INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A CONTRIBUIÇÃO DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA NA FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

DORIVAL RODRIGUES DA ROCHA JUNIOR

Volta Redonda
2016

A CONTRIBUIÇÃO DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA NA FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

DORIVAL RODRIGUES DA ROCHA JUNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente de Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciada em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Orientador: Magno Luiz Ferreira

Volta Redonda
Janeiro/2016

A CONTRIBUIÇÃO DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA NA FORMAÇÃO MATEMÁMATICA DO PROFESSOR A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

DORIVAL RODRIGUES DA ROCHA JUNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente de Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciada em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Aprovado em 03 de Fevereiro de 2016

____

Prof. e Msc. Magno Luiz Ferreira – orientador, IFRJ

____

Prof. e Dr. Tiago Soares dos Reis, IFRJ

Roberta Fonseca dos Prazeres.
____

Prof. e Msc. Roberta Fonseca dos Prazeres, IFRJ

____

Prof. Giovana da Silva Cardoso, IFRJ

Volta Redonda
2016

R 672c

ROCHA Junior, Dorival Rodrigues.

A contribuição da História da Álgebra na formação Matemática do professor a partir dos registros de representação semiótica./ Dorival Rodrigues da Rocha Junior. – Volta Redonda, 2016.

69fls.

Orientador: Prof. Msc: Magno Luiz Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ),Volta Redonda, 2016.

1. História da Álgebra. 2. Representações Semióticas. 3. Aprendizagem Versátil. I. Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), *campus* Volta Redonda. Licenciatura em Matemática. II. Ferreira, Magno Luiz III. Título

CDU: 512:37

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à professora Beatriz D'Ambrósio. A oportunidade oferecida de trabalhar com ela durante o intercâmbio foi um dos momentos de maior crescimento acadêmico para mim. Sempre muito cuidadosa e carinhosa, guiou-me num estudo que escolhi, proporcionando grande enriquecimento.

As conversas no carro a caminho das aulas, de temas sempre variados, indo de educação matemática e modelos de ensino à aspirações para o futuro e o dia-a-dia, eram momentos sempre muito agradáveis.

Foi nesse tempo que nasceu o tema desse trabalho. Um dia comentei sobre minhas observações e ela sempre muito atenta me incentivou, dizendo que daria um bom trabalho. Espero ter alcançado suas aspirações com esse trabalho.

Só tenho agradecer a oportunidade de tê-la conhecido, um pessoa incrível. Grande mãe, amiga e professora. Espero um dia inspirar pessoas como ela fez e faz.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o professor orientador Magno Luiz Ferreira pela companheirismo, e aprendizado durante a produção deste trabalho.

Aos meus pais e irmão, pelo carinho e suporte durante o minha graduação.

Aos meus amigos, por todos momentos bons vividos juntos durante esse período de nossa vidas, e suporte nos momentos difíceis.

Aos professores do curso de matemática do IFRJ, por conhecimento repassado e motivação para continuar meus estudos.

RESUMO

ROCHA, Dorival R. Jr.. A Contribuição da História da Álgebra na Formação Matemática do Professor a partir dos Registros de Representação Semiótica. Volta Redonda, 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *câmpus* Volta Redonda, 2016.

Este trabalho tem por objetivo apresentar as contribuições do conhecimento da história da álgebra para a constituição do saber algébrico do professor. Acreditamos que uma das formas de saber álgebra é conhecer a história do pensamento algébrico. Para isso, foi feito um levantamento bibliográfico sobre problemas históricos relacionados à álgebra. Buscamos identificar os diferentes registros de representação semiótica que esses problemas apresentam ou exigem. Para isso, usamos a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval(1993). Além disso, foi usada a teoria de Aprendizado Versátil de Tall(1994) para ilustrar o pensamento mobilizado em cada resolução. A partir da verificação da existência de uma variedade de registros, foi possível associar o conhecimento histórico da álgebra a sua aprendizagem. Por fim, procuramos observar como os professores lidam com os diferentes registros identificados na história. Desta forma, acreditamos que o conhecimento destes registros podem contribuir nas intervenções dos professores em sala de aula.

Palavras-Chave: História da Álgebra, Representações Semióticas, Aprendizagem Versátil.

ABSTRACT

Rocha, Dorival R. Jr.. The Contribution of History of Algebra in Teacher's Mathematical Education. Volta Redonda, 2016. Graduation Thesis (Mathematics Education) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda, 2016.

This paper aims to present the contributions of knowing history of algebra to the constitution of knowledge algebra teacher. We believe that one way to learn algebra is to know the history of algebraic thinking. It was made a literature research about historical problems related to algebra. We sought to identify the different registers of semiotic representation that these problems have or require. Also, we use Duval's (1993) Semiotics Representation Registers theory. Furthermore it was used Tall(1994) Versatile Learning Theory to illustrate the thought used in a given resolution. From the variety of records found, it was possible to associate the historical knowledge of algebra and the learning process. Finally, we sought to observe how teachers deal with the different representations identified in history. Thus, we believe that knowing these representations can help teachers' interventions in the classroom.

Key words: History of Algebra, Semiotics Representations, Versatile Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Acreditamos que o acesso a história da matemática, em particular da álgebra[1], vai além de uma abordagem direta, ou seja, vai além do uso direto da história como um recurso didático. Ela muda como o professor entende o processo de aprendizagem, mudando sua prática.

Ao longo do tempo em que participei do programa ciência sem fronteiras[2], foi possível perceber que alguns professores, do programa de mestrado que observei durante o estágio, tinham um pensamento muito linear nas resoluções de problemas algébricos. Tratavam-se de problemas de generalização e interpretações de gráficos. Os problemas davam, em essência, um alcance grande de maneiras para se chegar a uma resposta, porém eles estavam muito apegados ao tradicional.

Esta experiência, juntamente com as aulas de história da matemática cursado no programa, inspira a principal ideia que norteia este trabalho. Entendemos que o conhecimento sobre a história da álgebra melhora o entendimento relativo aos problemas. Isso pode levar o professor a ter reflexões melhores sobre o assunto e, consequentemente, a aulas melhores. Em outras palavras, conhecer a história da álgebra, e como se deu a construção desse campo do conhecimento é um ponto crucial para a elaboração de boas aulas.

Conhecer a história da álgebra ajuda a firmar conceitos, de modo que ele apresenta outras perspectivas. A maioria das vezes o que vemos são modelos prontos, "sem falhas" e nos resta apenas aceitá-los. O estudo da história nos mostra que não foi assim que o conhecimento tomou forma. É importante destacar que o conhecimento matemático sempre foi construído por erros e

[1] Iremos tratar como álgebra os objetos que foram surgindo ao longo da história que vieram a compor esse campo de conhecimento posteriormente, e consequentemente as representações e conceitos por trás dos mesmos.

[2] Ciência sem Fronteiras é um programa que busca promover a consolidação, expansão e internacionalização da ciência e tecnologia, da inovação e da competitividade brasileira por meio do intercâmbio e da mobilidade internacional.

acertos. Desta forma, entendemos que o conhecimento histórico desta ciência, pode contribuir profundamente para a formação inicial e continuada do professor, no sentido de que o mesmo possa aceitar ideias novas com facilidade.

A pergunta que norteou a pesquisa foi: Como o conhecimento sobre a história da álgebra pode interferir na qualidade das intervenções do professor? Tentamos respondê-la apresentando relações entre o conhecimento da História da Álgebra e o saber algébrico. Para isso, vamos verificar como se encontra o panorama do ensino de álgebra e como o professor lida com representações e situações algébricas. Vamos relacionar a Teoria de Registros de Representação Semiótica com a Teoria de Visualização e Simbolização e, por fim, iremos apresentar como conceitos algébricos estão ligados a uma variedade de representações semióticas.

Na nossa pesquisa bibliográfica conseguimos identificar que os registros históricos apresentam uma grande variedade de representações para problemas vistos até hoje. Enriquecendo o arsenal de um professor que pode se encontrar de frente com uma ideia não tradicional proposta pelos próprios alunos. E ainda, esse professor estaria munido para apresentar para seus alunos diferentes pontos de vista de problemas algébricos.

Além disso, foi possível perceber que a construção do conhecimento não se dá de forma linear, e é movida de forma lenta pela necessidade humana. Observamos que conforme os problemas foram adquirindo um caráter mais complexo, a representação utilizada, no começo basicamente linguagem corrente, não satisfazia mais a necessidades de quem fazia matemática na época. E não concomitantemente, foi realizado um movimento de maior formalismo na matemática, tudo de forma bem desconexa, porém que culminaram no que vemos hoje. Os problemas algébricos trabalhados na educação básica ainda apresentam uma relação com os problemas da antiguidade. Desta forma é possível trilhar um caminho de resolução baseado nos processos elaborados nas épocas de soluções dos problemas originais (posso criar soluções específicas com estratégias antigas).

Usamos a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2010) que afirma que para aprender matemática o indivíduo deve ser capaz de mobilizar no mínimo duas representações distintas. Conseguir fazer conversões entre esses registros e usar os tratamentos internos de forma eficaz são habilidades de alguém que domina tal conteúdo matemático. O estudo da História da Álgebra proporciona esse contato com diferentes representações. Isso pode ser levado para sala de aula de modo que a ideia de um aluno, mesmo que incompleta ou errada ajuda na construção do conhecimento, esse professor teria mais ferramentas para aproveitar uma ideia, valorizando o conhecimento desse aluno e também construindo um entendimento mais significativo.

Nos embasamos ainda na Teoria de Visualização e Simbolização apresentada por Tall(1994). Nela, ela apresenta o fluxo entre os tipos de conhecimentos, Enativo, Icônico e Simbólico. Ele diz que visualização tem um papel importante na aquisição de conhecimento, e conforme se vai apurando esse conhecimento tendemos ao simbolismo. Tall(1994) apresenta a ideia de pro-ceito onde o que era primitivamente um processo toma papel de conceito, firmando sua teoria de que o pensamento simbólico apesar de ser mais independente dos outros, ainda se comunicam entre si. Diferentes representações apresentam diferentes formas de conhecimento que tem vantagens e dificuldades ocultas, Tall(1994). Um pensamento lógico sofisticado pode apresentar um formato visual mais simples.

Tentamos traçar um perfil de como anda o ensino de álgebra no Brasil. Santos (2010) diz que o ensino de álgebra ainda é guiado pelo livro didático. Esses livros ainda apresentam o conteúdo de forma simplificada, sem discussões aprofundadas, e não dão suporte para a prática docente. Muitos docentes ainda tratam a álgebra como um questão de memorização, e como generalização da aritmética. Essa metodologia não dá espaço para o pensamento lógico, e ideias que possam surgir por parte dos alunos. De certa forma, processos alternativos não são vistos com legitimidade por esse professor. Deveríamos, então, reconhecer o impacto da História da Matemática na formação de professores. Como a história da matemática interfere na formação docente, e na forma como eles veem os conteúdos que terão que ensinar posteriormente.

As diretrizes da licenciatura em Matemática (2002) contam com uma seção que diz que o curso deve apresentar em sua grade comum curso de Filosofia e História da Ciência e da Matemática, mas como isso está sendo executado nas Instituições de ensino superior? Observa-se que esses cursos e visto deslocado, no meio dos outros curso da graduação. A visão histórica deveria ser mais encorajada durante todos os cursos, criando essa prática no estudante de recorrer aos estudos dos antigos pensadores matemáticos, para que se crie essa conexão com a matemática que nós vemos e devemos ensinar, futuramente.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

> Podem existir professores que agem em sala de aula como se concebessem a matemática como algo estático, ou ainda, só conseguem observar os problemas fora de seus contextos. Por causa deste comportamento e desta atitude podem acabar por destruir a criatividade de alguns alunos que muitas vezes apresentam respostas, muito criativas, com o intuito de resolver problemas e não apenas com a intenção de fazer um exercício. (FERREIRA,2009, p. 13)

A álgebra tem papel de destaque, no currículo brasileiro. Porém é um dos pontos principais de dificuldades na escola. Santos (2010) diz que os alunos não conseguem assimilar os símbolos e um novo modo representação matemática desde o primeiro momento em que têm contato com ela. Essa dificuldade atrapalha o aprendizado da álgebra, que vai além dos símbolos. Além disso, essa dificuldade de entender a linguagem algébrica se apresenta no livro didático que é usado pelo professor. Esse material não fornece suporte pedagógico para o docente, que acaba por transmitir esse conceito fechado e algoritmizado para seus alunos. A capacidade de manipular e entender os entes matemáticos acaba ficando de lado na sala de aula.

Não é dado tempo suficiente para que o aluno amadureça matematicamente. De repente ele se vê com essa nova linguagem onde o que ele antes entendia como ação é tratada como objeto, ou representa uma relação. Por exemplo, o ato de adicionar, e o conceito de soma, ou então o sinal de igualdade (FERREIRA, 2009). E por outro lado, o professor se encontra despreparado para lidar com essas dificuldades, sem ferramenta para entender esses saltos (nesse caso da aritmética para a linguagem algébrica), tendo dificuldade para justificar, o que o faz optar por uma aula tradicional expositiva, onde a álgebra será apresentada por uma perspectiva mecânica.

Santos (2010) percebe ainda, que os professores carregam um déficit na compreensão do conhecimento algébrico desde sua formação inicial, que é carregada na graduação também. E isso influencia na ações na sala de aula. Essa insegurança acaba por empurrar mais ainda o professor a se sustentar no livro didático, que por sua vez não proporciona um aprendizado significativo. A concepção de álgebra do professor dificulta a aprendizagem que deveria passar por um processo de reflexão mais crítico.

Katz (2007) afirma que a álgebra não surgiu da necessidade abstrata de generalizar a aritmética. Vemos essa tendência no ambiente escolar, esquecemos que a álgebra veio surgindo da solução de problemas específicos. Como podemos cobrar um nível de abstração dos alunos, quando eles não atingiram maturidade em conceitos prévios? A forma compactada e apressada com que álgebra é vista nas séries iniciais reduz oportunidade dos alunos da prática da abstração por eles mesmos. Uma introdução através de solução de problemas pode melhorar esse cenário, como vemos historicamente. Além disso, professores se atentam muito tempo em conceitos formais quando os alunos ainda não se mostram preparados, esse tempo poderia ser usado para familiarizá-los com mais experiências, fazendo com que eles construíssem esse conceito mais abstrato.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) defendem a ideia do uso da História no ensino de Matemática como proposta metodológica, com o uso de problemas históricos devidamente relacionais com os conceitos matemáticos. Mas, além disso, o entendimento sobre História da Matemática dá ao professor ferramentas para diagnosticar possíveis barreiras na aprendizagem, podendo assim tomar decisões mais efetivas. Além de abrir os olhos desse docente sobre caminhos e metodologias diferentes das usuais. O entendimento sobre a história e desenvolvimento da álgebra, deve ser visto pelo educador não como uma abordagem direta na sala de aula, mas um artifício para entender e identificar déficits na assimilação desse conteúdo, fornecendo expertise para esse profissional identificá-los e prover caminhos para uma abordagem mais efetiva com os alunos.

