INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO
Campus Volta Redonda

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Curso de Licenciatura em Matemática

Frações: suas várias acepções e a proposta de Wu

Amanda da Costa Albuini

Volta Redonda
2017

Amanda da Costa Albuini

Frações: suas várias acepções e a proposta de Wu

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente de Matemática como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Orientadora: Roberta Fonseca dos Prazeres

Volta Redonda - RJ

2017

A345f Albuini, Amanda da Costa.
Frações: suas várias acepções e a proposta de Wu/ Amanda da Costa Albuini, 2017.
70f. : il. color.

Orientador: Prof.ª Ms Roberta Fonseca dos Prazeres

Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal do Rio de Janeiro. Licenciatura em Matemática, Volta Redonda, 2017.

1. Fração. 2. Wu. 3. Reta Numérica. I. Instituto Federal do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda. II. Prazeres, Roberta Fonseca dos III. Título.

CDU:51:37

Amanda da Costa Albuini

Frações: suas várias acepções e a proposta de Wu

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente de Matemática como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Volta Redonda, julho de 2017.

Roberta Fonseca dos Prazeres.

Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
(orientadora)
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Tiago Soares dos Reis

Dr. Tiago Soares dos Reis
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Cardoso

Ma. Giovana da Silva Cardoso
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Me. José Ricardo Ferreira de Almeida
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Volta Redonda - RJ
2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado na caminhada até aqui.

Aos meus familiares por me incentivarem e acreditarem em mim.

Agradeço a minha querida orientadora, não apenas por mim, mas por seu total compromisso, responsabilidade e dedicação para com todos e para com a sua profissão.

Aos professores Tiago Soares dos Reis, Giovana da Silva Cardoso e José Ricardo Ferreira de Almeida que aceitaram compor a banca de avaliação deste trabalho.

Resumo

Grande parte dos alunos apresentam dificuldades ao resolverem questões que envolvam frações. Um desses obstáculos advém do fato de que esse conceito está associado a diversos significados. Uma fração pode indicar um número racional, uma medida, uma razão ou pode representar uma parte de um todo, por exemplo. Há inúmeras pesquisas que versam sobre o assunto, mas os problemas ainda são recorrentes. A falta de entendimento de alguns professores sobre o conteúdo é um deles. Isso acarreta, muitas vezes, o detrimento de alguns significados de fração em relação a outros. A partir de pesquisa bibliográfica, o objetivo deste trabalho, além de abordar os diferentes sentidos de fração, é expor uma proposta para o seu ensino apresentada pelo professor Hung-Hsi Wu, da Universidade da Califórnia. A proposta desse professor é introduzir o conceito de frações com o auxílio da reta numérica. Dessa forma, ele pretende que os alunos sejam capazes de fazer a passagem dos números inteiros para os racionais de maneira mais clara e definitiva englobando, durante o processo, todas as acepções do termo fração.

Palavras-chave: Fração; Wu; Reta Numérica.

Abstract

A great number of students have difficulties at solving questions with fractions. One of these obstaclesis referent to the fact that this concept is associated with several meanings. A fraction may indicate a rational number, a measure, a ratio, or may represent a part of a whole, for example. There are numerous researches that deal with the subject, but the problems are still recurrent. The lack of understanding of some teachers about this content is one of them. This often entails the detriment of some meanings of fraction in relation to others. From a bibliographical research, the objective of this work, besides addressing the different senses of fraction, is to present a proposal for its teaching presented by the professor Hung-Hsi Wu, of the University of California. The proposal of this professor is to introduce the concept of fractions with the help of the number line. In this way, he intends that the students be able to make the transition from whole numbers to rational numbers in a clearer and more definitive way, encompassing all the meanings of the term fraction.

Keywords: Fraction; Wu; number line.

Sumário

Introdução

A importância de se estudar as frações não se restringe aos alunos que pretendem fazer um curso de matemática. As frações são utilizadas nas mais diversas áreas. Seja no trabalho de uma enfermeira, por exemplo, quando precisa saber a dose de determinada medicação; no trabalho de um cozinheiro ou de uma dona de casa, quando sua receita diz que é necessária a quantia de $\frac{3}{4}$ de um copo de farinha para fazer uma determinada sobremesa, ou no trabalho de físicos, biólogos, economistas, sociólogos, engenheiros, etc. Devido a sua grande utilização e às dificuldades relacionadas a sua compreensão, tem crescido nos últimos anos o número de pesquisas que discutem questões referentes ao ensino desse conteúdo (LORTIE-FORGUES; TIAN; SIEGLER, 2015).

Alguns problemas referentes a essas complexidades estão ligados ao fato de que, por exemplo, muitas vezes os alunos utilizam as propriedades relativas ao conjunto dos números naturais para resolver atividades com frações. Isso mostra que eles não possuem uma apreensão das características e diferenças entre esses conjuntos. De fato,

> Com as frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às frações sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Ao se pesquisar sobre as frações pode-se perceber que essa questão não é recente, pois existem muitas pesquisas sobre as complexidades relacionadas a esse conceito. Um dos problemas é a existência, nos livros didáticos, de exercícios que envolvem uma realidade distorcida. A questão remete à contextualização do conteúdo matemático ensinado ao aluno, através da busca de conexões com a realidade. Tal fato se relaciona ainda à dificuldade em se encontrar tal conexão, que acarreta ainda mais obstáculos ao ensino de frações.

Entre os obstáculos que envolvem a aprendizagem desse conceito pode-se citar também a dificuldade na compreensão dos diferentes significados que a fração pode assumir, os princípios de equivalência de frações, sua associação com outros conceitos matemáticos e as diferentes representações que um número racional pode assumir.

O objetivo deste trabalho é expor que esses problemas, de fato, tem razão de existirem. Isso será feito por meio da enumeração dos diversos significados que a fração pode assumir e da exposição de pesquisas que mostram que o conhecimento do professor sobre o assunto também é defasado.

Além disso, apresenta-se uma proposta de ensino de frações feita pelo professor Wu, que se baseia em uma exposição clara e objetiva do objeto em questão. O trabalho de Wu aqui apresentado visa a responder uma questão que norteou essa pesquisa, que é de como a fração pode ser ensinada de maneira a contemplar seus vários significados, ajudando o aluno na compreensão desse conteúdo.

O presente trabalho foi feito através de uma pesquisa bibliográfica. Foram utilizados artigos, dissertações e teses já elaboradas sobre o tema frações. Como dito anteriormente, a quantidade de estudos sobre o assunto é grande, sendo a parte mais difícil fazer uma seleção dos materiais a serem utilizados.

Um dos benefícios da pesquisa bibliográfica é o de possibilitar uma investigação de fenômenos de uma forma mais ampla do que poderia ser feita diretamente. Essa vantagem se mostra relevante quando, por exemplo, o problema de pesquisa necessita de dados dispersos (Gil, 2002). No caso do presente trabalho, que expõe resultados de pesquisas realizadas em diversas partes do mundo, esse benefício é de extrema relevância.

No entanto, pesquisas bibliográficas requerem cautela. Isso pois fontes secundárias podem comprometer os dados. Por isso, é essencial a análise das informações citadas, visando a redução de erros de informações, que podem prejudicar o teor da pesquisa (GIL, 2002).

O presente trabalho é dividido em quatro capítulos. O primeiro deles aborda os diferentes significados de frações e números racionais que, por sua vez, são os principais responsáveis pelos obstáculos encontrados na aprendizagem dos alunos. Tal assunto é tratado no capítulo dois.

No terceiro capítulo será abordado o conhecimento do professor, que muitas vezes não está preparado para lidar com os problemas derivados do ensino desse tópico. No último capítulo será exposta a proposta de ensino de frações feitas por Wu, que se vale de definições e da representação da fração na reta numérica visando melhorar seu ensino.

1 Diferentes acepções do termo *fração*

No presente capítulo objetiva-se enumerar os diferentes significados relacionados ao conceito de fração. Tal estudo começou a ser desenvolvido em 1976, com os trabalhos de Kieren, sendo aprimorado posteriormente por diversos pesquisadores, como Behr, Nunes e Bryant.

A exemplo de Nunes, Bryant e Watson (2009), as expressões *número racional* e *fração* serão utilizadas, ao longo do trabalho, de maneira indistinta. Além disso, as expressões serão empregadas tal qual são apresentadas nas pesquisas dos autores citados.

Os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem das frações são complexos, apesar de muitos professores pensarem que esse conhecimento já está consolidado na mente dos estudantes (Alves; Martens, 2011). Além disso,

> A maioria dos professores e autores de materiais didáticos desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva. O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico (LOPES, 2008, p. 21).

Os alunos, portanto, são conduzidos a procedimentos mecânicos para manipulação das frações, não entendendo os diferentes significados relacionados a ela ou, como, será visto a seguir, seus subconstrutos.

1.1 Números racionais e suas interpretações

Os números racionais, assim como os números naturais, são utilizados para expressarem quantidades. Os números naturais, no entanto, não podem ser empregados quando as quantidades são menores que a unidade ou quando envolvem relações entre duas outras quantidades. Daí entra a necessidade do conjunto dos números racionais.

Entre os educadores matemáticos parece haver o entendimento de que foram os estudos de Kieren (1976) que introduziram uma discussão, que ainda hoje é comum, em torno dos diferentes significados do número racional.

Segundo Kieren (1976) para um amplo entendimento sobre o conceito de número racional, deve-se ter experiências com suas muitas interpretações. No entanto, grande parte dos materiais escolares simplesmente tratavam os números racionais apenas como uma ferramenta de cálculo. Assim, muitas dessas interpretações não chegavam (e ainda não chegam) aos estudantes.

Kieren (1976) enumera sete interpretações para os números racionais:

- são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas, divididas;
- são classes de equivalência de frações. Então $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\}$ são números racionais;
- são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- são números da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$;
- são operadores multiplicativos;
- são elementos de um corpo ordenado e infinito, isto é, há números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$;
- são medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Kieren (1976) ressalta que essas interpretações não são independentes. Além disso, afirma que esses sentidos devem ser isomórficos, sendo definidas apropriadas operações e relações. No entanto, cada uma dessas interpretações permite que os números racionais sejam analisados em diferentes perspectivas.

Por meio das primeiras interpretações de Kieren (1976), enumeradas acima, é possível que se tenha uma percepção da variedade de significados das frações e da complexidade das mesmas. Tal fato pode justificar os obstáculos que professores e alunos enfrentam no processo de seu ensino e compreensão.

Durante muito tempo essas interpretações foram utilizadas como principal sustentação teórica para a maioria dos trabalhos sobre o ensino e aprendizagem de frações. Em artigos posteriores Kieren (1980, 1988) altera sua classificação original, visto que, depois de algumas análises, verificou que as interpretações anteriormente sugeridas de fato eram isomórficas. O autor passou então a dar mais ênfase às estruturas cognitivas.

Em 1980, Kieren começou a utilizar o termo *subconstrutos* ao invés de interpretações. Para essa mudança, ele toma como embasamento o exposto pelo filósofo Morgenau (1961), que chamava de *construtos teóricos* os objetos mentais que podem ser construídos a partir de ideias mais simples e que se complementam.

> O termo conceito matemático é usado de muitas formas. Ele pode se referir a um objeto ou a uma classe de objetos matemáticos. Mais frequentemente em matemática, um conceito é associado com um declaração de definição formal. Então, um número racional é "qualquer número x que satisfaz $ax = b$, onde a e b são inteiros ($b \neq 0$)."Ainda assim tal definição não diz muito sobre a noção de números racionais, particularmente quanto existe como conhecimento pessoal. O "conhecimento"de números racionais pode significar um grande número de coisas (KIEREN, 1980, p. 125, grifo do autor, tradução nossa).

Morgenau (1961) compreendeu o procedimento de construção de conceito como o estabelecimento de relações entre percepção e compreensão de um objeto mental (construto), que implica no surgimento de atos físicos ou mentais envolvidos nessa gênese. Em 1988, após mais estudos, Kieren revê suas ideias para os numerosos significados dos racionais e propões os seguintes subconstrutos:

- quociente
- medida
- operador
- razão

Dentre os subconstrutos acima não consta o significado de parte-todo, uma vez que o autor entende que o mesmo está incluído nos demais. Por isso, ele não o considera separadamente. Posteriormente Behr et al. (1983), apoiando-se nos estudos de Kieren (1976, 1980), redefinem os subconstrutos apontados pelo mesmo, mostrando um esquema que englobava algumas categorias e subdivisões delas. Os subconstrutos estão enumerados a seguir.

