo?
d) Qual é o ângulo entre a diagonal do cubo e a uma das faces?

Pirâmide de base triangular (Tetraedro)

a) Determine a medida do apótema lateral?
b) Determine a medida da altura da pirâmide?
c) Qual é o ângulo formado entre a aresta lateral e a base da pirâmide?
d) Determine a área total do tetraedro?

Pirâmide de base hexagonal

a) Determine a medida do apótema lateral?
b) Determine a medida do apótema da base?
c) Determine a altura da pirâmide?

d) Determine a área da base?
e) Determine a área lateral da pirâmide?
f) Determine a área total da pirâmide?
g) Qual é o ângulo que fica entre uma aresta lateral e a base da pirâmide?

Apêndice 2 – Questionário

Questionário

Você acredita que o material utilizado pode melhorar a compreensão dos entes geométricos?

a) Sim, muito. B) Sim, um pouco. c) Não.

As atividades facilitaram a observação das propriedades geométricas de cada sólido?

a) Sim, muito. B) Sim, um pouco. c) Não.

Qual foi a maior dificuldade encontrada na resolução dos exercícios?

....
....
....