Katz (2007) vai além dos três estágios do desenvolvimento algébrica difundido atualmente, que são: retórico, sincopado e simbólico. Ele lista o que chama de estágios conceituais. O estágio Geométrico, onde a álgebra é basicamente desenvolvida em cima de ideias geométricas; o estágio de solução de problemas estático, onde se quer achar soluções para problemas específicos;

o estágio função dinâmica, onde se tem uma ideia de movimento ligado a conceitos algébricos, esse estágio é claramente exemplificado pelo surgimento da Geometria Analítica; e por fim o estágio abstrato. O reconhecimento desses estágios pode auxiliar o professor em como ser mais eficaz, tomando o pressuposto que o desenvolvimento histórico norteia, de certa forma, o desenvolvimento dos alunos.

> Ou seja, até que ponto os professores foram respeitados em seus direitos de aprender álgebra construindo significados que possam ser utilizados apropriadamente em diferentes momentos de seus estudos de matemática e posteriormente em seus procedimentos de ensino e de avaliação? (SANTOS, 2010, p. 9)

Não que haja um método correto de se ensinar álgebra. Mas, uma boa base é fundamental para o sucesso posterior dos alunos, o pensamento algébrico é uma competência de utilidade no cotidiano. A aprendizagem matemática se dá de forma otimizada quando se é explicitado desenvolvimento histórico (BEKKEN apud SANTOS, 2010). Um olhar mais atento à historia de como a álgebra se formou pode munir o docente de artifícios à atingir mais e de forma mais eficiente seus alunos. Nesse sentido, a teoria da representações semióticas se mostra de grande valia para uma análise da contribuição da história para o ensino de álgebra.

2.1. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E TEORIA DA VISUALIZAÇÃO

De acordo com Duval (1993), os objetos de estudo da matemática são entes abstratos. Em outras palavras, não se pode identificá-los pelos nossos sentidos. Portanto, se faz necessário o uso de diferentes tipos de registros para representá-los. É importante destacar que cada tipo de registro utilizado para representar objetos matemáticos exige um tipo diferente de manipulação. Estas diferenças podem influenciar diretamente na escolha do tipo de representação, por parte do estudante, por exemplo, um aluno aprendendo as operações básicas, ele opta por uma representação de números feita por agrupamento de objetos ao invés de usar algarismos hindu-arábicos, apesar de conhecê-los, por facilitar o ato de adição. Ele conhecer ambas representações deu a esse aluno uma vantagem processual. Um erro frequente é pensar nessas representações somente como a única forma de se expressar, ou seja, comunicá-las com o mundo exterior, enquanto essas representações estão diretamente ligadas com a atividade cognitiva. Portanto, deve ser possibilitado ao aluno o contato de várias representações pelo professor. Conhecer várias representações evita um problema muito comum que é confundir o objeto matemático em estudo, com seu registro. O registro não é o objeto, e a exposição a vários registros pode ajudar a esclarecer isso.

Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica e um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 1993). A matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas. Podemos notar quatro tipos distintos de representação apresentados na tabela a seguir:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associação verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTRO MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binárias, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). • Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Tabela 1: Diferenciando os tipos de Registro. (DUVAL, 2010, p. 14).

Havendo vontade de ensinar matemática, como se o entendimento sobre o objeto estivesse desprendido do entendimento e domínio de sua representação tem-se o paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades que resultam para sua aprendizagem (DUVAL,1993). “É o objeto representado que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis” (DELEDIEQ & LASSAVEL apud DUVAL, 1993, p.3). As dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade das variações entre os registros de representação. Reconhecer várias representações de um mesmo objeto está diretamente ligado à percepção do objeto. Ele não depende de uma forma de representação, portanto, quanto mais representações conhecidas melhor o entendimento sobre o objeto. A representação funciona como uma forma de acesso ao objeto. Dessa troca de registros e mobilização de ao menos dois registros no fazer matemática que surge a originalidade de pensamento. É importante lidar com ambos, representação e objeto, durante as aulas de forma clara para que os alunos consigam desenvolver uma maturidade cognitiva. A compreensão da dualidade objeto representação permite ao alunos caminhar, no futuro, com maior facilidades entre as representações semióticas.

Segundo Duval (1993), uma representação semiótica está ligada a identificação de um modelo como uma representação, onde se faz necessário símbolos e regras, que vão definir tal representação, formalizando-a. Duval (1993) define essas regras internas ao registro como tratamento, que é a manipulação dentro de um conjunto de códigos, sendo uma ação interna. O ato de parafrasear, por exemplo, é um tratamento dentro da língua corrente. E por fim, a conversão é uma interpretação de uma representação segundo outra representação semiótica, conservando em totalidade ou não o conteúdo dado na representação inicial.

Exemplo de uso das conversões para compreensão de operações algébricas:

Qual o resultado do produto: (3x+5)(2x+1)?

Resposta esperada: $6x^2 + 3x + 10x + 5 = 6x^2 + 13x + 5$. É comum que o professor espere que o aluno lide com o produto de dois binômios seguindo as regras. No entanto, para muitos alunos este é um procedimento sem significado. No caso específico deste exemplo, podemos interpretá-lo através de uma operação aritmética, como:

$35 \times 21 = (30 + 5)(20+1) = (3\times10 + 5)(2\times10+1) = 6\times10^2 + 13\times10 + 5$

Como os alunos realizam essa operação:

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 5 \\ \times & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 5 \\ 6 & 10 & \\ \hline 6 & 13 & 5 \end{array} \rightarrow 6\ centenas + 13\ dezenas + 5\ unidades = 735$$

Observe que o caso algébrico é uma interpretação do caso aritmético. Acreditamos que este fato, se bem explicado pelo professor, é capaz de explicar a propriedade distributiva do produto de dois binômios. Se olharmos bem para a operação aritmética podemos ver que:

1 – quando multiplicamos as unidades 5 e 1, estamos multiplicando as segundas parcelas dos binômios.

2 – quando multiplicamos a unidade 1 e a dezena 3, estamos multiplicando a segunda parcela do segundo binômio e a primeira do primeiro binômio.

3 – quando multiplicamos a unidade 5 e a dezena 2, estamos multiplicando a segunda parcela do primeiro binômio e a primeira do segundo binômio.

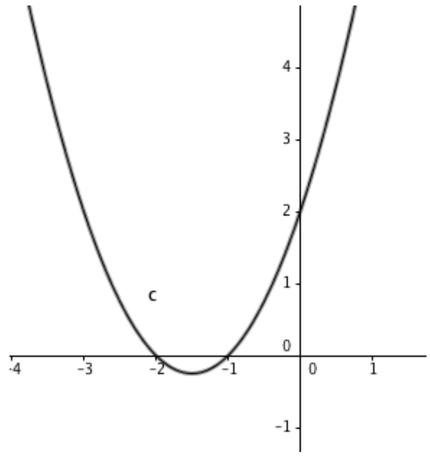
4 – quando multiplicamos as dezenas 3 e 2, estamos multiplicando as duas primeiras parcelas dos binômios.

Desta forma, entendemos que a compreensão da relação existente entre estes dois tipos de registros pode facilitar a aprendizagem.

A conversão requer que se perceba a diferença entre o que os códigos de uma representação inferem, por exemplo, na linguagem algébrica e corrente usamos o alfabeto como conjunto de símbolos, porém esse mesmo sistema de códigos tem sentido distintos em cada representação. Cada tipo de representação tem uma característica única, ou então não se faria necessária, dando a ela uma finalidade, portanto, deve-se conseguir identificar e reconhecer essa finalidade para um melhor aproveitamento de certa representação. Por exemplo, a representação fracionária ou decimal de um número, a falta de discernimento entre essas duas representações, e claro, conseguir operá-las, explica a dificuldade em calcular de alunos do Ensino Médio. Conversão não é o ato de transcrever, implicando num entendimento do objeto representado para então haver a interpretação numa segunda representação. Por exemplo, quando se transcreve uma equação no plano Cartesiano. Quando você faz essa escolha você está querendo evidenciar características que não são tão facilmente percebidas na representação em linguagem algébrica.

A equação: $x^2 + 3x + 2 = y$

Sob uma análise superficial sabemos que é uma parábola com concavidade voltada para cima. Corta o eixo y em 2.



Podemos observar que tem raízes em -2 e -1. Decrescente antes de -2 e crescente depois de -1, cortando o eixo y em 2. Pela simetria vai ter vértice em $x = -1{,}5$.

Quando um aluno vê uma equação do segundo grau, normalmente, já passa de forma mecânica para as fórmulas que lhe foram ensinadas. Essas fórmulas não têm significado para ele. O aluno não consegue nem associar a figura geométrica que ali está descrita. A análise das partes do gráfico de uma parábola pode ser mais significativa, além de conter o apelo visual.

Conseguir converter um objeto de forma a propiciar um melhor aproveitamento de representação demonstra domínio e entendimento sobre o conteúdo. O ato da conversão não está, então, ligado ao código empregado pela representação, portanto, não há regras de substituição que possam ser empregadas. Por exemplo, quando convertendo uma sentença de uma língua a outra, a sentença final não terá sentido se for traduzida pela substituição direta de cada palavra individualmente, ou entre a representação algébrica de uma relação e a representação gráfica, exigindo um conhecimento aprofundando de ambas representações.

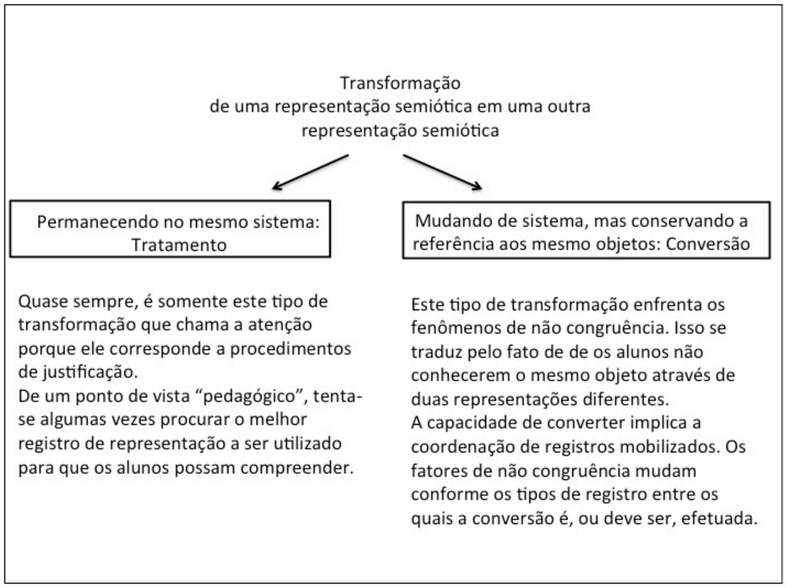


Figura 1: Conversão x Tratamento. (DUVAL, 2010 p. 15).

"O progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos, surgindo segundo necessidade histórica, que mais ou menos coexistem com o primeiro entre eles, o sistema da língua natural" (GRANGER, 1979 apud. DUVAL,1993). O pensamento humano é caracterizado pela existência de vários modelos de representação, nos destacando perante animais e inteligências artificiais, que apresentam limitações quanto a articulação de mais de uma representação, e não na ausência de uma ou outra, como tendemos a pensar. A existência de várias representações semióticas pode estar ligada à facilidade de tratamento, a escolha apropriada pode agilizar a resolução do problema, e proporcionar um caminho mais claro à solução. Por outro lado, uma representação pode complementar a outra, destacando características que antes (em uma representação anterior) permanecia oculta. Quanto a compreensão de um conteúdo, ou o registro escolhido é capaz de sanar qualquer dúvida, cobrindo o conceito de forma ampla, ou a coordenação de mais de um registro leva ao entendimento completo de certo conteúdo. Essa primeira hipótese sobre a necessidade de vários conceitos mostra que o agente deve conhecer com propriedade vários registros de tal forma que a escolha seja acertada. Já o segunda hipótese mostra que a conversão entre registro está ligada ao tratamento em cada particular registro.

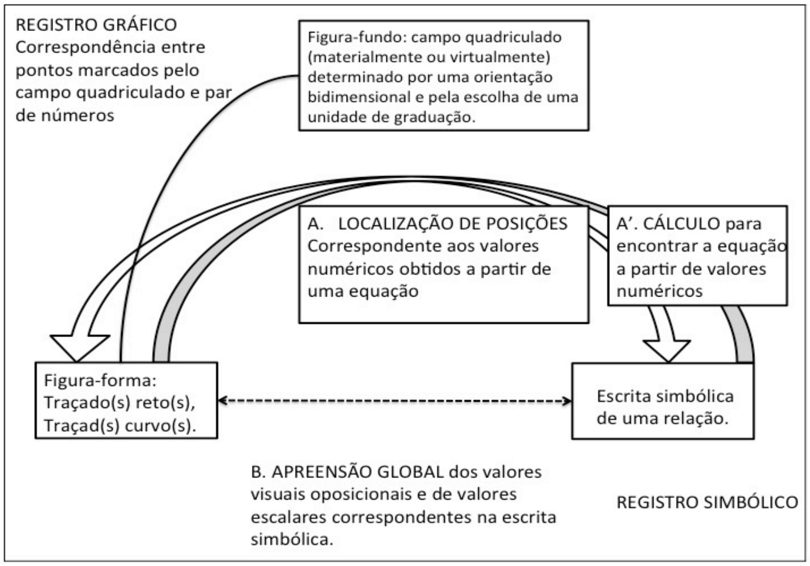


Figura 2: Conversão entre Representações, e suas vantagens. (DUVAL, 2010, p. 10).

A conversão não é um procedimento natural, podemos associá-la a um surgimento histórico de um novo registro como um obstáculo epistemológico[3], e seu entendimento, na maioria das vezes, não tem como ser ensinado. Muitos alunos, observando duas representações, não identificam como o mesmo objeto, pois estão habituados a usar apenas um, e se usam mais de um, nunca é numa mesma situação. Nesse caso, eles dominam os tratamentos mas não conseguem fazer a conversão. Limitando a utilidade e o controle do conhecimento. A conversão de uma equação para uma gráfico, por exemplo, não pode ser entendida com um tratamento. Essa conversão requer do aluno um entendimento que vai além da transcrição, de um conjunto simbólico para outro. É necessária a manipulação das variáveis que são específicas de cada representação semiótica. Um fenômeno característico da atividade de conversão é que, em alguns casos, podemos observar no registro de chegada características e a pré-existência do registro de saída, dizendo que houve congruência, ou podendo ocorrer a não congruência, que é a não percepção de

[3] Rodrigues, H., 2012, diz que *obstáculos epistemológicos* são uma espécie de *contra pensamento* que pode surgir no momento da constituição do conhecimento ou numa fase posterior. São uma forma de resistência do próprio pensamento ao pensamento.

qual, e se houve um, registro prévio àquele visto.