- medida fracionária: relacionado ao subconstruto parte-todo, indica a questão "quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade";
- razão: relação expressa entre duas quantidades de uma mesma grandeza;
- taxa: define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. O que diferencia taxa e razão é o fato de que as taxas podem ser adicionadas ou subtraídas;
- quociente: representa uma divisão $a \div b$, na forma $\frac{a}{b}$, ou seja, a dividido por b, quando inserido num determinado contexto envolvendo duas grandezas;
- coordenadas lineares: interpretam o número racional como um ponto da reta numérica;
- decimal: enfatiza as propriedades do sistema de numeração;
- operador: vê a fração como uma transformação.

Segundo Behr et al. (1983):

> Os conceitos de números racionais estão entre as mais complexas e importantes ideias matemáticas que as crianças encontram durante os anos da escola pré-secundária. A sua importância pode ser vista a partir de uma variedade de perspectivas: (a) de uma perspectiva prática, a capacidade de lidar efetivamente com esses conceitos melhora amplamente a habilidade de entender e lidar com situações e problemas no mundo real; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais fornecem uma arena rica dentro da qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual contínuo; e (c) de uma perspectiva matemática, os entendimentos sobre número racional fornecem o alicerce sobre o qual operações algébricas elementares podem ser baseadas posteriormente (BEHR et al, 1983, p. 91, tradução nossa).

Ou seja, a importância de um entendimento sobre o conceito de frações traz muitas implicações, inclusive no desenvolvimento da capacidade de abstração do aluno. Essa habilidade é fundamental visto que é exigida no estudo de estruturas algébricas.

1.2 Frações: classificações mais recentes

A partir da seção anterior foi possível a verificação de que o conceito de fração está relacionado a várias acepções. Tal fato está associado a um dos principais problemas em relação a seu ensino.

Vários autores procuraram enumerar possíveis interpretações para as frações. Apesar dessa variedade de situações em que os números racionais são utilizados, verifica-se que os critérios para essas classificações muitas vezes não são claros (NUNES et al., 2009).

Após estudos sobre os trabalhos de Vergnaud (1982) em Teoria dos Campos Conceituais (que procura comprender de que maneira a construção dos conhecimentos matemáticos é realizada) e sobre as pesquisas de Nunes et al. (2004), Silva (2007) explicita, em sua tese, cinco significados para a representação fracionária do número racional.

Significado parte-todo

Um dos significados encontrados em todos os estudos aqui apresentados é o denominado parte-todo. Pesquisas como as de Behr et al. (1983) e de Kieren (1988) indicam o significado parte-todo como de fundamental importância para o entendimento de interpretações mais complexas. Essa relação geralmente é apresentada para os alunos em sua forma fracionária $\frac{m}{n}$, onde m é o numerador e n é o denominador.

Em Vasconcelos (2007), o todo é dividido em partes de igual tamanho, ou seja, é a partição de um dado objeto em n partes, sendo que cada parte é representada por $\frac{1}{n}$. Logo, enquanto o denominador representa o número de partes pelo qual o todo foi dividido, o numerador representa o número de partes tomadas. Considere como exemplo a fração $\frac{1}{2}$. Esta pode ser entendida como um todo dividido em duas partes iguais, das quais se tomou uma parte.

De acordo com Silva (2005), a concepção parte-todo surge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, por exemplo, um pedaço de corda) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos, por exemplo, um determinado número de balas) em partes iguais em quantidade de objetos.

É relevante o fato de que este conceito é o mais explorado pelos docentes, o que acaba restringindo o estudo de fração. Tal afirmação está ratificada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), visto que "A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais (BRASIL, 1997, p. 68)".

Segundo Merlini (2005), esta é uma das interpretações de fração mais presentes nos livros didáticos. Por isso, esse é o conceito do que seja uma fração para grande parte dos professores e, por conseguinte, para a maioria dos alunos.

Para Vasconcelos (2007), o conceito parte-todo é apresentado para os alunos por meio de situações tradicionais de divisão de figuras geométricas tais como quadrados, retângulos e círculos. Ainda de acordo com a autora, tal situação faz que muitas dúvidas sejam geradas.

Wheeldon (2008) aponta que os alunos facilmente confundem a relação parte-todo com a parte-parte. Por exemplo, quando um docente apresenta aos alunos uma figura que representa $\frac{2}{5}$ de uma unidade e pede aos mesmos que representem, por meio de fração, a parte sombreada da figura, eles apresentam como resposta $\frac{2}{3}$. Os alunos, no caso descrito, fazem uma relação parte-parte, parte sombreada sobre parte não sombreada.

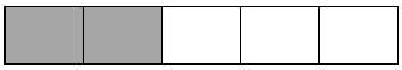


Figura 1 – Representação da fração $\frac{2}{5}$
Fonte: Ilustração própria

Outra possível dificuldade está relacionada às frações ditas impróprias. Ou seja, quando é preciso representar uma fração onde o numerador é maior que o denominador. Por exemplo, a fração $\frac{7}{6}$, que representa a parte sombreada na Fig. 2, é facilmente confundida como $\frac{7}{12}$.

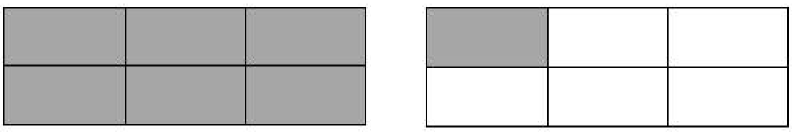


Figura 2 – Representação da fração $\frac{7}{6}$
Fonte: Ilustração própria

Estudos mostram que o significado parte-todo não é suficiente para a ampliação do conjunto numérico dos naturais e sugerem que uma abordagem envolvendo outro significado será mais satisfatória. Kieren (1988), por exemplo, discute que o trabalho com o modelo parte-todo induz ao processo de dupla contagem, não propiciando a introdução da criança no campo dos quocientes.

De forma análoga, Nunes e Bryant (1997) afirma que se o trabalho for feito somente considerando o significado parte-todo, ficará prejudicado o entendimento de que o conjunto dos racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais. Ou seja, para perceber essa extensão, o aluno precisaria vivenciar situações em que a ideia da divisão fosse ampliada.

Significado quociente

Este é outro significado presente nos estudos aqui apresentados. Nesta perspectiva, a fração é vista como o resultado da divisão entre dois números. Por exemplo, se é realizada a divisão de quatro chocolates igualmente entre cinco crianças, com que fração de chocolate cada criança ficará?

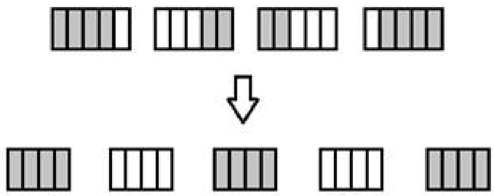


Figura 3 – Divisão de 4 chocolates para 5 crianças
Fonte: Ilustração própria

Cada uma receberá $\frac{4}{5}$ do chocolate, ou seja, $4 \div 5$.

A concepção quociente é percebida quando determinado número de objetos precisa ser distribuído, repartido ou dividido igualmente num certo número de grupos. Para Silva (2005), esta interpretação está relacionada à associação de distribuição de grandezas onde $\frac{a}{b}$, que representa o resultado de uma distribuição, significa que a foi distribuído em b partes. Ou seja, a foi dividido em um número b de partes iguais. Assim, $a \div b = \frac{a}{b}$, cujo fracionário é um quociente.

De acordo com Merlini (2005), Vasconcelos e Belfort (2006), essa concepção não é apresentada em muitos livros didáticos. Por isso, também é pouco trabalhada nas escolas. Segundo Ventura (2013), a noção de equivalência é necessária para a compreensão desse significado. Os alunos devem entender que as frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$ representam a mesma quantidade. Isso pois, quando vistas como uma divisão, o quociente de ambas, $0,5$, é o mesmo.

As acepções de parte-todo e quociente são distintas devido ao fato de que dividir uma unidade em 5 partes e tomar 3 dessas partes não é a mesma coisa que dividir 3 unidades em 5 partes iguais. Porém, para os dois casos, a representação é feita com o mesmo número, $\frac{3}{5}$.

Ventura (2013) explica que:

> Segundo Santos (2005) este significado extrapola as ideias presentes no significado parte-todo, uma vez que aqui existem duas variáveis (o que se vai dividir e o número pelo qual se vai dividir, por exemplo, pizzas e pessoas). Na situação de quociente, a fração corresponde à divisão (quatro pizzas para 12 pessoas), mas também ao resultado da mesma (cada pessoa vai receber $\frac{1}{3}$) de pizza). Isto é, existem dois tipos de quantidades, as contínuas (Foram divididas igualmente para quatro crianças, três pizzas. Cada criança recebe uma pizza inteira? Que fração de pizza receberá cada criança?) e as discretas (Tenho uma caixa com 30 bolachas que vou dividir igualmente por cinco crianças. Quantas bolachas cada criança receberá? Que fração representa essa quantidade?). De acordo com Lamon (2006) quando as frações surgem como operadores associados a quantidades discretas e o resultado é um número inteiro, pode levar ao aparecimento de conflitos conceituais (VENTURA, 2013, p. 44).

Portanto, esse significado deve ser trabalhado com cuidado, pois está relacionado a muitos problemas de compreensão por parte dos alunos.

Significado medida

Mais um significado dado à fração se refere à comparação de grandezas, ou medida. Há autores que utilizam outras nomenclaturas como, por exemplo, razão, probabilidade, taxa, quantidades intensivas ou mesmo medidas (Silva, 2007). Nos PCNs, o termo usado é razão, cuja situação relacionada é "aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza"(BRASIL, p. 68).

Dessa forma, a presente interpretação é distinta da acepção de quociente. Isso pois "a medida é representada por uma fração que indica um índice comparativo, o quociente envolve a ideia de partilha"(SILVA, 2008, p. 97).

Significado operador

Os PCNs sugerem que os três primeiros significados, a saber, parte-todo, quociente e medida, sejam abordados nos primeiros anos do ensino fundamental. Além disso, que o significado operador deva ser estudado nas séries finais da mesma modalidade. No entanto, pesquisas recentes indicam que muitos livros didáticos retratam situações que envolvem o significado operador multiplicativo para números racionais representados na forma fracionária, apesar de tal conteúdo não estar indicado nos currículos (SILVA, 2008).

Santos (2005) indica que professores das séries finais do ensino fundamental dão grande destaque a esse significado, devido, por exemplo, ao fato de que eles foram ensinados dessa forma. Segundo Kieren (1988), caso o ensino enfatize regras operacionais,"as crianças entendem a forma, mas não a substância do sistema. Isto deve resultar em realizações temporárias com fragmentos de conhecimento, mas, não em duração, utilidade, e poder de conhecimento pessoal" (Kieren, 1988, p. 177). Logo, esta é também uma importante interpretação a ser discutida.

Significado ponto na reta numérica

A proposta deste significado, segundo Silva (2007), foi apresentada por Behr et al. (1983). Por meio dessa interpretação, um número racional pode ser visto como um ponto da reta numérica. Ainda de acordo com Silva (2007), tal significado não é uma unanimidade entre os pesquisadores.

Porém essa acepção é citada aqui visto que, no presente trabalho, será apresentada a proposta do professor Wu, baseada justamente nessa interpretação. Todavia, há pesquisas, como as de Llinares e Sánchez (1996) e Canova (2006), que mostram que alguns professores não sabem localizar um número racional na reta numérica.

Exemplo:

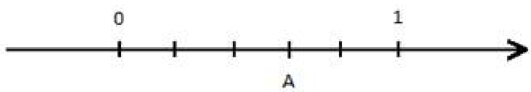


Figura 4 – Representação da fração $\frac{3}{5}$ na reta numérica
Fonte: Ilustração própria

O segmento compreendido entre os pontos 0 e 1 foi dividido em cinco partes iguais. O ponto A, portanto, representa nesta reta a fração $\frac{3}{5}$.