Um problema pode ser considerado mais complexo que outro, então, dada a congruência dos registros empenhados na sua resolução. Um ponto importante quando se observa conversão é o sentido que a mesma se dá. É um erro considerar a inversão de uma conversão algo natural. Muitas das vezes no processo de ensino só é apresentado um caminho, admitindo trivial a volta, o que na maioria das vezes não acontece.

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unicidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abcissa y>x	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abcissa positiva x > 0	Não “Maior que zero” é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cujas abcissas e cuja ordenada têm o mesmo sinal x.y>0 O produto da abcissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Tabela 2: Conversão: Comparando dois registros e seus elementos (Duval, 2010, p. 19).

Registros de Representação Semiótica, portanto, diz como os símbolos e sistemas lógicos se ligam ao processo de aprendizagem. Esses símbolos representam entes matemáticos, o uso de mais de uma representação desse ente, mostra domínio sobre sua definição, implicando no aprendizado. Esses símbolos, podem ter representação escrita ou falada, usando um apelo linguístico ou visual. Apresentando, portanto, diferentes modos de representação mental (TALL, 1994).

Tall (1994) propõe a Aprendizagem Versátil, onde ele combina o apelo visual às representações simbólicas. Ele ressalta que símbolos algébricos são usados de duas distintas formas. Ora eles aparecem como processo, ora como objeto. O mesmo é observado com a aritmética. Como crianças percebem os números, por exemplo, como resultado de contagem, processo, ou como número, entidade. A essa dualidade de existência, o autor dá o nome de “pro-ceito”, o que significa que uma representação simbólica pode ser entendida como processo ou conceito. Por exemplo, quando somamos, 5 + 3 é igual a 8, ou 5 + 3 é (=) 8. As duas proposições são equivalentes, mas não iguais. A primeira ressalta a ação feita, o ato de somar, enquanto na segunda a soma é tida como uma entidade. Os sentidos usados para perceber uma ação dá aos símbolos existência cognitiva, tornando-o um objeto matemático.

A noção de pro-ceito nos permite observar como os indivíduos conseguem navegar entre a interpretação de símbolos como processo e objeto, dando a eles uma vantagem. São identificados três tipos de “pro-ceitos”: a) pro-ceito operacional; b) pro-ceito modelo; c) pro-ceito estrutural. Conforme amadurecem seu pensamento, as pessoas tendem a incorporar uma visão de um processo a uma de conceito, dando características manipulativas sobre certos objetos. E continua alternando entre as duas depois disso, conforme suas necessidades.

O conceito de “pro-ceito” está baseado em Bruner apud. Tall (1994), que diz que há três modos de transcrever uma experiência. Desenvolvimento de representações se dá de forma enativa, ou por ações, icônica, por representações gráficas, para então se dar de forma simbólica.

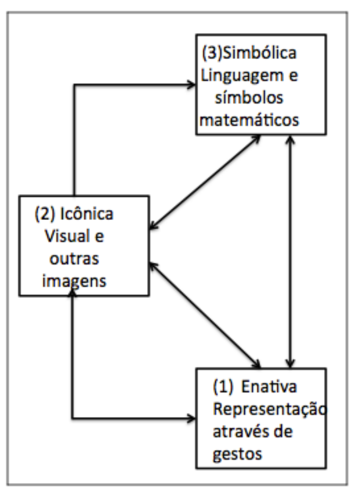


Figura 3: Três modos de representação de Bruner. (TALL, 1994, p. 1)

É importante notar que os símbolos quando colocados no papel ganham, também, uma qualidade visual, permitindo uma abordagem icônica. O símbolo escrito se mostra mais versátil que o falado, de modo que sua manipulação fica mais evidente. Podemos observar então semi-estágios na teoria de Bruner apud Tall (1994). Quando você começa a descrever ações, por exemplo, mesmo que em língua corrente, esse comportamento traz características que sistemas enativos não apresentavam antes. Tall (1994) diz que o símbolo pode ser falado, ouvido, visto ou lido e é a combinação desses meios de percepção e ação sobre ele que dão ao símbolo existência como objeto matemático.

O sistema enativo senso-motor é como a humanidade interage com o mundo, identificamos um objeto pelos nossos sentidos e então agimos sobre ele. Esse sistema se apresenta de duas formas, ênfase em objetos (Geometria, por exemplo), e ênfase em ação (pro-ceito). A verificação desse sistema é dada por tentativa e experiência. O sistema icônico visual-espacial usa de representações que nos permite sentir relações e "experimentar pensamentos". Apresenta mais formalismo que o anterior, mas ainda não tem um sistema lógico. O sistema simbólico pode então ser refinado em verbal, pro-ceitual e lógico, cada um com sua característica. O sistema verbal usa linguagem do dia-a-dia para definir objetos e descrever ações sobre eles. O pro-ceitual lida com aritmética, álgebra, cálculo e outras áreas que requerem símbolos diferentes da linguagem falada. Esses símbolos, carregam uma ideia única, e tem procedimentos bem definidos quando manipulados. O sistema lógico é um conjunto de definições de conceitos que são usados para provar. Sendo a definição a base desse sistema, ela vem antes mesmo do objeto em si.

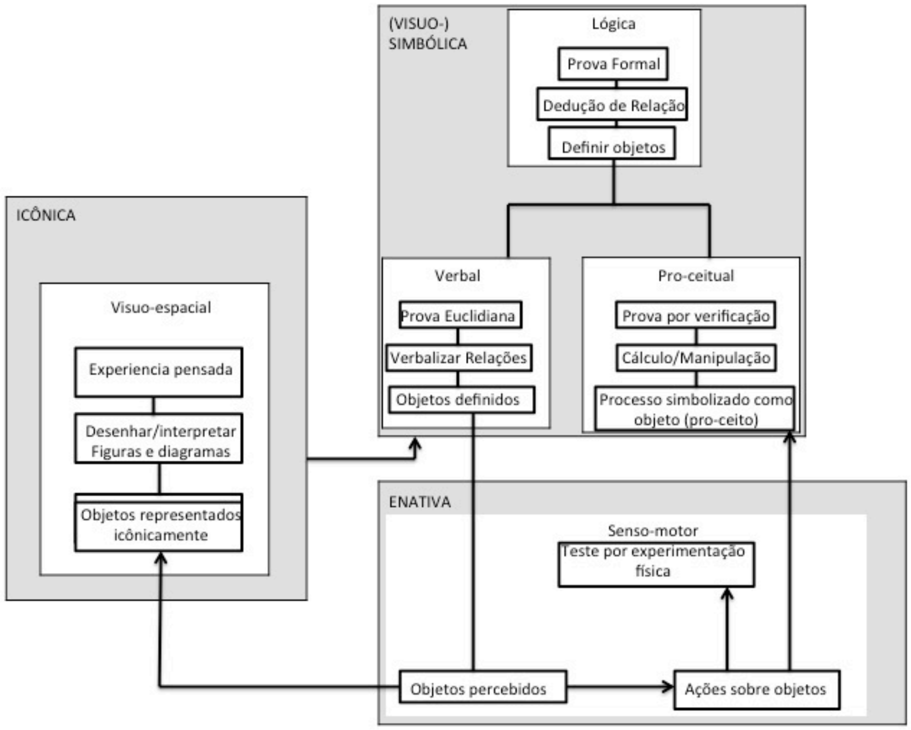


Figura 4: Objetos, ações e provas em diferentes modos representacionais. (TALL, 1994, p. 4)

Uma abordagem versátil usa o método que for melhor para cada situação. Um abordagem visual pode apoiar uma ideia ou ajudar com novas visões sobre os objetos de estudo, mas falta em formalismo matemático. Manipular símbolos, seja como modelagem de uma situação ou "fazer" matemática, de forma consciente, não somente reproduzindo algoritmos. Deve-se entender o pensamento por trás de sequências de operações algébricas. Esse método ainda requer contextualização, dando significado aos conceitos e procedimentos necessários, e ainda, se fazendo necessário uma reconstrução (o que podemos ver em Duval como mudança de registro). Esse fenômeno de conversão é um sofisticado sistema de reconstrução de uma ideia numa registro diferente, o que requer do agente alta instrução e entendimento.

"Representações diferentes usam diferentes formatos de conhecimento que tem vantagens e dificuldades ocultas"[4](Tall, 1994, p. 1). As variações de

[4] Tradução nossa.

representações que tem relevância no processo de aprendizagem são aquelas que implicam um novo objeto, apresentando características e consequentemente modos de manipulação diferenciado do inicial. Então, é importante conseguir distinguir entre uma conversão que apresenta um novo objeto, e uma que conserva as características. Podemos considerar que há aprendizagem quando está explícito o acesso ao objeto ali tratado, ou seja, o ato de converter está ligado à compreensão e clareza no objeto que está sendo tratado. Podemos concluir então, que o desenvolvimento histórico-social de sistemas semióticos leva à aquisição da habilidade de transformação, e a coordenação desses sistemas semióticos. A diversificação de registro colabora no desenvolvimento não só do pensamento matemático, mas cognitivo do indivíduo.

Duval (2010) afirma que para que haja aprendizado, deve-se ser capaz de usar mais de uma representação. Fomos identificando ao longo da história as diversas representações usadas nas soluções matemáticas feitas. Percebemos que no início as representações eram bem limitadas, e isso limitou o desenvolvimento do pensamento matemático na época. Percebemos, ainda, que conforme foram se diversificando, houve maior aceitação por parte da sociedade acadêmica da época e maior desenvolvimento do pensamento com usos mais criativos de conceitos e definições. Portanto, o conhecimento da História da Matemática dá ao licenciando um contato com grande variedade de representações semióticas e seus usos (aplicação dos tratamentos), com um adicional da contextualização, e o desenrolar do desenvolvimento do pensamento matemático na humanidade.

Tall (1994) e sua teoria do Aprendizado Versátil explicam como entrelaçamos os tipos de pensamento, classificando-os do mais primitivo, Enativo, movido pelos sentidos, passando pelo icônico, onde se usa esquemas e representações, até o simbólico, onde há abstração dos conceitos. Eles ainda mostram como passamos de um tipo ao outro, em relação aos tópicos. Um conceito pode ser entendido como processo e passar a representar um conceito, ele dá o nome disso de pro-ceito, a união das palavras processo e conceito.

2.2. HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

Nesta seção, estamos interessados em apresentar a evolução histórica das ideias, conceitos e métodos algébricos em diferentes contextos. Particularmente, estamos interessados em identificar de que forma estes aspectos produziram ou exigiram novos tipos de registros. Vale ressaltar que esta não tem a intenção de analisar contextos históricos, centraremos nossas reflexões nos problemas.

2.2.1. PRIMEIRAS MANIFESTAÇÕES ALGÉBRICAS

De acordo com Katz (2009), os povos antigos começaram a desenvolver e usar matemática para benefício do governo em áreas como arrecadação de impostos, medição, escambo, fazer calendários, e práticas religiosas. Tem-se registros de atividades matemáticas em todas as civilizações. E as ideias desenvolvidas vão além de uso prático cotidiano. A matemática antiga é basicamente algorítmica. Como veremos, isso acontece pela falta de preocupação de prova.

Um dos primeiros métodos de resolução de equação é o conhecido como falsa posição, que trata da busca pela solução de um problema por tentativa e erro. Vale destacar que este método não acontece de forma aleatória. Tomava-se um número como solução, a resposta obtida por esse número era então adaptada para que fosse a resposta desejada, e então, por proporcionalidade se ajusta o número usado, obtendo a resposta.

O problema 26 do Papiro de Rhynd (KATZ, 2009, p. 8) diz, encontre a quantidade tal que quando é adicionada à $\frac{1}{4}$ dela mesma, o resultado é 15.

- Assuma 4 (como resposta).
- Então $1\ \bar{4}$ ($\frac{1}{4}$ em notação egípcia) de 4 é 5.
- Multiplique 5 de tal forma a conseguir 15 como resposta.
- A resposta é 3.

- Multiplique 3 por 4.
- A resposta do problema é 12.

O problema acima mostra como era o pensamento matemático egípcio. A linguagem era estritamente discursiva, mas se nos atentarmos no pensamento desenvolvido por trás do método, vemos traços de problemas algébricos. Como veremos mais a frente a álgebra é inicialmente definida como balanceamento e restauração, e quando os egípcios usam proporcionalidade, mesmo que não intencionalmente, para ajeitar seus problemas, eles mantêm o balanço.

No Oriente Médio na região da Mesopotâmia se estabeleceu um povo de grande evidência para a época, por sua organização social e desenvolvimento tecnológico nas áreas de ciências, incluindo a matemática. Eles usavam matemática para tentar prever fenômenos naturais ligados à sua religião, para organizar as finanças do reino, e como ferramenta na agricultura, pastoreio e outras atividades. Para isso, eles desenvolveram um sistema de numeração de base sexagesimal, o que é um sistema de base sessenta. Eles tinham 59 símbolos distintos, quando chegavam à 60 eles voltavam para o primeiro símbolo, a diferença é que tinha uma organização posicional para distinguir.

Tem-se registro dos babilônicos sobre os números pitagóricos. É interessante como o pensamento desse povo já estava conectado à ideias algébricas. Eles não tinham a álgebra definida como um campo do conhecimento, mas seus pensamentos já seguiam os passos da Álgebra.

Eles demonstram grande habilidade para lidar com equações quadráticas, eles tinham uma fórmula primitiva para o que hoje chamamos de Bhaskara. Suas tábuas estão cheias de problemas de lados desconhecidos de um quadrado. Os babilônios tinham uma aproximação para $\sqrt{2}$ que era aproximada em base sexagesimal 1;25. E eles tinham consciência que esse número não representava o lado de um quadrado de área 2. Analisando a ideia por trás do método utilizado por eles observamos que se baseia em “completar quadrados”. O problema do tablete BM 13901, que resolve um problema do tipo $x^2 - x = 870$ diz: “Eu tiro meu lado do quadrado de dentro da área e isso era 14,30 (em base sexagesimal). Você abaixa 1, a projeção. Você parte em dois o 1. Você combina 0;30 e 0;30. Você adiciona 0;15 à 14,30. 14,30;15 ao quadrado é 29;30. Você adiciona 0;30 que combinado com 29;30 tal que o lado do quadrado é 30". (KATZ, 2009, p. 24) Geometricamente entendemos a solução como:

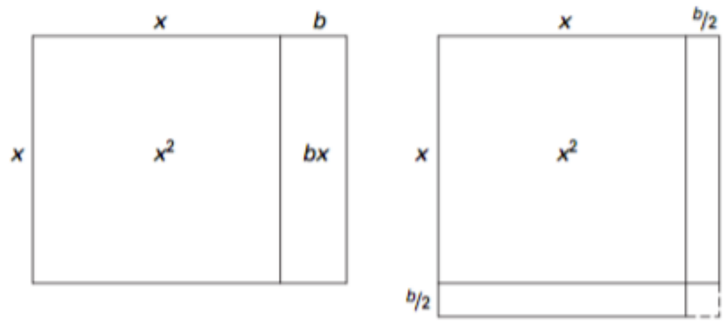


Figura 5: Versão Geométrica pra solução da fórmula quadrática $x^2 + bx = c$. (KATZ 2009, p.).

Apesar dos estudos da história da matemática verem os procedimentos babilônicos por uma ótica geométrica, isso não é mostrado nas tábuas. Alguns problemas propostos por esse povo continuam aparecendo pela história motivando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por exemplo, o problema diz: dado um quadrado de área N o qual alguém quer saber o lado, primeiro se escolheria um valor a para o lado do quadrado que fosse próximo, mas menor que o procurado. Tome b então a diferença do lado procurado e o valor a. Então, o próximo passo seria encontrar c tal que duas vezes ac,o retângulo compreendido por a e c, mais o quadrado de lado c, queremos que essa soma seja tão próxima de b quanto possível. Logo, o lado do quadrado de área N é igual ao lado do quadrado de área igual ao quadrado de a mais b.

2.2.2. ÁLGEBRA NA GRÉCIA

A política grega com seu caráter argumentativo pode ter influenciado o modelo de prova matemática como a gente o conhece. O hábito de argumentar e debater que norteava os pensadores da época. O conceito de generalização, que começa a aparecer com os Pitagóricos que acreditavam que o universo podia ser lido por números, o que queria dizer que tudo podia ser medido e contado por números naturais. Uma crise se abateu na escola pitagórica quando não conseguiram encontrar uma relação entre o lado do quadrado de medida 1, e sua diagonal. Pela sua crença eles deveriam conseguir encontrar uma unidade de medida comum para ambos segmentos.

Vale notar que os babilônicos já tinham contato com números irracionais e lidavam com isso tranquilamente, o caso do raiz de 2, por exemplo. Essa aceitação pode ter acontecido pelo fato dos babilônicos não terem o rigor grego. Eles estavam preocupados em resolver problemas. Logo, seu foco era uma resposta que revesse o problema, não apresentavam um código de conduta que é visto na Grécia e sua Geometria de régua e compasso. (KATZ, 2009)

Um século depois dos Pitagóricos, Aristóteles diferenciou número de magnitude, o que pode ser entendido numa linguagem moderna como discreto e contínuo. Ele provou por que a diagonal e o lado do quadrado era incomensurável. Nesse momento, eles começaram a estruturar uma argumentação lógica que é o começo da lógica matemática.

Euclides em sua coleção de livros, *Os Elementos*, usa álgebra geométrica, que é a representação de conceitos algébricos a partir de figuras geométricas. Nele, Euclides demonstrou vários conceitos que usamos ainda hoje, tudo por argumentos geométricos. Um problema proposto por Euclides é como cortar um segmento de reta de tal forma que o retângulo contido por uma dessas partes e o segmento todo seja igual ao quadrado da outra parte do segmento. Que pode ser entendido hoje em dia pela equação $x^2 + ax = a^2$. (KATZ, 2009)

O uso massivo de geometria e sua dominância na matemática grega não significa que eles não lidavam com álgebra e ideias algébricas, no entanto, eles a viam de uma maneira diferenciada. Hipócrates trouxe para o mundo grego os problemas da quadratura do círculo (visto no Egito) e de se dobrar um cubo.

Os estudiosos gregos que vieram depois de Euclides tinham grande preocupação em fazer suas provas claras para o leitor, explicando seus procedimentos.

Ramos (2013) mostra como o estudo de cônicas se deu com Mecmeno, isso de forma geométrica ainda. Sua motivação foi para a solução dos problemas de duplicação do cubo. Ele conseguiu deduzir propriedades dessas figuras com apenas as ferramentas da geometria elementar. Só o estudo desses tópicos era um passo além à Geometria grega, já que lidava não com as figuras no plano, mas sim tridimensional, e já que a construção não era satisfeita com apenas régua e compasso. Mecmeno pôs em linguagem natural propriedades analisadas segundo uma perspectiva geométrica que hoje vemos como as equações. Sob o olhar de Duval(1993) podemos entender que Mecmeno estava fazendo uma conversão da geometria à linguagem corrente da época, e ainda, quando essa transcrição não foi mais suficiente, houve a criação de uma nova representação, como veremos com o surgimento da Geometria Analítica.

Apollonio aperfeiçoou o pensamento sobre cônicas, em sua obra-prima, do pensamento matemático grego, as Cônicas. Ele introduziu a ideia de cone duplo, e generalizou a geração da parábola, elipse e hipérbole pelo mesmo cone, variando a inclinação do plano secante. A partir da definição, em língua natural, Apollonio conseguia definir um cone que gerava uma certa seção cônica dado o vértice e alguns parâmetros, sendo isso o percursos do sistemas de coordenadas que usamos hoje, e os parâmetros as equações que designam uma cônica. Foi o problema do lugar geométrico de três ou quatro retas que inspirou Descartes no seu livro *A Geometria* que culminou no surgimento da Geometria Analítica.

Embora o matemático grego tenha feito sempre uso da linguagem natural, grande parte do seu trabalho pode ser assinalado como uma Álgebra Geométrica e o sintoma de uma cônica pode ser considerado como uma expressão retórica da sua propriedade algébrica fundamental (KATZ apud RAMOS, 2013)

Diofanto diz que para formar um cubo da soma de dois diferentes números devemos tomar o cubo dos dois termos e adicionar à eles três vezes o resultado da multiplicação do quadrado de um termo pelo o outro, que hoje em dia seria $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Podemos notar que por mais que

Diofanto tivesse uma equação indeterminada, ele não tinha problema nenhum de limitar para um problema específico onde ele teria uma solução afim de concluir o problema com o conhecimento que tinha, e então com a resposta em mãos ele generalizava. Notamos também, que se sua suposição não funcionasse ele simplesmente o adaptava afim de respeitar uma resposta aceitável, ou então, fazer a solução mais fácil. O que nos retoma ao método da falsa posição egípcio. Seus métodos nos mostra a necessidade dos matemáticos desse tempo de se chegar à uma resposta racional. Katz (2009) ilustra como ele manipulava os termos para que a resposta fosse racional. Diofanto no problema N-39 diz que a solução para $c + bx = ax^2$ é $x = \frac{\frac{b}{2}+\sqrt{ac+\frac{b^2}{2}}}{2}$, na nossa linguagem simbólica. A mesma apresentada pelos babilônicos. (KATZ, 2009)

Embora o trabalho de Diofanto não seja puramente algébrico, nós podemos ver o quanto seu trabalho perdeu o apelo geométrico em comparação com seus antecedentes. A maioria dele é feito de forma narrativa, e com os novos símbolos introduzidos por ele mesmo. Notamos a criação de uma nova representação semiótica. Quando Diofanto usa um novo conjunto de símbolos e dá a eles sentido semântico específico, tendo assim que haver também um tratamento para lidar com essa nova linguagem.

Essas abreviações visavam agilizar a escrita, tinha o intuito de nomear pro-ceitos já usados naquela época, como o quadrado de um número que já extrapolava a ideia de um quadrado em si e agora tinha um símbolo para designá-lo, por exemplo como mostra Ramos (2013), a letra final da palavra arithmos (ς) para simbolizar uma quantidade desconhecida; a primeira letra da palavra dynamis Δ^{Y} como símbolo do quadrado da quantidade desconhecida; a primeira letra da palavra kybos K^{Y}para o cubo; o símbolo $\Delta^{Y}\Delta$ para o quadrado – quadrado ou quarta potência; a combinação ΔK^{Y}como o quadrado – cubo ou quinta potência; e a combinação $\mathrm{K}^{Y}\mathrm{K}$ para o cubo – cubo ou sexta potência. Com isso podemos representar, por exemplo, a equação x^3+13x^2+5x como

$K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\gamma\varsigma\varepsilon$ notando que α corresponde a 1, γ corresponde a 3, e ε corresponde a 5, conforme tabela de equivalência do alfabeto grego com os números.

Papo fez uma coleção onde ele juntou a análise criada pelos gregos. Nessa coleção, ele analisou os trabalhos gregos antigos como, Euclides, Appolônio e Arquimedes, observando suas estratégias ele criou um guia para a análise grega. Ele não criou conhecimento além do que já tinha sido produzido, mas sim um estudo aprofundado dos trabalhos clássicos, procurando deixar o trabalho desses estudiosos acessível para o público acadêmico, que estava perdendo tradição, e vinha perdendo a habilidade de entender estratégias tão complexas como as vistas na matemática grega. Papo passou pelos pensamento clássicos e criou lemas para ajudar quem quisesse estudar por eles. Podemos observar no trabalho de Papo uma conversão entre a representação geométrica e descritiva com o intuito de atingir um público maior, tentando fazer o conhecimento mais acessível.

Há muita semelhança entre o Livro I e o trabalho babilônico, tal como sistemas do tipo: $\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b \end{cases}$, encontrar dois números tal que a soma e a soma de seus cubos sejam dois números dados. A solução começa atribuindo-se valores as somas dadas, 20 para soma dos números e 2240 para soma dos cubos, então ele chama um dos números de 10 mais um parâmetro z, e o outro de 10 menos um parâmetro z, observe que a soma dará os 20 desejados. Parecido com a solução vista acima. (MELO, 2013)

Problemas como esses são vistos também em *Os Elementos*, de Euclides, porém não com esse caráter algébrico dado por Diofanto. Uma característica importante é a manipulação feita por ele e matemáticos de sua época para que o resultado fosse um número racional, eles entendiam que em certas circunstâncias o resultado poderia ser não-racional, e resolviam de tal forma a evitar essa solução, um descuido pelo lado analítico, mas aceitável se pensarmos que os irracionais ameaçavam todo conhecimento construído por eles.

Vemos uma abordagem algébrica em muitos trabalhos gregos, apesar de sua tradição na geometria. Diofanto deu uma nova vida à álgebra, que tinha sido esquecida desde os babilônios. Ele usou expoentes maiores que 2 e classificou equações em determinadas e indeterminadas. A álgebra grega, mesmo que ínfima, motivou o desenvolvimento da matemática moderna no séc. XVII, a lógica que estrutura a matemática e a álgebra na solução de problemas de geometria. Analisando o quadro da teoria de visualização e simbolismo de Tall(1994) a matemática grega passou de enativa, onde se percebe e age sobre os objetos para uma icônica, onde há uma interpretação sobre objetos, e com Diofanto e Apollônio teve um início da construção de um conceito pro-ceitual, onde processo tomavam papel de objetos, com definição e a prova verbalizada bem característica dessa época. É nítido o avanço do pensamento algébrico, seja pelo simbolismo de Dioanto ou a aceitação do não uso da régua e compasso por Apollônio.

2.2.3. MATEMÁTICA NO ORIENTE

Vemos na China antiga um sistema numérico de base dez, aproximando-se cada vez mais do nosso modelo atual. Como em outras civilizações antigas problemas com área e lado do quadrado são vistos nessa região. Os chineses usavam desigualdades para resolver esses problemas, chegando na resposta certa. Eles tinham sua própria interpretação para o Teorema de Pitágoras.

Quando olhamos trabalhos como O Manual Matemático da Ilha do Mar fica claro o apelo algébrico dos chineses ao resolver problemas geométricos. Eles tinham quatro modos diferentes de definir a área do círculo, todas com uma valor de π igual à 3 (como na Babilônia). Liu Hui notou que a área de um decágono inscrito em uma circunferência de raio 1 é igual a 3, concluindo então que o valor 3 deveria estar errado, ele achou então um valor aproximado de π igual à 3,14.

O matemático chinês Hiam generalizou uma fórmula para solução de equações quadráticas e cúbicas, usando como ferramenta o triângulo de Pascal, desenvolvido por ele mesmo. Os chineses lidavam bem com sistemas de várias variáveis também. O algoritmo das operações organizados em matriz davam a eles maior praticidade ao lidar com esses problemas que poderiam ser extensos devido aos vários parâmetro para ser feito de forma discursiva, então eles passam o problema para uma representação matricial. E então, faziam os tratamentos necessário naquele sistema semiótico.

O começo para nosso sistema numérico foi na Índia, onde eles aperfeiçoaram o sistema chinês. Lá eles introduziram a ideia do vazio, e definiram regras onde tinham números negativos, inclusive, que eram vistos agora como entidades por si só, não apenas a “subtração de um número positivo”. Eles já solucionavam equações quadráticas, de forma discursiva, porém com ideias algébricas. Apresentaram também grande desenvolvimento em trigonometria, onde se nota um apelo algébrico.

Al-Khwarizmi introduziu em seu livro o sistema decimal desenvolvido na Índia e melhorado por ele. Ele ensina como usar os nove dígitos e um círculo para designar o zero (um símbolo sagrado para os indianos). Ele descreve o algoritmo para soma, subtração e multiplicação, atentando-se para as características de um sistema posicional. É introduzido uma nova representação semiótica para os números, e junto com ela tratamentos específicos que estavam ligados diretamente pelo fato de ser um sistema de base decimal. Podemos imaginar a dificuldade no primeiro contato com esse sistema pela nossa experiência com sistemas de outras bases que não decimal, seu tratamento se torna lento e nada natural, por isso, se fez necessária essa apresentação acompanhada da regras de tratamento feita por Khwarizmi. Ele pegou a ideia de fração vista no Egito, já que ele usava basicamente frações unitárias. Foi Al-Khwarizmi que levou o sistema posicional para a Europa. O primeiro a falar sobre frações decimais foi Al-Samow. Ele disse que os números vão de unidades à dezenas, centenas, milhares etc. Então o mesmo acontece antes da unidade. O sistema Hindu-Arábico tomou forma com a notação usada por Ghiyath em 1429.