Como a maioria das ideias para representação de uma fração, esta é trabalhada como algo novo, desassociado da ideia de fração como parte de uma unidade. Porém, possíveis junções são assinaladas por alguns autores:

> A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova ideia, pois também se trata da divisão de uma unidade em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar o ponto na reta. (Vasconcelos; Belfort, 2006, p. 47)

Siegler et al. (2010), indicam algumas possibilidades para o avanço do ensino de frações. Uma delas seria colaborar para que os alunos entendam as frações como números e consigam obter frações expandindo, a partir dos números inteiros, o sistema numérico. Indicam ainda que as retas numéricas sejam utilizadas como uma ferramenta principal de representação para ensinar não só este, mas também outros conceitos de fração. De acordo com a recomendação 2:

> Ajudar os alunos a reconhecerem que as frações são números e que eles expandem o sistema de números além dos números inteiros. Use linhas numéricas como uma ferramenta de representação central no ensino desse e de outros conceitos de fração desde as primeiras séries.
>
> • Use atividades de medição e retas numéricas para ajudar os alunos a entenderem que as frações são números, com todas as propriedades que os números compartilham.
>
> • Fornecer oportunidades para que os alunos localizem e comparem as frações nas linhas numéricas.
>
> • Use linhas numéricas para melhorar a compreensão dos alunos sobre frações equivalentes, densidade de fração (o conceito de que há um número infinito de frações entre quaisquer duas frações) e frações negativas.
>
> • Ajudar os alunos a entender que as frações podem ser representadas como frações comuns, decimais e porcentagens, e desenvolver a capacidade dos estudantes de transitarem entre essas formas (SIEGLER et al., 2010, p. 1, tradução nossa).

A utilização da reta numérica também é defendida em outros trabalhos:

> Uma maneira eficaz de garantir que os alunos compreendam que as frações são números com magnitudes é a utilização de retas numéricas durante a aula. Todas as frações podem ser representadas nas retas numéricas e estas ilustram que cada fração corresponde a uma determinada magnitude. (Fazio; Siegler, 2011, p.10)

Fazio e Siegler (2011) acreditam no auxílio que o uso da reta numérica traz à compreensão de questões tais como comparação de frações e equivalência. Essa acepção será amplamente empregada nos trabalhos de Wu, como será visto no capítulo 4.

Com este capítulo foi possível ratificar a complexidade envolvida com o conceito de fração. Apesar de parecer um conteúdo fácil a ser ensinado e compreendido, a existência de diferentes acepções é um fator que dificulta sua apreensão, fato esse que será discutido no próximo capítulo.

2 Dificuldades no entendimento de frações

A partir do primeiro capítulo, infere-se que as frações apresentam diversos significados. Tal fato é um dos grandes motivos para as dificuldades relacionadas à apreensão desse conteúdo nas escolas, e esses problemas serão abordados neste capítulo.

Um importante indicador desse problema são os dados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)[1], que avalia as taxas de aprovação e de reprovação dos alunos dos ensinos fundamental e médio, além do desempenho dos mesmos em português e matemática.

Os últimos resultados, divulgados em 2015, mostram que os alunos do 9º ano do ensino fundamental não apresentam conhecimento básico sobre o conceito de frações. Segundo resultado do Ideb, a dificuldade com frações é tão grande que a resposta mais frequente para a questão presente na Fig. 5 é de 34%, ou seja, os alunos simplesmente juntam os números 3 e 4.

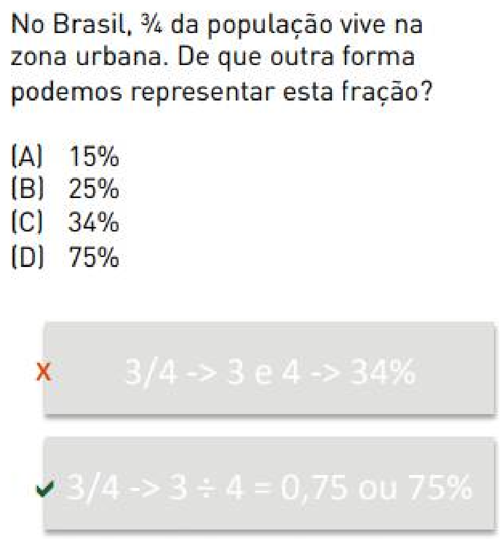


Figura 5 – Questão avaliada na Prova Brasil
Fonte: Fundação Lemann (2016).

[1] O Ideb foi criado no ano 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), visando a medição da qualidade do aprendizado nacional. Para isso, utiliza os resultados da Prova Brasil e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que ocorrem a cada dois anos (BRASIL, 2017a).

Segundo dados do último PISA[2], realizado em 2015, 87,43 % dos alunos brasileiros de 15 anos não estão aptos a lidarem com frações e números decimais (Fig. 6)[3].

Nível	Escore mínimo	Percentual de estudantes no nível	Características das tarefas
6	669	OCDE: 2,31% Brasil: 0,13%	No nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de situações-problema complexas e de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações e transitar entre elas com flexibilidade. Os estudantes situados nesse nível utilizam pensamento e raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias e, assim, enfrentar novas situações. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequá-las às situações originais.
5	607	OCDE: 8,37% Brasil: 0,77%	No nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Os estudantes situados nesse nível conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando habilidades de pensamento e raciocínio abrangentes e bem desenvolvidas, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e a formular e comunicar suas interpretações e seu raciocínio.
4	545	OCDE: 18,60% Brasil: 3,09%	No nível 4, os estudantes conseguem trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e integrar diferentes representações, inclusive simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Os estudantes situados nesse nível conseguem utilizar suas habilidades pouco variadas e raciocinar com alguma perspicácia, em contextos diretos. São capazes de construir e comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	482	OCDE: 24,81% Brasil: 8,58%	No nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servir de base para construir um modelo simples ou para selecionar e aplicar estratégias simples de resolução de problemas. Os estudantes situados nesse nível conseguem interpretar e utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram capacidade de lidar com porcentagens, frações e números decimais e de trabalhar com relações de proporção. Suas soluções indicam que estão envolvidos em interpretações e raciocínios básicos.
2	420	OCDE:22,55% Brasil: 17,18%	No nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que uma inferência direta. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um modo simples de representação. Os estudantes situados nesse nível conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais dos resultados.
1	358	OCDE: 14,89% Brasil: 26,51%	No nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões definidas com clareza, que envolvem contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros de acordo com instruções diretas em situações claras. Conseguem executar ações óbvias e de acompanhar de forma imediata os estímulos dados.
Abaixo de 1		OCDE: 8,47% Brasil: 43,74%	A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: OCDE, INEP.

Figura 6 – Nível de proficiência dos estudantes em matemática
Fonte: Adaptada de Brasil (2016, pp. 151-152).

Portanto é possível verificar, com os resultados do PISA e do Ideb, que os estudantes brasileiros tem um conhecimento muito baixo sobre o conceito de frações. Eles são limitados a, basicamente, resolverem problemas com números inteiros. A seguir, será visto como os

[2] O PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), avalia o conhecimento de alunos com 15 anos, verificando se esses possuem as habilidades necessárias à participação nas sociedades modernas. No ano de 2015, o PISA foi realizado em 72 países. Esse programa é considerado o mais importante avaliador educacional do mundo, ocorrendo a cada três anos.

[3] A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é uma organização internacional com 34 países membros e que tem como objetivo orientar os países em uma vasta área de assuntos, desde os assuntos relacionados com a saúde e educação como indicadores econômicos (MARIA, 2015).

PCNs e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tratam esse objeto.

2.1 As frações na BNCC e nos PCNs

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Brasil, 1996), em seu parágrafo 26 (cuja redação foi dada pela Lei nº 12.796, de 2013), traz a necessidade da criação de uma base nacional comum.

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996).

Por isso, o Ministério da Educação (MEC) vem elaborando, desde 2013, a BNCC. A terceira versão do documento (e última) foi entregue, em abril de 2017, ao Conselho Nacional de Educação (CNE), que será responsável pelos ajustes finais antes de sua homologação, que deve ser realizada até o final de 2017 (SEMIS, 2017).

O texto se refere ainda apenas à educação infantil e ensino fundamental, e as discussões sobre o ensino médio se encontram em processo. A BNCC será uma orientação para questões consideradas importantes no processo de ensino e aprendizagem de escolas públicas e privadas brasileiras.

Sobre os números racionais, a BNCC diz que:

> No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. [...] Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2017, pp. 224-225).

Sobre os anos finais do ensino fundamental, o texto da BNCC afirma que:

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica (BRASIL, 2017, p. 225).

Assim como a evolução histórica da noção de número e do desenvolvimento do conhecimento matemático, grande parte do ensino de matemática está relacionado, então, à ampliação dos conjuntos numéricos, como no texto explicitado na BNCC. A justificativa para que o ensino seja organizado e desenvolvido nesta perspectiva de extensão da noção de número e dos conjuntos numéricos é o surgimento de novos problemas e situações às quais não são possíveis de se resolver ou representar por meio da utilização dos conjuntos numéricos conhecidos até o momento.

De acordo com os PCNs, o objetivo da abordagem dos números racionais é provocar nos alunos o entendimento de que os números naturais são falhos ou, ainda, insuficientes para solucionar determinados problemas. Ainda, segundo as recomendações contidas no referido documento, a introdução a esse conceito deve ser feita a partir do segundo ciclo do ensino fundamental. Contudo, apesar do conjunto dos números racionais serem uma extensão do conjunto dos números naturais, a complexidade no estudo do primeiro é muito maior.

O estudo dos números se inicia pelo conjunto dos números naturais. Muitos pesquisadores da área de matemática, como Romanatto (1997), afirmam que grande parte das dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão dos números racionais, bem como nas operações e resoluções de algoritmos com esse tipo de número, estão ligadas ao fato do não entendimento de que em cada conjunto numérico as operações e a própria noção de número são diferentes do conjunto anterior.

Os alunos iniciam seu desenvolvimento na compreensão do sentido de número utilizando o processo de contagem, nos anos iniciais do ensino fundamental, e aos poucos conhecem o conjunto dos números naturais. Todos os números, com exceção do zero, possuem um antecessor e um sucessor nesse conjunto.

Para Feteira (2012), é no conjunto dos números racionais que ocorrem as primeiras experiências matemáticas dos alunos que não se baseiam no processo de contagem. Além disso, diferente dos naturais, que é um conjunto discreto, o conjunto dos números racionais é um conjunto denso[4], e não é possível estabelecer um antecessor ou um sucessor de um número racional, uma vez que entre dois números racionais encontram-se infinitos outros. Fatos como estes geram uma série de mudanças significativas no raciocínio e nas estratégias de cálculos realizados pelos alunos.

Os PCNs citam alguns dos vários obstáculos que os alunos tendem a enfrentar ao pensar sobre os números racionais como se fossem naturais:

> - cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;
> - a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
> - se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 41$), a comparação entre $2,3$ e $2,125$ já não obedece ao mesmo critério;
> - se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> - se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre $0,8$ e $0,9$ estão números como $0,81$, $0,815$ ou $0,87$. (BRASIL, 1998, p.101).

Bonotto (1992) afirma que se faz necessário levar em consideração o fato de que os alunos precisam de tempo para se habituar a essa nova forma de pensar, pois interromper com a lógica enfatizada na aprendizagem dos naturais não é tão fácil quanto se presume.

Segundo os PCNs:

> No entanto, em que pese às relações entre números naturais e racionais, a aprendizagem dos números racionais, supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada (BRASIL, 1997, p. 67).

[4] Em topologia, um subconjunto S de um espaço topológico X é dito denso em X se o fecho de S contém X. Equivalentemente, S é denso em X se qualquer vizinhança de qualquer ponto de X contiver um elemento de S. Ou seja, entre dois números racionais existem infinitos números racionais. Considere dois números racionais quaisquer, por exemplo, $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{5}$. Somando esses números e dividindo essa soma por dois, obtém-se um número entre eles. Com efeito: $\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, onde $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$. Agora, se forem tomados $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$ e repetindo o processo anterior, somando e dividindo por dois, obtém-se $\frac{1}{5} < \frac{3}{10} < \frac{2}{5}$. Considerando-se $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$, obtém-se $\frac{1}{4}$ onde $\frac{1}{5} < \frac{1}{10} < \frac{3}{10}$. Pode-se repetir o processo indefinidamente, e sempre será possível encontrar um número entre os dois escolhidos.

O que se deve levar em consideração é que a não compreensão das noções e das operações envolvendo os racionais pode ser prejudicial não apenas na matemática. Isso pois, de acordo com os PCNs, o ensino da matemática contribui de maneira decisiva no desenvolvimento intelectual, na formação do raciocínio lógico, na organização do pensamento, além de ser extensivo a outros campos científicos e de conhecimentos.

Se levarmos em consideração uma breve contextualização histórica, o desenvolvimento a cerca de números racionais em sua representação fracionária não surgiu de um dia para o outro. Segundo a história da matemática foram encontrados vários registros de sentidos, simbologias e significados ligados ao número racional e sua representação fracionária .