A área da matemática mais importante desenvolvida pelo Islã foi a Álgebra. Eles combinaram os trabalhos babilônicos com a matemática grega.

Dos gregos eles tiraram o conceito de demonstração, aceitando esse como o único caminho para garantir que uma resposta seja verdadeira. Como as demonstrações gregas eram geométricas, os estudiosos islâmicos justificavam regras algébricas pela Geometria.

Al-Khwarizmi introduziu os termos al-jabr (que deu origem à palavra álgebra) e al-muqabala, que quer dizer restaurar e comparar, respectivamente. Por restaurar ele se referia à fazer um valor negativo de um valor positivo no outro lado da equação, e por comparar a redução de valores positivos subtraindo em ambos os lados o mesmo valor. Ele listou 6 tipos de equações quadráticas:

i. $ax^2 = bx$
ii. $ax^2 = c$
iii. $bx = c$
iv. $ax^2 + bx = c$
v. $ax^2 + c = bx$
vi. $bx + c = ax^2$

O avanço islâmico dos problemas vistos na Babilônia foi conceitual. Eles mostravam uma resolução parecida, porém o entendimento de raízes, por exemplo, do Islã vai além de área do quadrado, o que ocorreu foi um encapsulamento do conceito que antes era uma operação (a de achar o lado do quadrado cuja área fosse dada), migrando de uma representação icônica para uma simbólica que favorece a linguagem, o que leva os problemas que era visto como achar a área do quadrado, para achar um valor, tal que esse valor pudesse ser multiplicado por ele mesmo. O método de resolver uma equação do tipo 4, por exemplo, tal que o coeficiente não é 1 era dividir ou multiplicar a equação de modo que o coeficiente fique igual à 1, o que mostra um amadurecimento no pensamento algébrico, conseguiam realizar tratamentos com a equação em si, conseguiam perceber a características pro-ceitual das equações que eram processos que descreviam o problema proposto porém tinham um conceito próprio, conceito de expressão. Havendo não um desligamento das ideias geométricas e aritméticas antigas, mas eles se sentiam confortáveis em caminhar entre as representações anteriores, favorecendo, no entanto, a linguagem mais simbólica empregado por eles pela sua facilidade de tratamento, mas recorrendo as linguagens geométricas quando se fazia necessário e língua corrente ainda muito forte na transcrição dos problemas. Eles manipulam a equação perdendo ligação com a figura ou ideia geométrica por trás dela. Al-Khwarizmi sabia da existência de mais de uma raiz, mas se atentava apenas àquela que era solução do problema proposto. Poucos dos trabalhos de Al-Khwarizmi eram situações reais. Seu livro ensina métodos e algoritmos (como visto nos trabalhos babilônicos).

Abu-Kamil é tido como sucessor de al-Khwarizmi. Ele continuou o trabalho algébrico de Al-Khwarizmi resolvendo problemas mais complexos, apresentando soluções mais rebuscadas. Diferente de seu mestre, ele baseou seu trabalho em cima de Euclides. Ele levou uma interpretação mais geométrica para as soluções feitas por Al-Khwarizmi. Um avanço visto em seu trabalho é a naturalidade com que lidava com números irracionais, tratando-os como números, sem medo de manipulá-los, por mais que não pudesse explicar esses números. Desde que o método fosse usado corretamente, o resultado estaria correto. Essa confiança estava atrelada ao caráter das demonstrações, eles já haviam verificado que o método estava certo, logo o resultado também estaria.

Al-Samawal foi o primeiro a lidar com equações com coeficientes negativos, definindo regras para tal. Ele inovou no estudo de polinômios, enxergava a potência de $\frac{1}{x}$ como trataria uma de x, sob a visão de Tall (1994) eles viam 1 sobre x não somente como processo divisão, mas conceito fração. Criou, também, uma tabela de potências que o ajudava a multiplicar monômios. Al-Samawal tinha um método para divisão de polinômios, um exemplo de pro-ceito, o que levou ela a entender melhor a aproximação decimal e séries. Seu trabalho aproximou a manipulação de números à manipulação algébrica, de forma que as ferramentas aritméticas poderiam ser usadas em entes algébricos (como polinômios). O egípcio, Ibn al-Haythan, foi o primeiro a usar um método de indução matemática. Seu método não tinha rigor, e ele não demonstrou intenção de uma formalização, mas ele atendia suas necessidades conforme ia se desenvolvendo no estudo de séries. E Al-Samawal tomou uso desse método (indução) para relacionar binômios e o triângulo de Pascal. Ele, então, fez uma tabela até a vigésima potência. Ele escreveu:

> *Para um número* dividido em *duas partes, sua quarta potência é igual à quarta potência de cada parte, quatro vezes o produto de uma parte pelo cubo do outro, e seus vezes o produto do quadrado de cada parte. (*AL-SAMAWAL APUD KATZ 2007 *p.285)*

Omar Al-Khayami e Sharaf Al-Din contribuíram para solução de equações cúbicas. Omar notou que, depois de classificá-las e agrupá-las, elas eram originadas por seções cônicas. Sua expertise na geometria grega, principalmente em cônicas, fez com conseguisse provar que a interseção de duas cônicas originava uma equação do terceiro grau. A partir disso, ele podia dizer pela quantidade de interseções quantas raízes positivas a equação teria. Por outro lado, Sharaf focou em provar como os coeficientes interferiam em quantas soluções uma equação cúbica teria, classificando-as.

No problema da soma de um cubo e seu lado é igual a um número dado ele resolvia da seguinte forma: Tome o seguimento AB de tamanho $\sqrt{c}$. Então, construía o segmento BC perpendicular a AB tal que $BC.AB^2 = d, ou\ BC = \frac{d}{c}$. A seguir, estende-se AB na direção de Z e constrói-se a parábola com vértice em B, eixo BZ, e parâmetro AB. De mesmo modo, construir um semicírculo sob a linha BC. O círculo e a parábola intersectam no ponto D. A coordenada x desse ponto, aqui representado pelo segmento de reta BE, que é a solução da equação.

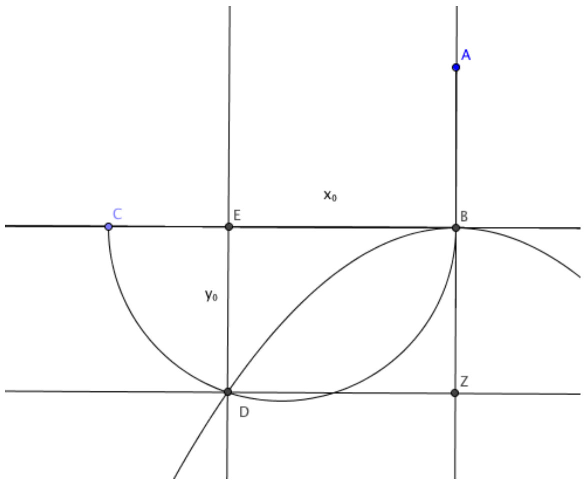


Figura 6: Solução Geométrica da equação $x^3 + x = c$.

Observamos uma volta do artifício geométrico nas soluções motivados pelo estudo de os Elementos. Apesar desse apelo geométrico, eles tinham maturidade, especialmente no estudo de cônicas para entender que satisfaria a solução do problema, esses propriedades eram bem entendidas pelos estudiosos árabes. Faziam uma conversão do conceitos algébricos para uma representação geométrica, quase que internamente, demonstrando segundo Duval(1993) grande entendimento do assunto tratado.

O contato com o trabalho de Euclides não ajudou os matemáticos islâmicos apenas em álgebra, mas também em geometria pura, como o quinto postulado, por exemplo. Fica claro, analisando o trabalho desenvolvido por esse povo, como eles usaram o conhecimento dos gregos e babilônios de uma maneira totalmente diferente, olhando para aqueles problemas com um novo olhar.

2.2.4. RENASCIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Como se sabe pela história, a Europa medieval não teve muito avanço em nenhuma área do conhecimento. A contribuição dessa época foi, basicamente, a manutenção dos trabalhos da antiguidade pelos monges. De fato, o sistema feudal não deixava espaço para um crescimento intelectual. Conforme isso foi mudando os estudiosos medievais tiveram contato em primeira estância com o trabalho dos mulçumanos (Abu Kamil influenciou Leonardo de Pisa), por conta da invasão na região da Península Ibérica no começo da Idade Média. Portanto, não se é de estranhar que a maior influência no pensamento algébrico vinham dos trabalhos islâmicos, que foram traduzidos para o espanhol e então, o latim.

O trabalho de Leonardo de Pisa reviveu o estudo de álgebra na Europa. Ele apresentou os numerais Hindu-Arábicos e a álgebra do mundo Islâmico para comunidade europeia em seu livro Liber Abaci. Apesar de não apresentar muita inovação, seu trabalho impulsionou o estudo de matemática na Europa.

Problema dos viajantes, capítulo 12 (FIBONACCI; SIGLER,2002). Um homem indo para Lucca a negócios para ter algum lucro dobrou seu dinheiro, e lá gastou 12 denari. Ele, então, partiu e foi para Florença, lá ele dobrou seu dinheiro, e gastou 12 denari. Então retornou para Pisa, dobrou seu dinheiro e gastou 12 denari. Ao final ele não tinha dinheiro algum. É procurado quanto ele tinha no começo da jornada. Porque é proposto que ele sempre dobrou seu dinheiro, fica claro que 2 é feito de 1. Portanto, é visto que fração 1 é de 2, chamada $\frac{1}{2}$, que, portanto, é escrita 3 vezes por causa das 3 viagens que ele fez: $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$, e o 2 é multiplicado por 2 e os outros "dois" abaixo da fração, haverá 8 do qual você tira $\frac{1}{2}$, obtendo , e o homem tinha esse montante. Observamos um forte uso de aritmética na resolução de Fibonacci. O pensamento era descrito em língua natural com uso dos numerais recém apresentados por ele mesmo. Os problemas presentes no livro seguem a linha do apresentado acima, com um contexto, apresentando situações cotidianas, isso se faz por conta do caráter didático da obra, que pretendia retomar a tradição acadêmica, trazendo à sociedade, no caso a ascendente burguesia, o que estava sendo estudado em matemática. 4, do qual você tira $\frac{1}{2}$, obtendo 2, que você tira $\frac{1}{2}$, obtendo 1. Terá 7 que você multiplica pelos 12 denari que ele gastou, terá 84 que você divide por 8, o quociente será $\frac{1}{2}\ 10$

Jordano de Nemore, diferente de Leonardo, tentou produzir conhecimento. Ele trouxe o rigor grego, o que levou a uma linguagem mais generalizada. Ele evitava o uso de números em seus trabalhos, usando uma linguagem mais simbólica, deixando de lado os numerais Hindu-Arábicos, e também, não se preocupando em justificar os problemas por meio de Geometria, seus método não-numérico era suficiente, dado o rigor usado. Podemos considerar que o uso desorganizado de letras é o começo da linguagem algébrica como conhecemos hoje.

A renascença ajudou a espalhar o pensamento islâmico pela Europa (principalmente Itália). Nesse período, os abacistas, as pessoas que eram responsáveis por ensinar matemática para a elite mercante, que surgiu nessa região, ensinava matemática aos mercadores e seus filhos, incluindo os numerais e os métodos de resolução algébricos, que eram escritos de forma discursiva, e foi mudando com o uso de abreviações.

Dordi de Pisa deu continuidade no trabalho islâmico de equações até o quarto grau. Ele especificou mais de 158 tipos de equações, das quais, consequentemente, podiam ser reduzidas a uma solução já conhecida. Matemáticos do norte europeu tiveram um grande progresso em expoentes, eles perceberam que multiplicando números com expoentes poderia ser feito apenas adicionando as potências. Rudolff foi o primeiro a usar os símbolos de mais (+) e menos (-) em publicações matemáticas, e também o símbolo para raiz quadrada.

Podemos notar em Cardamo a influência babilônica e islâmica na solução para equações do terceiro grau. Seu pupilo, Lodovico Ferrari foi responsável pela solução de equações do quarto grau. Bombelli se esforçou para tornar acessível o trabalho de Cardamos sobre equações do terceiro grau. Ele trabalhou também com soluções negativas de equações cúbicas, levando a criação dos números imaginários.

A solução dada por Cardano para a equação: $x^3 = cx + d$. Quando o cubo de um terço do coeficiente de x não é maior que o quadrado da metade da constante da equação, subtraia o primeiro do outro e adicione a raiz quadrada do resto à metade da constante da equação e, novamente, subtraia da mesma metade. A soma da raiz cúbica (das duas quantidades) constitui o valor de x. Ou seja, $x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{c^3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{c^3}{3}}}$. Nesse momento, notamos um pensamento algébrico mais amadurecido. Os estudiosos, como Cardano, lidava com conceitos e ideias de forma mais confortável, sem recorrer à artifícios sensíveis. A conversão das ideias algébricas para a linguagem natural se dá no desenvolvimento do pensamento.

Com a álgebra bem estabelecida no estudo de matemática os estudiosos do século XVI deram uma cara nova à esse campo, com Viète, que não lidava com solução de problemas, mas sim, como ele mesmo dizia, “a verdade correta”, análise. Ele inovou no uso de símbolos para escrever matemática, que surgiu como uma necessidade de uma maneira melhor de expressar seu trabalho e manipulá-lo.

Uma das soluções apresentada por Viète para um problema clássico é a seguinte, dada a diferença entre dois números e suas somas, encontre os números. Deixe B ser a diferença, D a soma, e A o menor dos dois número, ele notou que A + B é o maior número. Logo, a soma dos dois números é 2^A + B, que é igual à D. Portanto, 2^A = D – B e A = $\frac{1}{2}$D + $\frac{1}{2}$B. O outro número então é E = $\frac{1}{2}$D $\frac{1}{2}$B. Viète usava letras maiúsculas para designar ações descritas no problema. Vemos que B e D, por exemplo, têm o embutido o processo da adição, e o conceito da soma, e o autor lida com eles como se fossem entes, por conta do pro-ceito empregado, ele tinha maturidade para comprimir ideias em símbolos, lidando então com equações, onde ele iria aplicar o tratamento necessário de forma a resolver o problema.