2.2 Dificuldades fora do Brasil

Também fora do Brasil, verifica-se preocupações dos pesquisadores em Educação Matemática sobre o assunto. Vários trabalhos sobre frações têm sido apresentados em quase todos os encontros relacionados à Educação Matemática. As dificuldades de compreensão desse conteúdo ainda se apresenta como um desafio.

Hart (1981) aplicou um teste a 10.000 estudantes da Grã-Bretanha, entre 12 a 15 anos, sobre o conceito de fração. A pesquisa mostrou que um dos motivos para as dificuldades com os números racionais representados em forma de fração é a passagem do campo dos números naturais para o campo dos racionais.

Existem vários outros grupos de pesquisadores voltados para esta área de interesse. Entre eles, Hannula (2003), que realizou uma pesquisa com 3067 alunos finlandeses, da quinta à sétima série, além de uma entrevista com 20 alunos. Ele examinou a compreensão de estudantes quanto às frações. Duas tarefas representaram a fração $\left(\frac{3}{4}\right)$ em dois contextos: como parte de uma barra de oito pedaços (contexto de área) e como uma localização na reta numérica.

> No caso de frações simples, muitos estudantes não puderam localizá-las corretamente na reta numérica. A principal dificuldade para os alunos foi determinar qual era o "todo"do qual calcular a fração. [...] Um dos entrevistados simplesmente se recusou a localizar 3/4 na reta numérica e ela estava ambivalente sobre se realmente era um número ou não. Vários outros não não puderam localizar a fração 3/4 dentro do intervalo correto entre zero e um. [...] A compreensão dos alunos sobre o conceito

> de números racionais se desenvolve consideravelmente a partir da 5ª até a 7ª série. No entanto, metade dos alunos ainda não são capazes de localizar uma simples fração até mesmo em seu lugar correto na reta numérica. O problema deles parece principalmente estar atrelado ao esquema parte-todo, embora sejam incapazes se identificar o todo corretamente (HANNULA, 2003, pp. 23-24, tradução nossa).

Logo, de acordo com Hannula (2003), devido ao dato de que o significado parte-todo domine fortemente o pensamento dos estudantes, esses apresentam dificuldade em perceber a fração como um número na reta numérica, mesmo na sétima série.

2.3 A predominância do modelo parte-todo

A predominância de determinados significados, ou ainda, interpretações, no ensino de frações com relação a outras tem sido debatido por diferentes autores. Para Vasconcelos e Belfort (2006), por exemplo:

> O ensino de frações limita-se, em geral, à aplicação de fórmulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso específico das frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas ideias particulares, sem realmente abranger uma variedade de ideias. (VASCONCELOS, BELFORT, 2006, p.90)

Mack (1990) aponta dificuldades na aprendizagem de números fracionários e desaprova o ensino desses números sobre a prática dos modelos tradicionais. Segundo a autora, esses modelos dão ênfase ao significado parte-todo, onde são utilizadas as representações figurais de pizza ou figuras geométricas.

Kerslake (1986) observa que uma ferramenta de auxílio para os alunos, tanto na procura de solução para problemas quanto para o entendimento de frações, seria a utilização de diagramas. No entanto, há o problema de que, se solicitado, o aluno naturalmente se utilize do desenho de um retângulo ou de um círculo para representar uma fração. Gomes (2010) identifica ainda que existe uma predominação, tanto por grande parte de livros quanto de professores, pela utilização do significado anteriormente mencionado.

Segundo Fazio e Siegler (2011), a interpretação parte-todo é importante, porém a mesma não é suficiente para que se possa entender que as frações são números com magnitudes. Talvez tal interpretação seja a melhor para um primeiro contato com o conceito formal de fração, por se tratar de um modelo palpável e que está presente na vida do estudante. No entanto, há várias outras interpretações possíveis. Essas poderiam ser exploradas para contribuir com a compreensão conceitual de frações e de suas operações.

Gomes (2010), verificou que o problema da ênfase de alguns significados de fração atinge também os professores do segundo segmento do ensino fundamental. Em sua pesquisa foi aplicado um questionário para 36 professores de matemática (18 da rede pública de ensino e 18 da rede particular) sobre os significados de fração. O autor verificou que 30 professores utilizavam o significado de fração como parte-todo, enquanto menos da metade utilizava o significado de fração como quociente (17 professores) e razão (apenas 5 professores).

Merlini (2005) afirma que a maneira como o conteúdo de frações é ensinado apresenta falhas. Esse fato é decorrente da priorização de determinados significados, o que dificulta a construção do conhecimento desse conceito por parte dos alunos.

2.4 Equivalência de frações

Um ponto importante para a compreensão da equivalência e da ordenação de frações é a comparação de quantidades. A equivalência e a ordenação são fundamentais tanto para a aprendizagem dos inteiros quanto dos racionais. Na comparação entre números inteiros, por exemplo, dois elementos e sete elementos, a percepção é suficiente, ou ainda, a contagem pode ser utilizada nos casos em que a percepção não for suficiente.

Por outro lado, a equivalência e a ordenação de frações são diferentes. Isso pois a ordenação envolve a ideia de "qual fração é maior", o que não é tão simples de se verificar ao se analisar os números racionais. Em relação à equivalência, no universo dos números inteiros, dois conjuntos são diferentes se representados por números diferentes, sendo iguais se representados pelo mesmo número. Para os racionais, no entanto, uma mesma quantidade pode ser representada de maneiras diferentes, por exemplo, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ e assim infinitamente.

Algumas pesquisas, como a de Kamii e Clark (1995), mostram que chamar um mesmo número de diferentes nomes e ignorar ou imaginar novas linhas em uma figura são manifestações de um pensamento flexível e demonstram habilidades na compreensão de equivalência de frações. Logo, é necessário compreender que frações que se referem à mesma quantidade podem ter nomes diferentes (um meio, dois quartos, três sextos, etc.) e ser representadas por símbolos diferentes ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, etc.).

Exemplos:

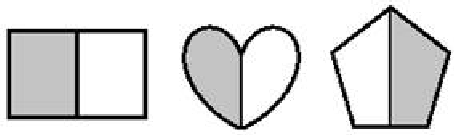


Figura 7 – Figuras diferentes indicam a mesma quantidade, mesma fração, mesmo todo.
Fonte: Elaborada pela autora.

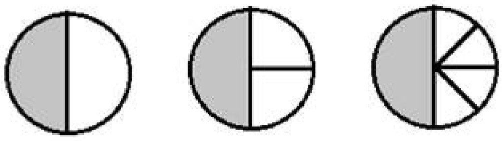


Figura 8 – Mesma quantidade, frações diferentes.
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 9 – Mesma fração de quantidades diferentes.
Fonte: Elaborada pela autora.

Para Kerslake (1986), a equivalência de frações é melhor compreendida pelos alunos quando as mesmas são representadas na forma geométrica. Contudo, os alunos não apresentam boa compreensão da aplicação de equivalência na adição de frações.

Ainda segundo a autora, os alunos compreendem melhor a equivalência entre duas ou mais frações quando são apresentadas como parte de uma unidade, porém não apresentam a mesma desenvoltura quando as frações são apresentadas de forma numérica.

3 O conhecimento do professor

No segundo capítulo, são apresentadas algumas dificuldades relacionadas ao conceito de frações. No presente capítulo, aborda-se que um outro fator deve ser considerado, que é o conhecimento dos docentes sobre o referido tema. Segundo os PCNs (Brasil, 1997), um dos obstáculos no ensino de matemática se refere à ausência de formação profissional qualificada.

De acordo com Fazio e Siegler (2011), tal formação é fundamental para uma melhoria na aprendizagem da Matemática e, em especial, para o ensino de frações.

> Os professores precisam ser capazes de explicar não apenas como resolver um problema, mas também porque o procedimento é apropriado porque abordagens defeituosas são inadequadas. Esse tipo de explicação requer um conhecimento profundo de cálculo de frações (FAZIO, SIEGLER, 2011, p.21, tradução nossa)

Ainda segundo os autores, para que os professores ensinem bem o conteúdo frações, eles devem possuir um total entendimento dos conceitos e operações envolvidas. Tal fato é relevante visto que o conhecimento matemático dos professores influencia positivamente a apreensão dos conteúdos pelos alunos. Porém, infelizmente, muitos professores possuem uma grande lacuna em seu entendimento conceitual do assunto, especialmente com a aritmética das frações.

A pesquisa de Marques (2008) comprova a afirmação anterior. A análise do conhecimento de alguns professores dos anos iniciais do ensino fundamental mostra que muitos deles tem dificuldades em ensinar frações. Além disso, pode-se constatar ainda que existem muitos obstáculos conceituais básicos sobre o que ensinam. "Se os professores não têm um conhecimento significativo do que têm que ensinar como podem provocar em seus alunos uma aprendizagem com compreensão dos conteúdos ensinados?"(MARQUES, 2008, p.88).

A autora aplicou um questionário a 208 professores dos estados do Rio de Janeiro e de Tocantins, atuantes nas séries iniciais do ensino fundamental. Durante a pesquisa, Marques (2008) observou que, assim com os estudantes, os docentes apresentam maior facilidade em questões que envolvam frações em unidades contínuas, com uma barra. Tal facilidade não é encontrada ao lidarem com coleções de objetos. Como exemplo, umas das questões avaliadas pela autora está explicitada na Fig. 10.

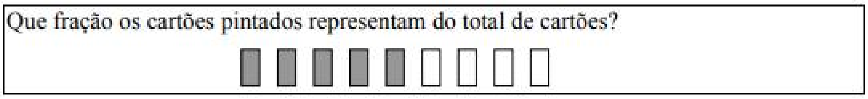


Figura 10 – Questão sobre frações.
Fonte: Marques (2008, p. 47)

A resposta de alguns professores para a questão foi $\frac{5}{4}$. Ou seja, eles não compreenderam que cada cartão representava $\frac{1}{9}$ da coleção. Segundo Marques (2008), uma das dificuldades observadas foi referente à percepção dos diferentes significados de fração.

Os professores brasileiros dos primeiros anos do ensino fundamental, em grande parte, utilizam contextos que envolvem o subconstruto parte-todo para o ensinarem frações (Campos; Magina; Nunes, 2006). A partir de uma pesquisa realizada com 70 professores, não especialistas em matemática, de escolas públicas de São Paulo, as autoras verificaram que os professores não conseguem relacionar uma razão com sua representação fracionária.

Segundo Campos, Magina e Nunes (2006), a estratégia empregada pela maior parte dos professores, se resume à manipulação de materiais concretos ou de desenhos. A questão mais difícil para os docentes, de acordo com as autoras, é apresentada na Fig. 11.

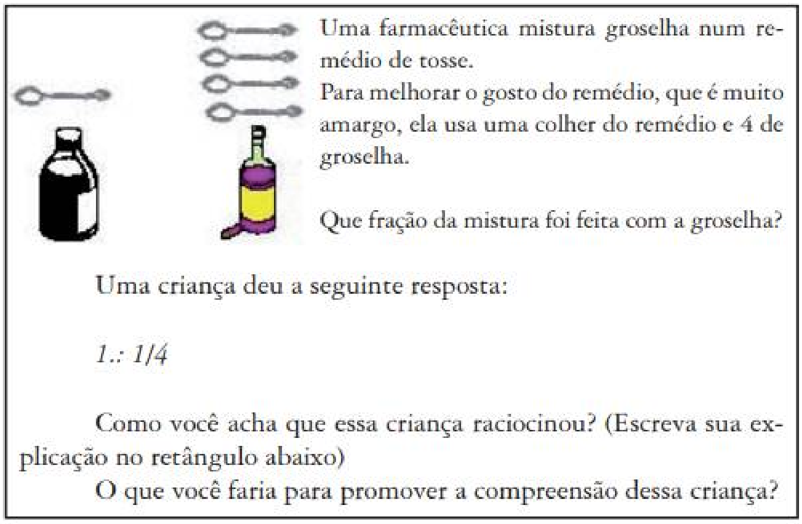


Figura 11 – Questão sobre frações.
Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006, p. 133)

Nesse problema, 62 % dos professores reponderam que a resposta da criança estava correta. Tal fato indica que eles não perceberam que o denominador deveria ser 5, visto que o todo era composto por cinco colheres. Essa pesquisa permitiu a conclusão de que, dado que os professores possuem limitadas estratégias de ensino, além de falta de conhecimento do conceito de frações, a tarefa de superar as concepções erradas dos estudantes se torna mais difícil.

Mas não só os professores brasileiros passam por problemas relacionados ao ensino desse conteúdo. A falta de entendimento sobre a aritmética das frações pelos professores norte americanos e europeus, por exemplo, é uma questão muito debatida. Segundo Lortie-Forgues, Tian e Siegler (2015), quando professores dos EUA foram solicitados a explicarem o significado de $\frac{2}{3} \div 2$ ou $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$, grande parte não ofereceram uma explicação além de indicar o algoritmo "inverta e multiplique".

Quando professores belgas da pré-escola foram convidados a identificar a operação aritmética apropriada para representar o problema "Jens compra $\frac{3}{4}$ kg de carne picada. Ele usa $\frac{1}{3}$ para fazer almôndegas e a parte restante é usada para fazer molho bolonhesa. Quantos kg de carne picada ele usa para fazer suas almôndegas", apenas 19% forma capazes de identificar corretamente como correspondente a $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$. (LORTIE-FORGUES; TIAN; SIEGLER, 2015).

Em Siegler et al. (2010), são feitas recomendações sobre o conhecimento dos professores sobre o assunto.

> Os programas de desenvolvimento profissional devem dar uma alta prioridade à melhoria do entendimento dos professores sobre frações e de como eles devem ensiná-los.
>
> • Desenvolver a profundidade de entendimento dos professores sobre as frações e procedimentos computacionais envolvendo frações.
>
> • Preparar professores para usar variadas representações pictóricas e concretas de frações e operações com frações.
>
> • Desenvolver a capacidade dos professores de avaliar os entendimentos dos alunos e os mal-entendidos em relação às frações (SIEGLER et al., 2010, p. 1, tradução nossa).

Portanto, há a necessidade de programas que promovam o desenvolvimento dos docentes de maneira com que esses melhorem a compreensão dos alunos sobre frações. Isso pois muitos professores apresentam dificuldades em explicar o conteúdo, já que os mesmos possuem apenas uma interpretação parcial do assunto. A concepção sobre os equívocos dos estudantes também são necessárias para uma melhora na instrução em sala de aula (SIEGLER et al, 2010).

Segundo Wu (2011), os professores devem possuir o conhecimento do que vão ensinar a seus alunos. E conhecer o conteúdo envolve, por exemplo, saber sua definição precisa, em qual contexto ele é empregado, a motivação para sua criação, além de possuir a habilidade para utilizá-lo corretamente em diferentes situações. O autor afirma ainda que a matemática ensinada para os professores nas universidades deve ser melhorada. Caso contrário, uma matemática defeituosa continuará a ser a regra nas escolas.

Em uma pesquisa de Bonzanini e Bassoi (2016), verifica-se que os próprios professores apresentam defasagem no conhecimento sobre o que ensinam.

> A principal constatação – e preocupação – que levou à formulação deste trabalho é a de que a matemática das séries iniciais é ministrada por professores que tiveram parcos conhecimentos de matemática em sua graduação. A maioria dos professores atuantes nas séries iniciais são os que concluíram o 2º grau com habilitação para o magistério e os graduados em pedagogia. Nos cursos de pedagogia, muitas vezes a disciplina de matemática ou de didática da matemática contém carga horária insuficiente para um bom desempenho na prática de ensino, fazendo o professor privilegiar outras áreas do conhecimento, ou seja, a que tem mais afinidade (BONZAZINI; BASSOI, 2016, p. 145).

Por isso, conclui-se que os alunos apresentarão as mesmas dificuldades. Como é nas séries iniciais que o aluno começa a construir as bases de sua aprendizagem, é fundamental uma boa formação dos profissionais que atuam nessa etapa do ensino.

Ajudar os professores a desenvolverem novas práticas de ensino não é uma tarefa fácil. Segundo Thames e Ball (2010), os professores devem saber mais do que de fato ensinam. Eles devem compreender as ideias inerentes aos conteúdos, suas raízes e suas conexões. Além disso, devem compreender as razões e formas com que são representados.

Segundo os autores, ensinar não se refere a meramente fazer matemática, mas ajudar os alunos a aprenderem a fazer. O conhecimento matemático que deve ser requerido pelo professor é um tipo mais complexo, que envolve diversas habilidades com o objetivo de ajudar o outro a aprender matemática.

Nesse capítulo fica claro que os obstáculos enfrentados pelos alunos ao longo do ensino de frações nada mais é do que um reflexo das dificuldades de seus professores. Por isso, é de extrema relevância considerar esse assunto ao se analisar o ensino de frações. De maneira a diminuir essas situações adversas, será exibida no próximo capítulo a proposta do professor Wu para o ensino de frações, que pretende descomplicar o conceito por meio de definições claras e precisas.

4 A proposta de Wu

Conforme exposto nos capítulos anteriores, o assunto frações não é tão fácil de ser ensinado nem compreendido, tanto por alunos quanto por professores. Nesse capítulo, mostra-se uma alternativa que visa diminuir esses problemas, a partir da representação das frações na reta numérica.

Hung-Hsi Wu é professor Emérito na Universidade da Califórnia, em Berkeley, onde trabalha desde 1973. Nas últimas décadas vem se dedicando à melhora na educação matemática do K-12 (correspondente aqui no Brasil às etapas do ensino fundamental e ensino médio) nos Estados Unidos. Sua dedicação a esse assunto começou no ano de 1992, quando realizou uma avaliação de livros didáticos para uma escola local.

Segundo Wu, os livros não expunham a matemática de forma clara, deixando os estudantes em dúvida sobre o que era certo ou errado. Tal fato para ele era inadmissível, levando a uma avaliação negativa dos livros didáticos. No entanto, por ser uma crítica ao IMP (Programa de Matemática Interativa), criado em 1989 e que trata do desenvolvimento curricular e do desenvolvimento profissional dos professores, não foi bem aceito, chegando a ser proibida sua publicação. Tal fato o fez querer saber o quão séria era a situação da educação matemática nas escolas (LEONG, 2012).

Um dos assuntos estudados por Wu é referente ao ensino de frações. Segundo Wu (2001), uma apresentação lógica de frações é muito importante. Para ele, a causa para o insucesso dos alunos em relação a esse conteúdo é a forma incoerente como tal assunto lhes é introduzido. A proposta de Wu é apresentar o conceito de frações como uma extensão natural dos números inteiros, definindo a fração como um ponto na reta numérica (visto que essa é a forma como ele apresenta a definição de número).

4.1 *Common Core Standards for Mathematics*

A partir do depoimento de pais que afirmavam que seus filhos não estavam aprendendo, além de conversas com professores, Wu sentiu que não poderia deixar de fazer algo. E foi assim que ele se envolveu no tratamento de vários tópicos referentes ao currículo escolar, tendo participado da elaboração do *Common Core Standards for Mathematics*

(CCSSM), que começou a ser elaborado em 2009, sendo lançado em junho de 2010.

Esse documento foi elaborado pela *Associação Nacional de Governadores e Comissários de Educação dos Estados Unidos*, visando o desenvolvimento de um conjunto de padrões de forma a assegurar uma equiparação do nível de desempenho entre os estudantes dos diferentes estados do país com os estudantes com melhor desempenho em todo o mundo. O objetivo também é que os alunos adquiram o conhecimento necessário para sucesso na educação de nível superior em uma escala global (KENDALL, 2011).

Em relação à matemática, as habilidades descritas no *Common Core* direcionam a uma redução do que se ensina e a um aprofundamento na forma e no desenvolvimento do que é exposta em sala. O objetivo é levar o aluno a fazer análises, a aplicar a teoria em sua vida e a ser capaz de raciocinar sobre problemas, em vez de decorar fórmulas matemáticas.

A Fig. 12 mostra a relação entre as séries escolares dos sistemas de ensino nos EUA e no Brasil:

IDADE	BRASIL		EUA	
6-7 anos	Ensino Fundamental I	1º ano	*Elementary School*	Grade 1 (K-1)
7-8 anos		2º ano		Grade 2 (K-2)
8-9 anos		3º ano		Grade 3 (K-3)
9-10 anos		4º ano		Grade 4 (K-4)
10-11 anos		5º ano		Grade 5 (K-5)
11-12 anos	Ensino Fundamental II	6º ano	*Middle School*	Grade 6 (K-6)
12-13 anos		7º ano		Grade 7 (K-7)
13-14 anos		8º ano		Grade 8 (K-8)
14-15 anos		9º ano	*High School*	Grade 9 (K-9)
15-16 anos	Ensino Médio	1º ano		Grade 10 (K-10)
16-17 anos		2º ano		Grade 11 (K-11)
17-18 anos		3º ano		Grade 12 (K-12)

Figura 12 – Equivalência entre as séries escolares dos sistemas de ensino nos EUA e no Brasil
Fonte: Pereira (2015, p. 16)

As competências a serem desenvolvidas ao longo das séries equivalentes ao ensino fundamental no Brasil estão descritas a seguir:

- No nível K-1:
  - desenvolver a compreensão da adição, subtração e de estratégias para a adição e subtração até 20;
  - desenvolver a compreensão das relações entre números inteiros positivos e valor posicional, incluindo agrupamentos em dezenas e unidades;
  - desenvolver a compreensão de medidas lineares e medidas de comprimento como justaposições de comprimentos unitários;
  - raciocinar sobre composições e decomposições de formas geométricas e seus atributos.

- No nível K-2:
  - estender a compreensão da notação de base dez;
  - ganhar fluência na adição e na subtração;
  - usar unidades de medida padrão;
  - descrever e analisar formas.

- No nível K-3:
  - desenvolver a compreensão da multiplicação e divisão e estratégias para multiplicação e divisão até 100[5];
  - desenvolver a compreensão de frações, especialmente frações unitárias (frações com numerador 1);
  - desenvolver a compreensão da estrutura de arranjos retangulares e de área;
  - descrever e analisar formas bidimensionais.

- No nível K-4:
  - desenvolver a compreensão e fluência com a multiplicação de vários dígitos e desenvolver a compreensão de dividir para encontrar quocientes envolvendo dividendos com vários dígitos;
  - desenvolver a compreensão da fração equivalente, adição e subtração de frações com denominadores iguais e multiplicação de um números inteiros positivos por frações;
  - desenvolver a compreensão de que as figuras geométricas podem ser analisadas e classificadas de acordo com suas propriedades, tais como ter lados paralelos, os lados perpendiculares, medidas de ângulo particular e simetria.

- No nível K-5:
  - ganhar fluência na adição e subtração de frações e desenvolvimento na compreensão da multiplicação de frações a na divisão de frações em casos especiais (frações unitárias divididas por um número inteiro positivo e números inteiros positivos divididos por frações unitárias);
  - estender a divisão para divisores com dois dígitos, integrando frações decimais com o sistema do valor posicional e o desenvolvimento da compreensão das operações com números decimais até a casa dos centésimos e da fluência em operações com números inteiros positivos e números decimais;
  - desenvolver a compreensão de volumes.

- No nível K-6:
  - relacionar as ideias de razão/proporção e taxa com multiplicação e divisão de números inteiros positivos e usar os conceitos de razão/proporção e taxa para resolver problemas;
  - concluir estuda da divisão de frações e estender a noção de número o conjunto dos números racionais que inclui os números negativos;
  - escrever, interpretar e usar expressões e equações lineares;
  - desenvolver a compreensão do pensamento estatístico.

- No nível K-7:
  - desenvolver a compreensão e aplicações das relações proporcionais;
  - desenvolver a compreensão das operações com números racionais e trabalhar com expressões e equações lineares;
  - resolver problemas que envolvam desenhos em escala e construções geométricas informais e trabalhar com as formas planas e tridimensionais para resolver problemas envolvendo área, área da superfície e volume;

[5] As divisões por 100 nessa série são apenas com múltiplos de 100, pois o números decimais só aparecerão na série seguinte.

    - elaborar inferências sobre populações com base em amostras.

- No nível K-8:
    - formular e raciocinar com expressões e equações, incluindo a modelagem por uma equação linear de associações entre dados bivariados e resolução de equações e sistemas lineares;
    - estender o conceito de função e usar funções para descrever relações quantitativas;
    - analisar figuras bidimensionais e tridimensionais usando distâncias, ângulos, semelhança e congruência e entender e aplicar o Teorema de Pitágoras (PEREIRA, 2015, pp. 15-16).

Apesar de ter sido lançado nos EUA há sete anos, os objetivos do *Common Core* ainda não foram alcançados. Alguns dos problemas que podem ser citados são a falta de preparação dos docentes, a falta de adequação dos materiais didáticos e disputas políticas. Esse panorama serve de alerta ao Brasil no que se refere à implementação da BNCC (TAKAHASHI, 2017).