Fica claro desde a primeira página a inovação que Descartes estava para apresentar com seu livro *A Geometria* no modo como a sociedade fazia e expressava matemática. Bem no começo ele começa relacionando operações aritméticas com operações geométricas de modo tão harmônico que parecia trivial, podemos dizer que essas representações tem conversão congruente, segundo Duval (1993). Seu livro está cheio de explicações para sustentar os conceitos apresentados por ele, e ilustradas com esquemas feitos por régua e compasso, uma tradição grega, melhorada pela sua invenção, o esquadro com compasso, essa ferramenta auxiliou Descartes a por no papel sua visão esquematizada do mundo (Serfati, 2008). O pensamento algébrico fica claro na afirmação que diz, “é suficiente designar cada um como uma única letra”(Descartes) tratando retas como entes numéricos, um pro-ceito, segundo Tall(1994), dando a elas o conceito de uma representação concreta para números. Ele afirma que a +b, onde a é o segmento AB e b o segmento CD, assumindo que essa afirmação já bastava para sua existência substituindo o desenho esquematizado, andando entre as representações icônicas e simbólicas (Tall, 1994). Ele que introduz um símbolo, para extrair a raiz (podendo ser quadrada, cubica, ou de maior grau), oficializando, desta maneira, a passagem dessa representação matemática que começou na antiguidade como uma ação, sobre objetos representados geometricamente, então passou a aceitar uma utilidade aritmética, e agora, com Descartes, tinha uma caráter puramente operacional, com definição bem estabelecida.

O modelo de Descartes apresenta uma reta onde ele relaciona a curva criada de forma mecânica. Essa seria a ideia primitiva dos eixos das abcissas e ordenadas. Quando descrevendo um problema Descartes usava abreviações, ele entendia que os valores eram dados, então não teria diferença de ou escrever a equação, ou representá-la com uma legenda predefinida. Ele se sentia confortável fazendo isso já que estava convencido que havia formas mais adequadas de escrever equações de cônicas das estudadas por ele nos trabalhos de Papo, e consequentemente, Apollônio, usando a ideia apresentada no início de seu livro, dando nomes às retas, de forma a tratá-las como entidades aritméticas, ou no caso algébricas.

Apesar dele ter aperfeiçoado as ferramentas algébricas, ele ainda sentia a necessidade de dar justificação geométrica para suas soluções. Ele tinha facilidade para generalizar casos simples como resultado de uma problema mais complexo. De fato, ele era bem abrangente na hora de abordar todos os casos possíveis.

Descartes disse sobre a solução do problema de Apollônio: “Em todo caso uma equação pode ser obtida contendo dois valores desconhecidos...”, ele quis dizer que a afirmação era verdadeira mesmo se a solução fosse um ponto, uma reta ou uma seção cônica. Essa afirmação reflete a crença de Descartes que qualquer figura geométrica pode ser escrita com uma equação que contém todos seus pontos. Descartes relacionou duas representações semióticas criando um novo campo de estudo, onde Geometria e álgebra andam de forma harmônica e complementar. A partir desse momento, podia se entender equações como figurar, e vice e versa. Descartes estabeleceu um caminho para o desenvolvimento do campo da álgebra como conhecemos hoje, inspirado pelo problema de 3 ou 4 retas enunciado por Papos na Grécia antiga.

3. METODOLOGIA

Este é um trabalho de caráter bibliográfico. Procuramos fazer um levantamento histórico, em diferentes contextos sociais, do desenvolvimento da álgebra, com foco nos problemas e soluções de cada época. Tratamos como álgebra os objetos primitivos que vieram a compor esse campo de conhecimento. Nos atentamos às suas representações e sua evolução tal como o conceito que esses objetos carregam.

O objetivo era observar como os diferentes tipos de registros usados por eles se relacionam com os registros usados nas soluções modernas de problemas equivalentes. Foram usadas as teorias de Tall (1994) e Duval (2010) para entendermos o desenvolvimento e o tipo de pensamento realizado em cada época. Tall (1994) para caracterizar o tipo de pensamento segundo as representações usadas e de Duval (2010) para identificar as Representações Semióticas que foi a base principal para análise dos registros históricos. Por fim, analisamos as perspectivas do impacto do contato com a História da Matemática na formação matemática do professor.

Além disso, realizamos uma pesquisa online com os professores do Instituto Federal do Rio de Janeiro campus Volta Redonda. O questionário composto por quatro questões onde tentamos identificar a capacidade dos docentes de identificar diferentes representações para um mesmo conceito.

A primeira questão é apresentada o produto (3x + 4) . (2x + 3) e perguntamos como podemos interpretar esse produto: expressão genérica, área de figura, produto de binômios ou produto de dois números. E ainda se escolhessem as produto de dois números se esses seriam quais quer ou números específicos. Era possível escolher quantas quisessem, pois queríamos observar quantas dessas representações eles conseguiam identificar.

A segunda questão apresentamos um método de multiplicação antigo. Pedimos aos professores demonstrarem qual ramo do pensamento matemático motivou aquela resolução: algébrico, geométrico ou aritmético. Apesar do método algoritmo, queremos ver se o professor consegue perceber a justificação do porquê o método funciona.

Na terceira questão usamos um problema tirado dos registros egípcios, que diz: Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade? Então perguntamos qual a relação com a solução atual. Queremos ver se o professor enxerga a conexão dos problemas de falsa posição com a função de primeiro grau e a característica de proporcionalidade que ele tem.

Ao final queremos ver como os professores conduzem suas aulas, se tentam usar outros conceitos além da equação da reta no formato $y = ax + b$. Perguntamos se tentam abordar $ax + by = c$, ou a paramétrica.

4. IDENTIFICANDO REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO EM PROBLEMAS ANTIGOS

4.1. PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Até aqui identificamos como a linguagem algébrica se desenvolveu ao longo da história e como este desenvolvimento ressalta os diferentes registros descritos por Duval (2010). Com isso, foi possível identificar como estudos referentes a história podem auxiliar o professor no entendimento mais global das expressões que surgem nas aula. A abordagem de História da Matemática é incentivada no PCN, e autores como Katz (2007) acreditam que no processo de construção de conhecimento do aluno o professor terá uma vantagem metodológica se conhecer os processos históricos de construção do conhecimento.

A pesquisa teve o intuito de analisar o pensamento algébrico presente em soluções de problemas nas civilizações antigas, e trabalhos de grandes pensadores. Apesar de não se dar de forma direta muitos problemas demonstram uma ideia primitiva do pensamento algébrico. Ao longo da história o pensamento algébrico vai sendo descrito e interpretado à luz de diversas representações, e conjunto de símbolos. Vemos o nascimento de um sistema decimal, de representações simbólicas para conceitos primordialmente vistos como concretos, e então, a formalização de definições que conceituam modelos e figuras geométricas.

Faremos a análise de problemas que sob nosso ponto de vista representa o pensamento algébrico de cada época. Essa análise se dará de foram individual com cada um dos problemas.

PROBLEMA 1: MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O método egípcio era algoritmo, esse procedimento se repetia ao longo do papiro em problemas do tipo de Falsa Posição. Um olhar moderno sob os registros egípcios permite perceber que este método tem como base o conceito de proporcionalidade. Mesmo bem longe de uma definição formal de função do primeiro grau, eles usavam essa propriedade para resolver tais problemas. A representação usada era primordialmente a língua natural, com uso do sistema numérico desenvolvido por eles. Não havia uma variedade de representações semióticas na época, o que é de se esperar por ser uma civilização bem primitiva.

O problema 26 do Papiro de Rhynd diz: encontre a quantidade tal que quando é adicionada à $\frac{1}{4}$ dela mesma, o resultado é 15.

Método Antigo	**Método Moderno**
Assuma 4 (como resposta). Então $1\,\overline{4}$ ($\frac{1}{4}$ em notação egípcia) de 4 é 5. Multiplique 5 de tal forma a conseguir 15 como resposta. A resposta é 3. Multiplique 3 por 4. A resposta do problema é 12.	$x + \frac{x}{4} = 15$

Tabela 3: Comparação do método antigo e moderno do Problema Egípcio

Solução antiga está em registro linguístico, com tratamento aritmético. Apresenta um movimento entre o estágio Enativo e Icônico. A resolução moderna é feita em registro algébrico com tratamento algébrico, o que segundo Duval (2010) não favorece o aprendizado.

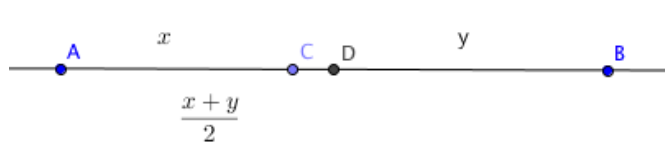
O método moderno ainda não explicita a proporcionalidade, que é uma característica de equações polinomiais do 1º grau, que é observada na resolução egípcia. O pensamento desenvolvido é basicamente simbólico, onde variáveis são definidas e tem valor semântico dentro do registro. O modo como se dá a resolução desses problemas do Egito antigo mostra a conversão entre registros, proporcionando contato com mais de um registro, e ainda como se dá a conversão que pode ser um processo difícil, mas que pode ser facilitado com exemplos como esse.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO BABILÔNICA DE UM PROBLEMA DO 2º GRAU

Percebemos um pensamento geométrico na resolução babilônica. O problema era resolvido descritivamente, porém o pensamento que os conduzia era geométrico. É possível perceber este fato através das palavras adotadas nas resoluções, tais como: formar o quadro, o quadrado de lado, mostrando dependência das figuras, uma característica do pensamento icônico com pensamento em cima de experimentação, e interpretação sobre as figuras ou diagramas, assim como descreve Tall (1994).

O problema babilônico presente no tablete YBC 4663 pede os lados do retângulo cuja área é $7\frac{1}{2}$ e soma dos lados $6\frac{1}{2}$. O escrivão começa por dividindo no meio a soma. Então constrói um quadrado sobre essa medida. Já que a metade da soma é igual a $x-\frac{(x-y)}{2}=y+\frac{(x-y)}{2}$ o quadrado de lado igual a metade da soma excede a área do retângulo original por um quadrado de lado $\frac{(x-y)}{2}$. Temos que $(\frac{x+y}{2})^2=xy+(\frac{x-y}{2})^2$. A solução é dada por $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2-xy}$ $y=\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2-xy}$.

A seguir, vemos a justificativa geométrica da solução:

	Dividir a soma ao meio

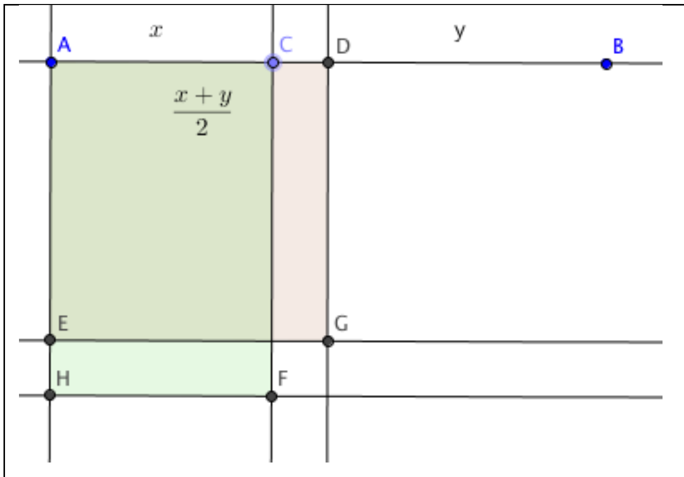
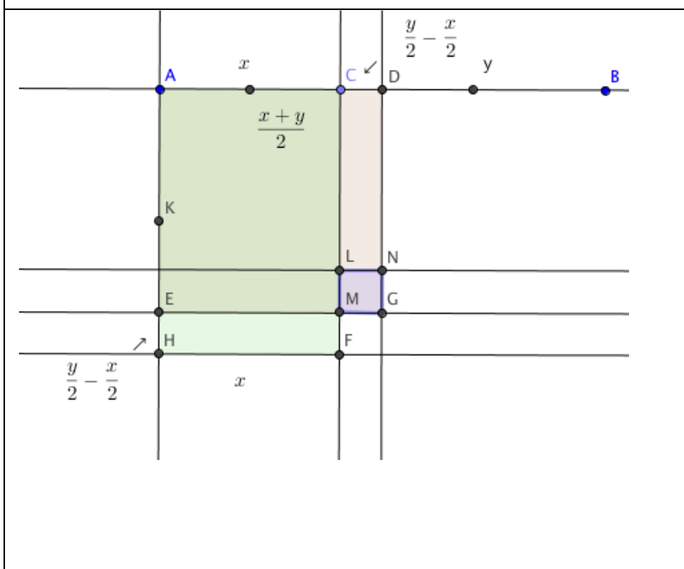
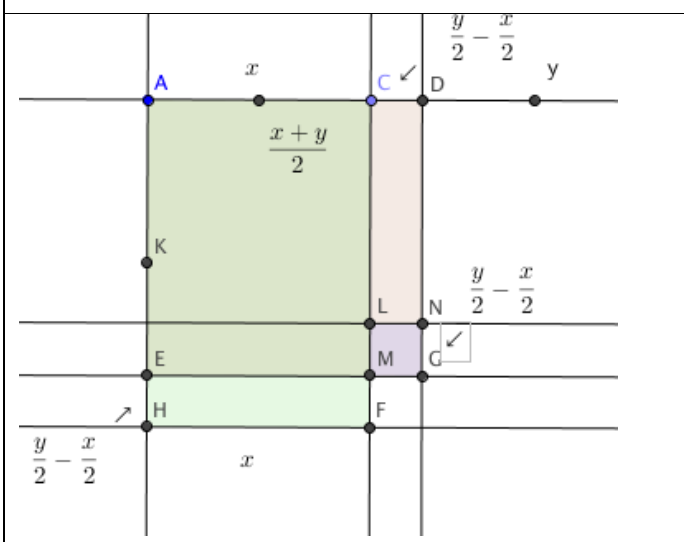
	Fazer o quadrado de lado $\frac{x+y}{2}$ O quadrilátero $\overline{ADGE}$. Note que o quadrilátero $\overline{ACFH}$ é o retângulo de lados x e y.
	Já que a metade da soma é igual a $x-\frac{(x-y)}{2}=y+\frac{(x-y)}{2}$ o quadrado de lado igual a metade da soma excede a área do retângulo original por um quadrado de lado $\frac{(x-y)}{2}$. Note que o segmento $\overline{CD}$ mede $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$. E o segmento $\overline{EH}$ mede $\frac{y}{2}-\frac{x}{2}$.
	O quadrilátero $\overline{LNGM}$ é um quadrado de lado $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$.

Tabela 4: Comparação do método antigo e moderno do Problema do Segundo grau Babilônico

Os babilônios resolviam em linguagem natural com tratamentos geométricos e aritméticos. A ideia por trás da solução era geométrica, mostrando um pensamento icônico. Em representação moderna o problema seria resolver o sistema $x + y = 6\frac{1}{2}, xy = 7\frac{1}{2}$, novamente com tratamento algébrico, com desenvolvimento simbólico. Novamente a resolução moderna não apresenta conversão.