4.2 O ensino de frações segundo Wu

O ensino de frações nos EUA ocorre durante as séries de K-2 até K-7. Por volta das séries K-2 a K-4, a principal parte do ensino é focada na aquisição de vocabulário de frações. É a partir do 5º ano que começa realmente o ensino na matemática das frações, aprendendo a operar com elas.

O processo de ensino aprendizagem de frações, segundo Wu (2001), pode ser dividido em 2 etapas. Na primeira etapa (refere-se as séries K-3 e K-4 do Common Core Standards), os estudantes são apresentados à diferentes situações em que frações são utilizadas e aprendem a realizar cálculos mais simples e de maneira mais intuitiva. As representações dessas frações são principalmente feitas pelas barras de chocolates e fatias de pizza.

No nível K-4 (4º ano), o fato de a fração ser um número se torna mais claro na medida em que os alunos tem que aprender a somar, subtrair, multiplicar e dividir frações. Tal conhecimento é utilizado também na resolução de problemas.

Uma forma de introduzir o conceito de frações é por meio da utilização de objetos discretos. Considerando-se, por exemplo, uma coleção com 5 lapiseiras como representando o "todo", ou "unidade", uma lapiseira é $\frac{1}{5}$ do todo (a chamada fração unitária).

No entanto, Wu (2011) destaca que há prós e contras nessa abordagem inicial. Apesar de simples, ela pode limitar o pensamento do estudante, o levando a pensar em "quantos"e não em "quanto". Outro problema é que é inviável querer ensinar frações do tipo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ utilizando essa unidade. Por isso, os alunos começam a aprender sobre modelos contínuos, que envolvem comprimento, área e volume.

Um exemplo de como tal modelo é aplicado é o seguinte: considere a unidade como sendo a área de um quadrado de lado 1 (quadrado unitário). Parte-se do pressuposto de que os estudantes conseguem relacionar o conceito de área com a ideia de congruência. Por isso, não é difícil fazer com que os alunos compreendam que as duas regiões hachuradas abaixo representam a mesma fração $\frac{1}{4}$, pois dividem a mesma área em 4 partes congruentes.

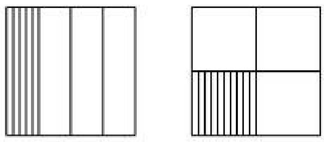


Figura 13 – Representações da fração $\frac{1}{4}$
Fonte: Wu (2011, p. 7)

Uma observação importante é que o professor saiba distinguir a unidade que, no caso exposto anteriormente, não é o quadrado, mas a área do quadrado. Isso pois com a fração, que é um número, podemos efetuar cálculos, fato que não ocorre com uma figura geométrica.

Ao se pensar uma fração como figura geométrica e, portanto, em uma forma, os estudantes são levados a acreditar que “partes iguais” é equivalente à "mesma forma e mesmo tamanho". Por exemplo, na figura a seguir, a tarefa de convencer um aluno de que as áreas hachuradas da Fig. 14 são iguais, pelo motivo exposto anteriormente, se torna difícil.

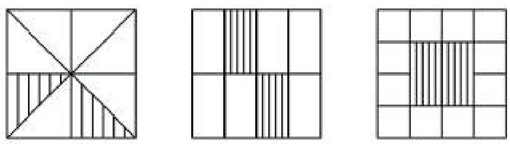


Figura 14 – Representações da fração $\frac{1}{4}$.
Fonte: Wu (2011, p. 8)

O professor deve também ratificar qual é a unidade envolvida em cada exercício, para não deixar a impressão de que podemos nos referir a diferentes unidades sem uma definição clara de quais são elas. Dessa forma, uma pergunta recorrente em livros como a "que fração é representada pela área sombreada?"não deve ser realizada. Considere a Fig. 15 seguir.

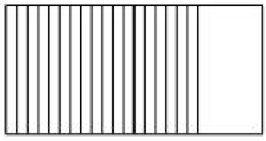


Figura 15 – Problema de visualizar a fração dependendo da figura.
Fonte: Wu (2011, p.9)

A partir dessa ilustração, um aluno pode assumir que a área do quadrado à esquerda é a unidade e que, portanto, a área hachurada equivale a $\frac{3}{2}$. Por outro lado, outro aluno pode assumir que a área do retângulo maior é a unidade e, nesse caso, a área da região hachurada será representada pela fração $\frac{3}{4}$.

Segundo Wu (2008), o medo ao se lidar com frações começa quando se soma frações, pois os estudantes perdem uma sequência que eles tinham. Isso pois, ao operar com números inteiros positivos, eles tinham os dedos.

Nos EUA, o ponto de referência é usar pizzas ou tortas (o que acontece aqui no Brasil). Apesar desses modelos serem úteis nos primeiros anos, eles não são adequados ao se lidar com frações maiores que a unidade ou para operar com frações. Como exemplo, como fazer para multiplicar dois pedaços de uma torta? Isso faz com que muitos livros didáticos restrinjam sua atenção a frações que são menores que 1 e que tenham apenas um número no numerador e denominador.

Wu (2008) afirma que o conceito de frações é o primeiro contato dos estudantes com a matemática abstrata e, por isso, esses conceitos precisam de definições claras e precisas. Para Wu, a reta numérica é uma sequência natural para frações da mesma forma que os dedos são para os números inteiros positivos.

A partir da série K-5, o conhecimento matemático requer então que cada conceito seja definido. No entanto, grande parte dos livros didáticos não tratam os conteúdos dessa forma. Segundo a definição de Wu (2001), as frações correspondem a uma coleção de números da forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros, com n não nulo. Para definir de maneira específica que pontos da reta numérica são tratados como fração, Wu (2001) apresenta a seguinte definição:

Definição 1. *Sejam k, l números inteiros com $l > 0$. Divida cada um dos segmentos de linha $[0,1]$, $[1,2]$, $[3,4]$,... em l segmentos de igual comprimento. Esses pontos de divisão juntos com os números inteiros formam um sequência infinita de marcadores igualmente espaçados na reta numérica (no sentido de que os comprimentos dos segmentos entre dois marcadores consecutivos são iguais entre si. O primeiro marcador à direita de zero é, por definição, $\frac{1}{l}$. O segundo marcador à direita de zero é, por definição, $\frac{2}{l}$, o terceiro $\frac{3}{l}$, etc., e o k-ésimo marcador é $\frac{k}{l}$. A coleção desses $\frac{k}{l}$, para todos k e l inteiros, com $l > 0$, é chamada de frações. O número k é dito numerador da fração $\frac{k}{l}$ e o número l seu denominador (WU, 2001, p. 6, tradução nossa).*

Wu (2001) enfatiza que, com essa definição, não faz distinção entre frações próprias e impróprias e, além disso, que números inteiros também são frações. Ele começa trabalhando o conceito de frações com frações positivas. Posteriormente, ele trata de frações negativas, mostrando que todas as proposições e igualdades também são válidas para as frações negativas, que junto com as positivas, formam o conjunto de números racionais.

Se dividirmos o segmento $[1,3]$ em 3 partes iguais, por exemplo, o marcador final direito do segmento é a representação de $\frac{1}{3}$.

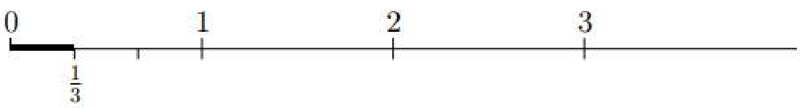


Figura 16 – Representação do número $\frac{1}{3}$ na reta numérica.
Fonte: Wu (2008, p. 5)

Assim, $\frac{m}{3}$ representa m cópias de terços, ou seja, consiste em juntar m segmentos consecutivos de $\frac{1}{3}$ de comprimento, a partir do zero. No caso de $m = 10$, temos:

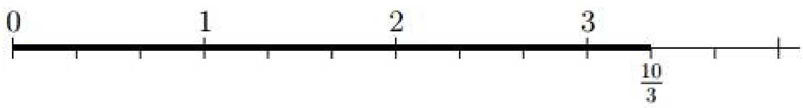


Figura 17 – Representação do número $\frac{10}{3}$ na reta numérica.
Fonte: Wu (2008, p. 6)

Ao comparar-se essa definição de fração com a usualmente encontrada nos livros didáticos, por meio da utilização de fatias de pizza, verifica-se que essas partes foram substituídas por um segmento (segmento unitário). Segundo Wu (2008), é mais fácil dividir um segmento em 5 partes de igual comprimento do que dividir um círculo em 5 partes congruentes.

No ensino de frações, deve-se ter o cuidado com a unidade tomada. Por isso, ao se recorrer a figuras como quadrados, partes de uma pizza ou chocolate. Se a área de um círculo ou quadrado for utilizada como unidade, deve-se verificar se o tamanho da unidade é o mesmo em todas as atividades.

Na Fig. 18, a área hachurada não representa a fração $\frac{3}{2}$. Isso pois, se a unidade é tomada como sendo igual a área do quadrado à esquerda então, como a área do quadrado à direita é visivelmente maior, a metade da área desse quadrado é maior do que a metade do quadrado à esquerda. Assim, a área hachurada é maior que $\frac{3}{2}$. Analogamente, se a área do quadrado à direita é tomada como unidade, então a área hachurada será maior que $\frac{3}{2}$ (WU, 2001).

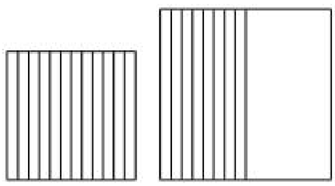


Figura 18 – Problemas envolvendo a unidade.
Fonte: Wu (2001, p. 14)

Frações decimais:

São aquelas cujos denominadores são potências positivas de 10, como $\frac{68}{100}$, $\frac{3900}{1000}$, que podem ser escritas de forma abreviada como $0,68$ e $3,9$. Nessa notação, o número de dígitos à direita da vírgula é equivalente ao número de zeros no denominador.

Frações equivalentes:

Diz-se que duas frações são equivalentes se, para quaisquer inteiros positivos k, m e m (tal que $n \neq 0$ e $k \neq 0$) tenhamos $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$. Como exemplo, ele cita $\frac{5.4}{5.3} = \frac{4}{3}$.

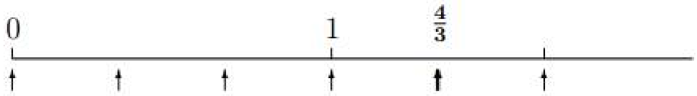


Figura 19 – Localização do $\frac{4}{3}$ na reta numérica
Fonte: Wu (2008, p. 8)

Como resultado, pode-se afirmar que quaisquer duas frações podem ser representadas por duas frações com igual denominador. $\frac{m}{n} = \frac{ml}{nl}$ e $\frac{k}{l} = \frac{nk}{nl}$, assim elas tem o mesmo denominador nl. Wu observa ainda que reduzir a fração usando os menores termos possíveis (por exemplo, usar $\frac{4}{3}$ no lugar de $\frac{12}{9}$) é muito mais uma preferência do que uma necessidade matemática.

Fração como divisão:

Define-se a divisão de m por n para quaisquer inteiros positivos m e n, com $n \neq 0$, denotada por $(m \div n)$, como o comprimento de uma parte quando um segmento de comprimento m é particionado em n partes iguais.

Teorema 1. *Para quaisquer inteiros positivos m, n, com $n \neq 0$, tem-se que $\frac{m}{n} = m \div n$.*

Esse teorema fornece a interpretação de fração como uma divisão entre dois inteiros positivos. Para mostrar tal fato, basta verificar que o segmento $[0, m]$ é igual a $m \cdot n$ cópias de $\frac{1}{n}$. Por sua vez, diz-se também que há n cópias de $\frac{m}{n}$. Assim, uma parte da partição de $[0, m]$ em n partes iguais é igual a $\frac{m}{n}$.

Por meio desse teorema, pode-se substituir o símbolo $\div$, utilizando a notação $\frac{m}{n}$ para denotar a divisão de m por n.

Adição de frações:

Como todo número inteiro positivo é uma fração a adição de frações não pode ser conceitualmente diferente. No caso de números inteiros positivos, se somarmos 4 e 7, por exemplo, basta juntar o comprimento dos dois segmentos (processo chamado de concatenação).

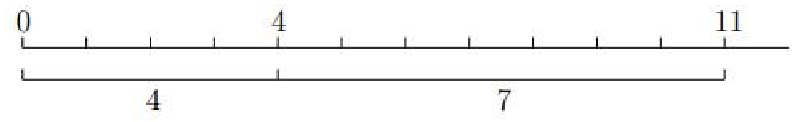


Figura 20 – Exemplo da adição de dois números inteiros positivos
Fonte: Wu (2008, p. 11)

Da mesma forma, sendo dadas as frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$, a adição de $\frac{k}{l}$ com $\frac{m}{n}$ tem-se como resultado o comprimento dos segmentos concatenados de comprimento $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$.