PROBLEMA 3: PROBLEMAS DIOFANTINOS

No Problema 27 do livro I que pede para encontrar dois números cuja soma e o produto são números dados. Que se feita pela linguagem apresentada por Diofanto seria:

Método Antigo	**Método Moderno**
Considere que a soma seja 20 e o produto 96. Se esses números fossem iguais, cada um deles 10. Supomos a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas, sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever (10 – ζ) (10 + ζ) = 96. Observamos, então, que 10^2 – Δ^Y= 96, e concluímos que o valor de ζ deve	$x + y = 20$ $xy = 96$ $x = 20 - y$ $20y - y^2 = 96$ $y^2 - 20y + 96 = 0$ $\Delta = 400 - 4(1)(96)$ $\Delta = 16$ $y = \frac{-20 \pm 4}{2}$ $y_1 = 12$ $y_2 = 8$

ser 2. Logo, os números procurados 10 – ζ e 10 + ζ são, respectivamente, 8 e 12.	

Tabela 5: Comparação do método antigo e moderno do Problema de Diofanto

Apesar da imaturidade com linguagem algébrica, inexistente na época a não ser por abreviações, a solução traz um artifício puramente algébrico, o que chamaríamos hoje de “somar zero à equação”. O autor então tenta achar a soma de 10 mais o parâmetro somado ao cubo de 10 menos o parâmetro tal que essa soma seja 96, reduzindo o problema inicial à uma variável apenas. Segundo Tall (1994) a expressão tomada pelo autor 10 + z (10 mais um número) toma forma de conceito ao longo da solução, inicialmente ele e uma expressão para auxiliar a solução e logo em seguida é usado como um número, tornando-se um ente. Achando esse parâmetro tinha-se então a solução, bastando substituir nas “expressões” iniciais.

Percebemos que a solução antiga é descrita em língua natural, porém usa alguns símbolos das abreviações usadas por Diofanto. Segundo um Duval (1993) o que acontece é uma conversão congruente, já que a nova representação carrega as mesmas características que a anterior, mas ainda dois registros distintos, notamos que apesar de ainda ser bem aritmético, ele lida com os símbolos de Diofanto também, o que seria uma tratamento diferente. Observamos um pensamento icônico caminhando para o simbólico. Enquanto o método moderno é puramente algébrico.

PROBLEMA 4: ALGORÍTMO CHINÊS DE MULTIPLICAÇÃO

No problema 12 do capítulo 4 do *Manual Matemático da Ilha do Mar*, pedem para determinar o lado de uma quadrado de área 55.225. A ideia é encontrar a, b e c tal que, a resposta possa ser escrita da forma 100a + 10b + c.

Método Antigo	**Método Moderno**
Primeiro encontrar o maior número tal que $(100a)^2 < 55.225$, nesse caso $a = 2$. A diferença entre o quadrado grande (55.225) e 100a (40.000) é o gnomon grande. B deve satisfazer $55.225 - 40.000 < 2(100a)(10b)$ ou $55.225 < 40.000b$, donde $b < 4$. Para checar $b = 3$. $2(100a)(10b) + (10b)^2 < 15.225$. E para encontrar c: $55.225 - 40.000 - 30(2.200 + 30) > 2.230c \rightarrow 2325 > 460c \rightarrow c < 6, então\ c = 5$. Portanto $\sqrt{55.225} = 235$.	$55.225/5$ $11.045/5$ $2.209/47$ $47/47$ $1/47^2\ 5^2$ 235

Tabela 6: Comparação do método antigo e moderno do Problema Chinês

Geometricamente:

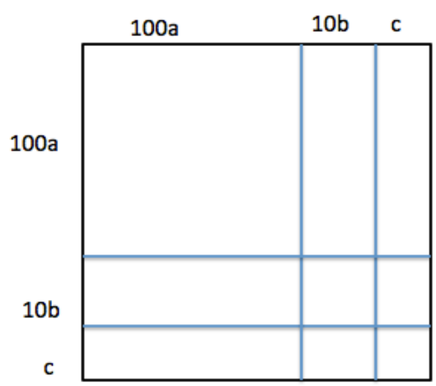


Figura 7: Representação geométrica do método de multiplicação Chinês.

Observamos que por conta de já terem um sistema de numeração decimal isso influenciava o pensamento dos chineses até na hora de resolver os problemas. Eles faziam um conversão do número para uma representação geométrica que facilitava a resolução. Assumindo que os retângulos 10b e c são não-nulos, deve satisfazer a inequação. Daí o autor desenvolve toda resolução. Essa solução é representada de forma linguística com tratamentos aritméticos, percebemos um amadurecimento no pensamento matemático com uso de inequações. Como percebemos um base geométrica na justificativa da solução, percebemos um pensamento icônico na produção chinesa, já que justificavam sua resolução com representações geométricas, e usavam esquemas para representar entes, como os números (que estão sendo multiplicados).

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO ISLÂMICA PARA UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Um exemplo de um problema do tipo 4 é: Qual deve ser o quadrado que, quando aumentado por 10 de sua raiz dá 39?

Método Antigo	**Método Moderno**
Dividimos pela metade o número de raízes, que dá 5. Então multiplica esse valor por ele mesmo, o produto dá 25. Some isso à 39, a soma dá 64. Agora tome a raiz desse número, que é 8 e subtraia a metade da quantidade de raízes, que é 5. O restante é 3. Essa é a raiz do quadrado que você procurava.	$x^2 + 10x = 39$ $x^2 + 10x - 39 = 0$ $\Delta = 100 - 4(1)(-39)$ $\Delta = 256$ $x = \frac{-10 \pm 16}{2}$ $x_1 = 3$ $x_2 = -13$

Tabela 7: Comparação do método antigo e moderno do Problema do Segundo grau Árabe

Apesar da solução ser toda discursiva, o texto trata de conceitos matemáticos, não recorrendo a “âncoras” em outras áreas, como a Geometria. Podemos dizer que falta apenas o simbolismo em relação a solução que daríamos hoje em dia, mas os conceitos se conservariam. É feita em registro de língua natural, com tratamento aritmético. O pensamento passa a ser mais simbólico, apesar de não ter um registro algébrico, porém, até mesmo pelo anunciado, vemos traços de pensamento icônico. A resolução moderna é no registro algébrico, com tratamento algébrico, percebemos um pensamento algorítmico, numa linha simbólica.

PROBLEMA 6: FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Um problema apresentado por Jordano, proposição IV – 9 (KATZ, 2007), se o quadrado de um número, somado a um dado número é igual a um número obtido pela multiplicação da raiz e outro número dado, então dois valores são possíveis.

Método Antigo	**Método Moderno**
Deixe d ser a metade de b, eleve ao quadrado para conseguir f, e deixe g ser a diferença de x e d, que é, $g = \pm(x - \frac{1}{2}b)$. Então, já que $bx = x^2 + c$ e $g^2 = x^2 - bx + d^2 = x^2 - bx + f$, nós temos $x^2 + f = x^2 + c + g^2$ e $f = c + g^2$. Então $g = \sqrt{f - c}$. Jordano concluiu, por observação, que x pode ser obtido tanto por subtraindo g de $\frac{b}{2}$ ou somando. $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{2} - c}$	$x^2 + c = bx$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

Tabela 8: Comparação do método antigo e moderno do Problema de Jordano

Jordano não tinha preocupação didática como Fibonacci. Observamos também um amadurecimento no formalismo. Ele se preocupava em manter uma sequência lógica, características de um pensamento simbólico mais refinado. Linguagem verbal é usada pra definir versões idealizadas de objetos, construções e relações. Dos gregos ele tomou apenas o rigor, pois Jordano não adquiriu a tradição geométrica, mostrando um tratamento aritmético sob registro de língua natural, e um tratamento algébrico primitivo, sem o registro, mas lidando com entes algébricos descritos na língua corrente. Seu pensamento se encaixaria mais na categoria Simbólica de Tall (1994), o uso de objetos mentais onde a definição antecede o objeto em si, em oposição ao pensamento grego. O método moderno é o algoritmo da resolução da equação de segundo, puro algébrico, e generalizado, diferente de jordano que não via todas equações do segundo grau da mesma forma.

Notamos que as soluções históricas apresentam uma variedade muito maior de registros de representação semiótica, que segundo Duval (1993) é parte essencial do processo de aprendizagem. Confirmando nossa hipótese de que o contato do professor com a história da matemática, mais especificamente do desenvolvimento do pensamento algébrico, ajuda na transmissão do conhecimento, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais eficaz. O processo histórico mostra a transição de sistemas de pensamento mais simples (Enativos) para sistemas mais elaborados como o Simbólico, mostrando a conexão entre eles e o icônico.

Observamos que o uso da linguagem simbólica como conhecemos, que proporciona uma melhor manipulação dos entes matemáticos, e ainda agiliza o processos, que Duval (2010) chama de tratamento. A abstração nessa representação proporciona uma análise mais profunda por deixar de lado as especificidades que estão presentes em representações anteriores à esta. Por ser um sistema mais sofisticado, e de rigor matemático mais elaborado, apresenta um sistema mais fechado. O que justifica seu uso por aqueles que constroem o pensamento matemático.

4.2. QUESTIONÁRIO COM DOCENTES

A pesquisa com os professores teve intenção de identificar a habilidades deles de perceberem diferentes registros de representação, ou então relacionarem um a outro.

A primeira questão é apresentada o produto de duas expressões binomiais e é perguntado como podemos interpretar esse produto. Essa questão foi adaptada de um conjunto de problemas do programa de mestrado para professores do Ensino Médio na Miami University (em Ohio nos EUA). Na questão era dito que 34 x 23 e (30 + 4) . (20 + 3), a primeira vista, são duas situações distintas, mas se mudássemos a representação para figuras as semelhanças entre o produto de dois números e o produto entre duas expressões apareceriam. Isso inspirou a elaboração da questão. Como a representação pode mudar nosso olhar sobre dois objetos inicialmente distintos. Então foi pedido que os professores marcassem as representações que eles julgavam que se o problema pode conter, como: expressão genérica, área de figura, produto de binômios ou produto de dois números. E ainda se escolhessem as produto de dois números se esses seriam quaisquer ou números específicos. Essa última pergunta teve inspiração no problema original, que deixava claro a ligação com o sistema posicional aditivo, afinal um número do tipo $(3x+4)$ é um número do tipo 3 "pacotes" mais 4 unidades. Portanto aquele produto que é pedido que os professores interpretem, como ambos os "números" têm x, é um produto entre um número com 3 pacotes de x mais 4 unidades por um número de 2 pacotes de x com 3 unidades, sendo que esses números tem características bem definidas. Portanto, esperamos que eles identifiquem isso. Sobre as outras opções iniciais, todos apresentam relação com alguma representação ao longo da história. Era possível escolher quantas quisessem, pois queríamos observar quantas desses representações eles conseguiam identificar.

Questão 1

Qual o objeto matemático pode ser descrito pela expressão (3x+4)(2x+3):

- Expressão Genérica
- Área de Figura
- Produto de Binômios
- Produto de dois Número

Se você escolheu a opção "produto de dois números", o que podemos dizer sobre eles?

- São dois números quaisquer
- São dois números específicos

Olhando os respostas:

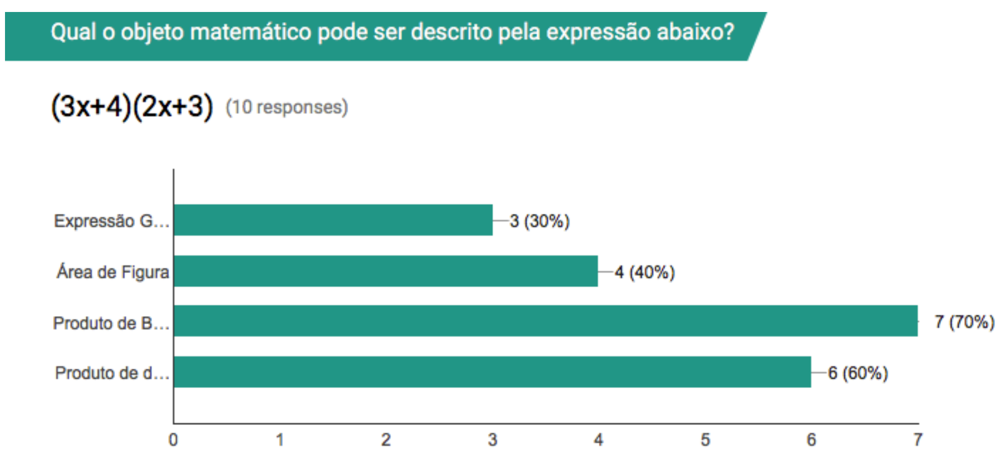


Figura 8: Comparativo das resposta para questão 1 do questionário

Essa questão foi respondida por 10 pessoas. 7 delas escolheram a opção produto de binômio, acreditamos que foi a mais escolhida pois, é o conceito corrente, linguagem algébrica por si só. A segunda opção mais escolhida foi produto de dois números. Podemos entender isso como um fenômeno de pro-ceito enunciado por Tall (1994), eles parecem entender a expressão binomial como um objeto que pode ser operado. Porém, cerca de metade dos entrevistados percebem aquele produto como área de figura, o que era definição aceita na antiguidade. A opção menos escolhida foi expressão genérica, talvez pela representação usada não conseguiram associar com uma visão mais global, mirando onde aquele produto, ou área (numa representação geométrica) levaria.

Ainda nessa questão se escolhessem a opção produto de um número deveriam explicitar se seriam números quaisquer ou específicos. Um olhar geométrico sobre o problema poderia deixar mais claro que as expressões multiplicadas carregam características específicas.

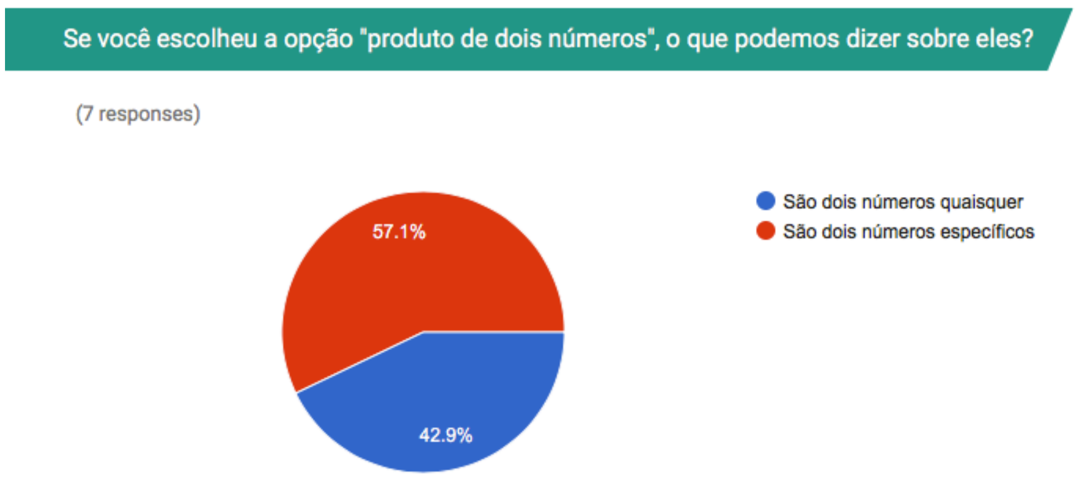


Figura 9: Comparativo para opção Produto de dois números.

Na segunda questão queremos saber se o professor consegue enxergar o pensamento matemático por trás de uma solução de um problema aritmético (produto entre dois números). A solução é feita em linguagem natural usando transformações aritméticas, porém como vimos no decorrer do desenvolvimento do pensamento, e linguagem algébricas, essas resoluções com caráter aritmético tinham justificativa geométrica. Queremos verificar se o professor é capaz de identificar essa justificativa geométrica, e também o sistema de resolução baseado em aritmética, ou se ele entende a resolução como álgebra, um pensamento mais contemporâneo. A escolha da opção deve evidenciar qual pensamento se mostra mais claro para cada docente.

Questão 2

Um método antigo de multiplicação e dado abaixo, com o problema 102 x 96.

Encontre a média: 99

Tome metade da diferença entre os números: 3.

Então, encontre o quadrado de 99: 9801

Encontre o quadrado de 3: 9.

Subtraia e você terá sua resposta: 9792.

Qual tipo de pensamento matemático embasa essa solução?

- Algébrico
- Geométrico
- Aritmético

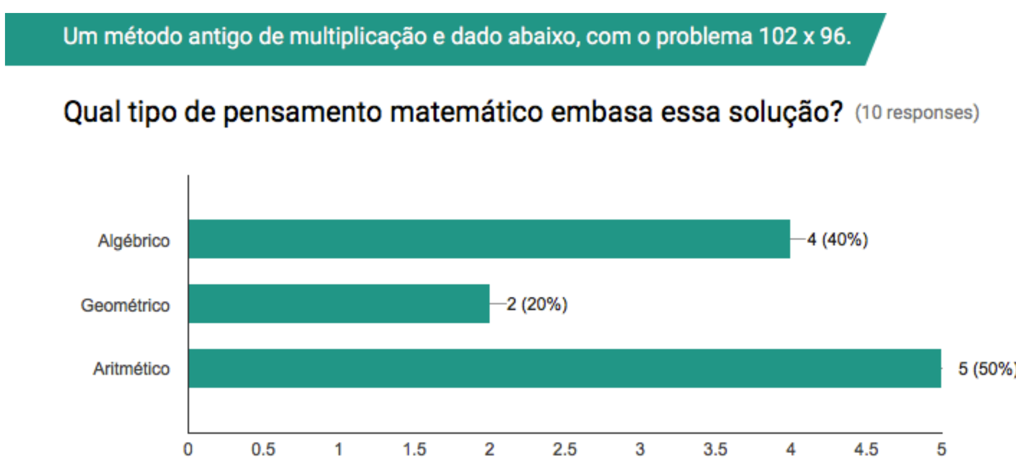


Figura 10: Comparativo das resposta para questão 2 do questionário

Observamos que dentre as 10 respostas obtidas nessa questão, 5 pessoas escolheram a opção que diz que a resolução de base na aritmética. Era esperado, pois se olharmos a resolução é esse tratamento que esta explicito, utilizando porém, a linguagem corrente juntamente com os algarismos numéricos. A segunda opção mais escolhida foi do embasamento algébrico. Entendemos que escolheram essa opção seguindo o modelo de pensamento moderno. Apesar de se tratar do produto de dois números, e descrita procedimento algébricos, mesmo que não em linguagem algébrica. Apesar de não haver resposta correta, por se tratar de um problema histórico, pelas pesquisas em cima de resolução de problemas podemos afirmar que as soluções antigas tinham justificativa geométrica, apesar de serem feitas normalmente de forma descritiva com procedimentos aritméticos, era a geometria que garantia a veracidade da resposta, e na nossa pesquisa somente 2 professores pareceram enxergar isso.

Pegamos também um problema proposto pelos egípcios, que usa o método da falsa posição para resolver o problema. Apesar de parecer aleatório, as decisões tomadas pelos egípcios nesse método tem justificativas, seja matemática, ou de facilidade de manipulação. Os egípcios estavam lidando com equações polinomiais do primeiro grau, queríamos verificar se os entrevistados conseguiam perceber essa relação, principalmente como as características algébricas dessa equações era usadas por eles mesmo sem formalização, ou ciência desse povo na hora de efetuar os procedimentos.

Questão 3
Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade? Tome 7. 7 + 1/7x(7) = 8 Divida 19 por 8 -> 19/8 Multiplique 7 por 19/8 -> 133/8 Qual a relação entre a solução egípcia e a solução moderna? • A Resolução Moderna representa proporção e lidamos com isso. • Não há relação. • Ambas lidam com características da uma função do 1º grau.

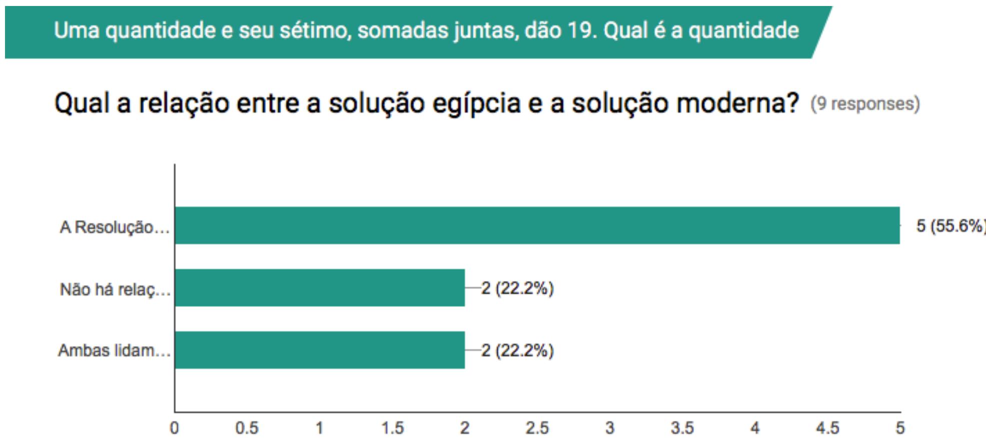


Figura 11: Comparativo das resposta para questão 3 do questionário

A maioria dos professores, 5 dentre os 9 que responderam, disseram que a resolução egípcia e moderna apresentam características de proporcionalidade, que é bem evidente na resolução antiga e não tão clara na resolução atual. Como os procedimentos algébricos são baseados no equilíbrio de ambos os lados da equação, entendemos que isso motivou a escolha dessa opção pelos docentes. Duas pessoas disseram que não há relação. Esses professores devem ter se atentado ao procedimento de ambas, que se olhados tecnicamente não se assemelham, mas sabemos que, o problema proposto é uma equação do primeiro grau, logo compartilham de mesma característica (a representação moderna e a antiga) variando apenas na representação e sistema semiótico empregado na solução, mudando o tratamento que será empregado. E dois professores disseram que ambas lidam com características da função de primeiro grau. O conceito de função vai bem além do pensamento matemático presente no antigo Egito, mas quando vemos que o problema pode ser representado como uma equação do primeiro grau, podemos admitir que tem caraterísticas de uma função polinomial do primeiro grau.

Por fim, quando perguntamos sobre a prática desses professores, queremos observar a variedade de representação abordadas por eles em sala de aula. Entendemos que cada uma das 3 representações presentes nas opções ressalta uma característica, e a sua escolha pode ser motivado por isso.

Questão 4
Quando você aborda o tema reta nas aulas envolvendo álgebra, qual tipo de equação você apresenta? • y=ax+b • ax+by=c • Equação Paramétrica • Indiferente

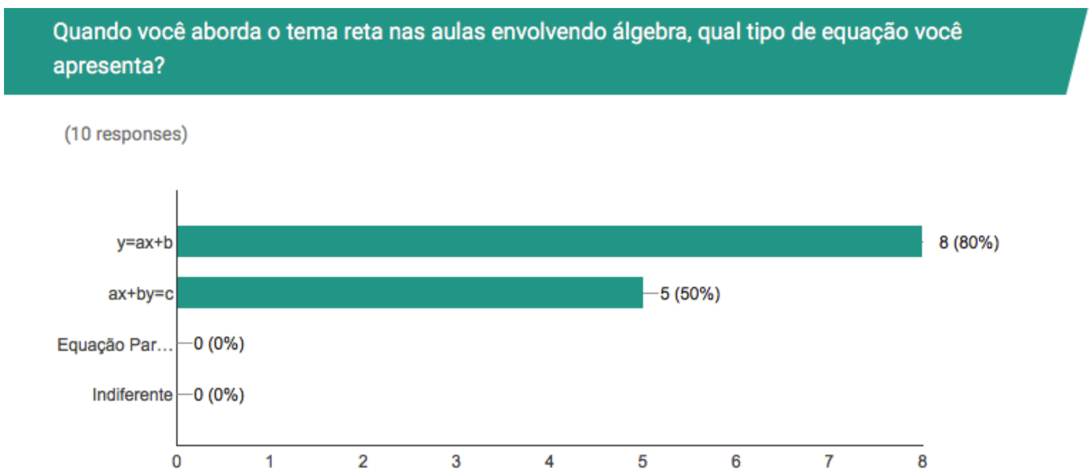


Figura 12: Comparativo das resposta para questão 4 do questionário

Nenhum se disse indiferente, o que pode mostra que entendem a diferença da escolha de uma representação pela outra pode fazer na aula. A opção de Equação Paramétrica também não foi escolhida, ela apresenta mais um conceito vetorial. Os que escolheram a primeira demonstram a tendência de estar mais preocupado com a relação entre x e y, já a segunda está mais associada a figura geométrica formada no plano cartesiano, a reta. Demonstrando um preocupação futura com a mudança de registro.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tivemos como objetivo verificar a relação entre o contato com a História da álgebra e o saber algébrico. Levando em consideração que para ensinar álgebra deve-se saber álgebra, isso melhoraria a formação docente. Relacionamos, então, os registros de representação semiótica que diz que para dominarmos um conteúdo devemos conseguir usar diferentes representações com a teoria de visualização e simbolismo que ilustra como alternamos entre os tipos de representações. Vimos como a construção do pensamento algébrico se deu ao longo da história, e a variedade de representações que aparecem. Verificamos também que o professor não se encontra preparado nas aulas de álgebra.

Observamos que esse professor tem uma deficiência no saber algébrico, mostrando uma limitação da sua visualização de problemas e como representá-los. Através da pesquisa histórica podemos notar que ao longo da história surgiram vários registros de representação, que foram sendo usados ao longo da história, e que a álgebra nem sempre teve esse formato que vemos hoje. E, segundo Duval (2010), a variedade de registros conhecida esta diretamente ligada ao aprendizado, culminando na habilidade de ensinar álgebra desse professor.

Aprendemos com esse trabalho que a variedade de registros é importante no processo de aprendizagem, e como alternamos entre vários tipos de registros, e consequentemente tipos de pensamento no processo de fazer matemática. Vimos ainda como se deu o processo de construção do pensamento algébrico ao longo da história, e a variedade de representações abordadas, mesmo em um único problema que foi aparecendo em vários momentos da história, tomando uma cara diferente.

Uma possibilidade de pesquisas futuras seria verificar o impacto em sala de aula e mudança de postura do professor após ter contato com o processo histórico. O trabalho contribui nos estudos de História da Matemática, mais especificamente álgebra e, também, no que diz respeito a Teoria de Registros de representação semiótica.

Esperamos que este trabalho tenha contribuído para destacar a importância da história da Matemática na formação matemática do professor. Além disso, esperamos que professores, futuros e atuantes, possam se inspirar de modo que se dediquem, cada vez mais, aos estudos históricos.

6. REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Parecer nº 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Liceniatura. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil,** Brasília, DF, n. 42. 5 mar. 2002. Seção 1. p. 15.

DESCARTES, Renee. **The Geometry of René Descartes:** with a Facsimile of the First Edition. 54. ed. Mineola, Ny: Courier Corporation, 2012. 244 p. (Dover Books on Mathematics).

DUVAL, Raymond; MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registro de representação semiótica. 7. ed. Campinas: Papirus, 2010. 160 p.

DUVAL, Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993

FERREIRA, Magno Luiz. **ÁLGEBRA: COMO AS CRENÇAS DOS PROFESSORES INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS.** 2009. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

FIBONACCI, Leonardo; SIGLER, Laurence E.. **Fibonacci's Liber Abaci.** New York: Springer, 2002. 672 p.

KATZ, Victor J.. STAGES IN THE HISTORY OF ALGEBRA WITH IMPLICATIONS FOR TEACHING. **Educational Studies In Mathematics: An International Journal.** Netherlands, p. 185-201. out. 2007.

KATZ, Victor J.. **A History of MATHEMATICS An Introduction:** an introdution. 3. ed. Chicago, Illinois: Pearson, 2009. 977p.

MELO, José Ronaldo. Da Aritmética a Gênese do Pensamento Algébrico em Diofanto. **Elementos,** Rio Branco, Ac, v. 3, n. 2, 2013.

RAMOS, Maria Dalila Correia Pedrosa. **Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat.** 2013. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat, Departamento de Matemática, Universiade do Porto, Porto, 2013.

RODRIGUES, Horácio Wanderlei; SERRATINE GRUBBA, Leilane. **Bachelard e os Obstáculos Epistemológicos à Pesquisa Científica do Direito**. **Seqüência: Estudos Jurídicos e Políticos**, Florianópolis, p. 307-334, jul. 2012. ISSN 2177-7055. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/sequencia/article/view/22660>. Acesso em: 15 jan. 2016.

SANTOS, Leandra Gonçalves dos. INTRODUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., 2010, Salvador, Ba. **Comunicação Científica.** Salvador: Sbem, 2010. p. 1 - 11.

SERFATI, Michel. **Symbolic revolution, scientific revolution: mathematical and philosophical aspects**. *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics*, 2010. p. 103 - 122.

TALL, David. A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics. In: PROCEEDINGS OF THE 46TH CONFERENCE OF CIEAEM, 1., 1994, Toulouse, France. **Plenary Presentation.** Toulouse, France: University Od Warwick, 1994. p. 15 - 27.