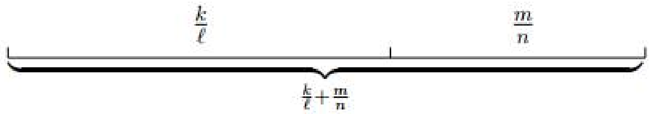


Figura 21 – Adição de dois números inteiros positivos
Fonte: Wu (2008, p. 11)

Segue da definição que $\frac{k}{l} + \frac{m}{l} = \frac{k+m}{l}$. Isso ocorre pois o comprimento total da soma dos segmentos é igual a $k+m$ cópias de $\frac{1}{l}$. No caso de denominadores distintos, é possível reescrever as frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ como $\frac{kn}{ln}$ e $\frac{lm}{ln}$, donde $\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn}{ln} + \frac{lm}{ln} = \frac{kn+lm}{ln}$.

O conceito de número misto pode ser introduzido como uma aplicação da adição de frações, de maneira a ajudar na localização de uma fração na reta numérica. Como exemplo, ele cita $\frac{187}{14} = \frac{(13\times14)+5}{14} = \frac{13\times14}{14} + \frac{5}{14} = 13 + \frac{5}{14}$.

Logo, a fração $\frac{187}{14}$ é um ponto na reta numérica entre o 13 e o 14. Tem-se ainda que a notação usual de número misto omite o sinal $+$, e escreve-se, no lugar de $13 + \frac{5}{14}$, apenas $13\frac{5}{14}$.

Comparação de frações:

Sendo dadas frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$, dizer que $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$ ($\frac{k}{l}$ é maior que $\frac{m}{n}$ ou que $\frac{m}{n}$ é menor que $\frac{k}{l}$) é equivalente a dizer que $kn > lm$.

Para demonstrar tal fato, consegue-se reescrever $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ como $\frac{kn}{ln}$ e $\frac{lm}{ln}$. Assim, como $\frac{kn}{ln} > \frac{lm}{ln}$, segue que $kn > lm$, ou seja, kn cópias de $\frac{1}{ln}$ é maior que lm cópias de $\frac{1}{ln}$. Analogamente, tem-se a igualdade $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$, segue que $kn = lm$.

Subtração de frações:

Sejam frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ tais que $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$. Portanto, o segmento de comprimento $\frac{k}{l}$ é maior que o de comprimento $\frac{m}{n}$. Por definição, a diferença $\frac{k}{l} - \frac{m}{n}$ será o comprimento que resulta quando um segmento de comprimento $\frac{m}{n}$ é retirado de uma extremidade de um segmento de comprimento $\frac{k}{l}$.

Como se pode escrever $\frac{k}{l} = \frac{kn}{ln}$ e $\frac{m}{n} = \frac{lm}{ln}$, segue que $\frac{k}{l} - \frac{m}{n} = \frac{kn-lm}{ln}$.

Multiplicação de frações:

A fórmula do produto é dada por $\frac{k}{l}$ x $\frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$.

Demonstração. Considere uma partição de $\left[0, \dfrac{m}{n}\right]$. em l partes iguais. Por definição do produto $\dfrac{k}{l}$ x $\dfrac{m}{n}$, basta mostrar que o comprimento de k partes concatenadas é $\dfrac{km}{ln}$. Usando a equivalência de frações , segue que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{lm}{ln} = \dfrac{m + \ldots + m}{ln} = \underbrace{\dfrac{m}{ln} + \ldots + \dfrac{m}{ln}}_{l \text{ parcelas}}$. □

Portanto a fração $\frac{m}{n}$ pode ser vista como a concatenação de l partes com comprimento $\frac{m}{ln}$. Se são tomadas k partes concatenadas, tem-se que $\frac{km}{ln}$ é o comprimento de $\frac{k}{l}$ x

$\frac{m}{n}$.

É possível mostrar, como consequência lógica dessa fórmula, que a área do retângulo cujos lados são comprimentos em forma de fração é igual ao produto das medidas. Considere um retângulo cuja base seja $\frac{k}{l}$ e altura $\frac{m}{n}$.

A área do retângulo é, por definição, o produto entre essas duas medidas. Segue que sua base consiste em k segmentos concatenados, cada um com comprimento igual a $\frac{1}{l}$. Da mesma forma, sua altura consiste em n segmentos concatenados de segmento $\frac{1}{l}$ cada. Portanto, pode-se dizer que o retângulo está dividido em km pequenos retângulos de base $\frac{1}{n}$ e altura $\frac{1}{l}$.

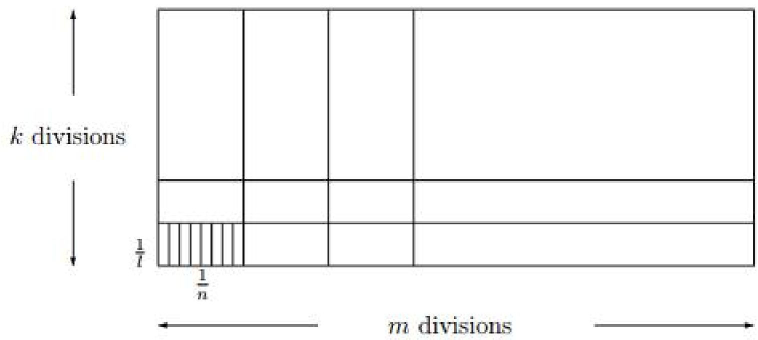


Figura 22 – Retângulo dividido em km pequenos retângulos de base $\frac{1}{n}$ e altura $\frac{1}{l}$
Fonte: Wu (2002, p. 67)

Considere um quadrado unitário(lado com comprimento 1) cuja altura seja dividida em l partes iguais e base dividida em n partes iguais. . Dessa forma, tem-se uma partição do quadrado unitário em ln retângulos iguais.

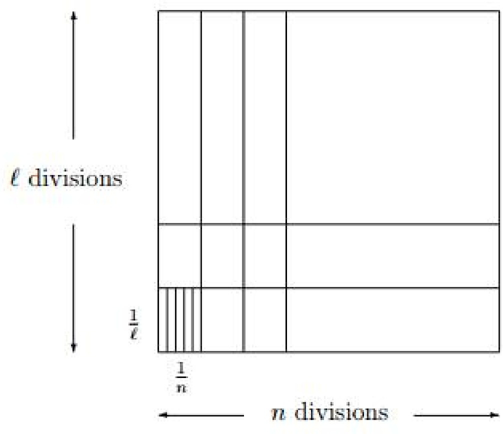


Figura 23 – Quadrado unitário dividido em ln retângulos iguais
Fonte: Wu (2002, p. 66)

Por definição da área do retângulo , cada um desses retângulos menores tem área $\frac{1}{n}$ x $\frac{1}{n}$. Como esses retângulos formam um quadrado de área 1 então a área de cada um deles é $\frac{1}{ln}$. Da mesma maneira ocorre quando um segmento unitário é dividido em ln partes iguais, cada uma dessas partes terá comprimento $\frac{1}{ln}$. Então $\frac{1}{l}$ x $\frac{1}{n} = \frac{1}{ln}$. Ao se voltar ao retângulo de base $\frac{k}{l}$ e altura $\frac{m}{n}$, segue que esse foi dividido em km retângulos de área $\frac{1}{n}$ x $\frac{1}{l} = \frac{1}{nl}$, donde a área é $\frac{km}{nl}$.

Wu (2002) afirma que essa definição de multiplicação de frações é consistente com a ideia intuitiva de multiplicação dos números inteiros positivos, que trata de repetição de adições.

<u>Divisão de frações:</u>

Quando uma criança é ensinada que $\frac{15}{3} = 5$, diz-se que tal fato se justifica pois 5 x 3 = 15. Assim, por definição, $\frac{15}{3}$ é o número k que satisfaz a igualdade k x 3 = 15. Wu (2008) afirma que a definição de divisão entre números inteiros positivos é importante para que seja possível o entendimento sobre a divisão entre frações. A seguir, ele apresenta o teorema:

Teorema 2. *Dadas duas frações A e B, $B \neq 0$, existe uma fração C tal que $A = CB$. Além disso, essa fração é única.*

Demonstração. Considere $A = \frac{k}{l}$ e $B = \frac{m}{n}$. Temos que a fração $C = \frac{kn}{lm}$ satisfaz a igualdade $A = CB$ (como B é não-nula, $m \neq 0$, logo $lm \neq 0$ e tal fração C existe). Consideremos C' tal que $A = C'B$. Logo, $\frac{k}{l} = C'\text{x}\frac{m}{n}$. Multiplica-se ambos os lados da igualdade por $\frac{n}{m}$, assim $\frac{kn}{lm} = C'$, donde a fração $C' = C$, como desejado. □

Definição 2 (Divisão de frações)**.** *Se A e B são frações, com $B \neq 0$, então a divisão de A por B (ou quociente de A por B, denotado por $\frac{A}{B}$) é a fração C tal que $CB = A$.*

Se forem dadas duas frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$, então tem-se que $\frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}} = \frac{k}{l}$ x $\frac{n}{m}$, que é a tão conhecida regra de "repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda". Da forma apresentada por Wu(2008), esse resultado segue de uma definição precisa.

<u>Frações complexas:</u>

Frações complexas são as frações obtidas pela divisão de duas frações. Wu (2008) justifica uma discussão dessas frações pois pode-se chegar a exemplos do tipo $\frac{1{,}2}{31{,}5} + \frac{3{,}7}{0{,}008}$, em que os alunos aplicam o algoritmo que aprenderam $\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn+ml}{ln}$ e que só foi demonstrado no caso em que os numeradores e denominadores são inteiros positivos.

Segundo Wu (2008), esses cálculos são realizados, mas os livros didáticos simplesmente ignoram tal fato, e tratam frações complexas como frações comuns. A realidade mostra que o tópico exige atenção.

Porcentagem:

Uma porcentagem é uma fração complexa cujo denominador é 100. Sendo N uma fração, escreve-se $\frac{N}{100}$ ou, mais frequentemente , $N\%$.

Razão:

Sejam dadas duas frações A e B, com $B \neq 0$, ambas sendo pontos em uma mesma reta numérica (ou seja, consideramos a mesma unidade). A razão de A por B, denotada por $A : B$, é a fração complexa $\frac{A}{B}$.

Números Negativos:

Conforme visto anteriormente, um número é um ponto em uma reta numérica. Se um ponto for tomado p nessa reta, $p \neq 0$, tal ponto pode estar tanto do lado esquerdo quanto do lado direito do 0. O ponto denotado por p^* é o ponto que está em um lado oposto ao p em relação ao 0, de forma que p e p^* são equidistantes a 0.

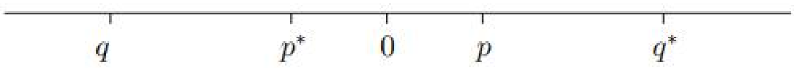


Figura 24 – Exemplo de dois pontos p e q da maneira descrita acima
Fonte: Wu (2008, p. 24)

O conjunto de números racionais se refere ao conjunto de todas as frações e reflexões em relação ao 0. Como os números inteiros positivos são frações , segue que o conjunto dos números inteiros é um subconjunto dos números racionais.

Os números à direita do 0 são os positivos, à esquerda do zero são negativos e o número zero é, por definição, nem positivo nem negativo. Wu (2008) diz que usa o sinal $(*)$ em vez do sinal negativo $(-)$ para denotar os simétricos pois ainda não introduziu a subtração de números racionais. Segundo ele, o sinal de negativo traz uma certa "bagagem psicológica" que pode interferir na aprendizagem dos números racionais. Por exemplo, se $a = -5$, então não há nada de negativo em $(-a)$, que é igual a 5.

Adicão de números racionais:

Para a realização da adição de números racionais, três axiomas são importantes:

(A1) Dados quaisquer números racionais x e y, existe uma forma de somar esses números e obter outro racional $x + y$. Se x e y são frações, $x + y$ é feita da forma mostrada anteriormente. Além disso, essa adição satisfaz as propriedades de associatividade e comutatividade.

(A2) $x + 0 = x$, para todo número racional x.

(A3) Se x é um número racional qualquer, então $x + x^* = 0$.

A partir de (A1), (A2) e (A3), podemos mostrar como a adição de racionais é feita. Sejam s e t duas frações positivas quaisquer. Os axiomas (A1 - A3) implicam que:

$$\begin{cases} s^* + t^* = (s+t)^* \\ s + t^* = (s - t), \;\; se\ s \geq t \\ s + t^* = (t - s)^*, \;\; se\ s < t \end{cases}$$

A partir da segunda igualdade, a subtração $s - t$ pode ser vista como a adição de s e t^*. Como a adição de s e t^* independentemente se $s \geq t$ ou $s < t$ (A1), essa igualdade nos permite definir, em geral, a subtração entre quaisquer dois racionais x e y. Logo, $x - y \overset{def}{=} x + y^*$.

Quando x e y são frações e $x > y$, o significado de $x - y$ coincide com o significado de subtração de frações. O conceito de subtração de racionais vem a ser, portanto, uma extensão do conceito de subtração entre duas frações.

Como consequência da definição de $x - y$, segue que $0 - y = 0 + y^* = y^*$. Assim, abreviando-se $0 - y$ por $-y$, segue que $-y = y^*$. Neste ponto, Wu (2008) afirma que pode-se substituir a notação y^* por $(-y)$.

Multiplicação de números racionais:

Para realizar a multiplicação de racionais, deve-se utilizar os três axiomas a seguir:

(M1) Dados dois números racionais x e y quaisquer, existe uma forma de multiplicar esses números obtendo um outro racional xy. Se x e y forem frações, então xy é o produto usual de frações. Além disso, essa multiplicação de números racionais satisfaz a propriedade de associatividade, comutatividade e distributividade.

(M2) Se x é um número racional qualquer então 1 x $x = x$.

(M3) 0 x $x = 0$, para todo número racional x.

Se $x = 0$ ou $y = 0$, segue, por (M3), que $xy = 0$.

Pode-se, portanto, assumir x e y não nulos, de maneira que cada um deles ou é uma fração ou negativo de uma fração (simétrico).

Assim, sejam s, t frações não nulas. As seguintes igualdades podem ser demonstradas:

$$\begin{cases} (-s)t = -(st) \\ s(-t) = -(st) \\ (-s)(-t) = st \end{cases}$$

De maneira semelhante como foi demonstrada a multiplicação entre s e t.

Wu (2008) dá atenção à última igualdade que, segundo ele, deixa os estudantes bastante intrigados. Para contornar essa situação, ele sugere um exemplo simples, que é mostrar que $(-1)(-1) = 1$. Primeiro, ele afirma que se um número x satisfaz a igualdade $x - 1 = 0$, então $x = 1$.

Agora, falta mostrar que $(-1)(-1) - 1 = 0$. Pela definição de subtração, $(-1)(-1) - 1 = (-1)(-1) + (-1)$. Pela propriedade distributiva temos que $(-1)(-1) - 1 = (-1)(-1) + 1$ x $(-1) = [(-1) + 1](-1) = 0$ x $(-1) = 0$.

Portanto, como é válida a propriedade distributiva para números racionais, segue que $(-1)(-1) = 1$. Dessa forma, pode-se concluir que a propriedade chave para o fato de que o produto de dois números negativos seja um número positivo é a distributividade.

<u>Divisão de números racionais:</u>

O conceito de divisão para números racionais é a mesma usada para inteiros positivos ou frações.

Teorema 3. *Sejam x, y números racionais quaisquer, com $y \neq 0$. Então existe um único número racional z tal que $x = zy$.*

A demonstração para esse teorema é análoga a feita para frações. Esse teorema diz que se um racional não nulo y então qualquer número racional x pode ser expresso como um único múltiplo de y. O número z é chamado de divisão de x por y e escrito como $\frac{x}{y}$.

Comparação de números racionais:

Dizemos que $x < y$ se x está à esquerda de y na reta numérica.

Proposição 1. *Dados dois números x e y, então apenas uma das três possibilidades pode ocorrer: $x = y$, $x < y$ ou $x > y$.*

Tal fato é chamado de tricotomia. Sejam x, y, z números racionais. Então as seguintes desigualdades são válidas:

i) Para quaisquer x, y segue que dizer que $x < y$ é equivalente a dizer que $-x > -y$;

ii) Dizer que $x < y$ é equivalente a dizer que $x + y < y + z$;

iii) $x < y$ é equivalente a $y - x > 0$;

iv) Se considerarmos $z > 0$, então $x < y$ é equivalente a $xz < yz$;

v) Se $z < 0$ então $x < y$ equivale a $xz > yz$;

vi) $x > 0$ equivale a $\dfrac{1}{x} > 0$.

Para Wu (2008), a desigualdade em (v) é a mais intrigante. Por isso, ele utiliza um argumento mais intuitivo para explicar tal fato. Ele começa considerando o caso em que $0 < x < y$ e $z = -2$, querendo mostrar o porquê de $(-2)y < (-2)x$. Como $0 < x < y$, temos a seguinte configuração:

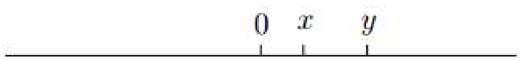


Figura 25 – $0 < x < y$ na reta numérica
Fonte: Wu (2008, p. 32)

Logo, $2x$ irá continuar à esquerda de $2y$, pois ambos estão à direita do 0.

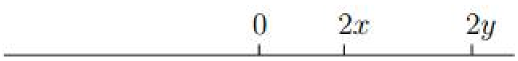


Figura 26 – $2x$ e $2y$ à esquerda do 0 na reta numérica
Fonte: Wu (2008, p. 33)

Fazendo a reflexão desses números em relação ao 0, temos:

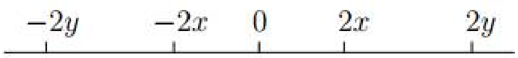


Figura 27 – Reflexão dos números $2x$ e $2y$ com relação à 0 na reta numérica
Fonte: Wu (2008, p. 33)

Portanto, $-2y$ está mais à esquerda do 0 que o $-2x$, donde $-2y < -2x$, como queríamos mostrar. Tal fato não muda ao substituir-se o número -2 por qualquer outro número negativo z.

4.3 Comentários de Wu sobre o ensino de frações

Wu (2008) alerta para a necessidade de focar as energias em como ensinar frações corretamente, antes de quaisquer outras pesquisas. As frações vem sendo ensinadas da mesma forma durante anos, definindo uma fração como pedaço de pizza e utilizando números com um único dígito. O problema, segundo ele, é que tal conceito não é tratado como parte da matemática, pois houve uma separação entre educadores e matemáticos durante as últimas décadas.

Segundo Wu (2008), é um fato intrigante querer ajudar o conhecimento de um estudante se o mesmo recebe uma informação com lacunas. Os estudantes, por exemplo, só sabem realizar a multiplicação de frações operacionalmente, pois não entendem, de fato, seu significado. Da forma como é apresentada nos livros didáticos é difícil imaginar que os alunos possam alcançar um entendimento sobre o assunto.

Muitos estudantes acreditam que $0,009 > 0,02$, pois $9 > 2$. A maneira usual de ensinar sobre decimais é dizer que é uma extensão do sistema de base 10. O número $1,26$, por exemplo, é 1 inteiro, 2 décimos e 6 centésimos. Portanto, o números $0,02$ é 2 centésimos e o $0,009$ é 9 milésimos.

Tal explicação, apesar de correta, apresenta dois problemas. O primeiro é que envolve uma complexidade desnecessária. Apesar de familiarizados com os inteiros positivos, os estudantes só veem frações com pedaços de pizzas. Com esse exemplo eles são apresentados a uma terceira classe de números composta por décimos, centésimos, milésimos.

Da foma com que Wu (2008) apresenta os decimais, eles são apenas uma classe de frações, nenhuma informação adicional é necessária. Outra questão apresentada pelo autor é a diferença entre descrição verbal de décimos, centésimos, milésimos e etc; e suas representações simbólicas. Ou seja, há uma grande distinção entre $1,26$ é 1 inteiro e 2 décimos e 6 centésimos e $1,26 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100}$. Isso ocorre pois a descrição verbal omite o fato de que uma adição é envolvida nessa descrição.

Por outro lado, suponha que um aluno seja ensinado que um decimal é uma fração com denominador que seja uma potência de 10. Então, comparando $0,02$ e $0,009$, ele compara $\frac{2}{100}$ e $\frac{9}{1000}$, pela definição de decimal. Como consequência da definição de frações equivalentes, essas frações podem ser reescritas como $\frac{20}{1000}$ e $\frac{9}{1000}$, donde temos que comparar 20 partes de 1000 e 9 partes de 1000. Como $20 > 9$, segue que $0,009 < 0,02$, como se pretendia mostrar.

4.4 Aplicação da proposta de Wu no Brasil

A tese de Sant'Anna (2008) teve como ideia principal o ensino de frações como número representado na reta numérica. A autora aplicou uma sequência de atividades no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, para turmas de sétimo e oitavo anos, nos anos de 2006 e 2007.

Sant'Anna (2008) verificou que os estudantes apresentavam dificuldades ao reconhecerem frações como números mas, após o conceito ser bem definido, eles conseguiram alcançar conhecimentos mais avançados. A autora tinha como objetivo também avaliar o desempenho dos alunos no campo algébrico. Segundo sua análise, os estudantes que tinham o domínio do conceito, sabendo que a fração era um número e identificando sua representação na reta numérica, obtiveram maior êxito.

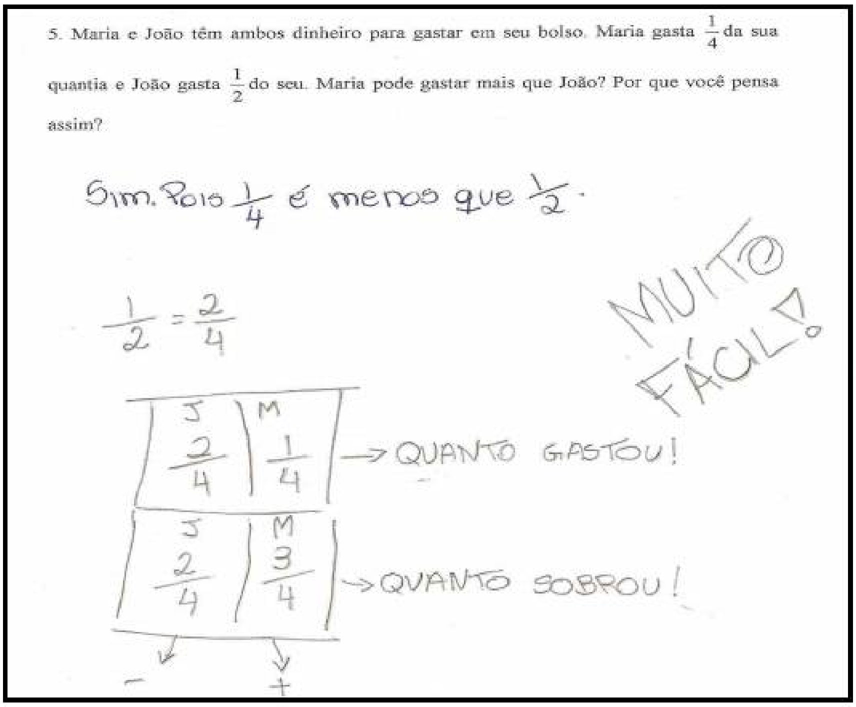
Foram realizados dois testes diagnósticos, no período de 2006 a 2007. Com a questão 5 (em 2007 foi a questão 6), apresentada na Fig. 25, Sant'Anna (2008), objetivava verificar se os estudantes conseguiriam identificar a necessidade de uma unidade para resolverem o problema. Em 2006, na primeira aplicação do questionário, onde foram avaliados 31 alunos, houve um total de 6 acertos.

Dentre os alunos que não apresentaram respostas corretas, 13 argumentaram que Maria tinha mais dinheiro para gastar porque havia gasto uma quantia menor do que João. Ou seja, eles não consideraram a quantia inicial, que era a unidade da questão. Dentre as demais respostas, 10 foram negativas, visto que, como $1/4 < 1/2$, Maria não poderia ter gasto mais do que João.

5. Maria e João ambos tem dinheiro para gastar em seu bolso. Maria gasta $\frac{1}{4}$ da sua quantia e João gasta $\frac{1}{2}$ da sua. Maria pode gastar mais que João? Por que você pensa assim?

Figura 28 – Questão 5 da avaliação diagnóstico.
Fonte: Sant'Anna (2008, p. 109)

Em 2007, quando o teste foi novamente realizado, dentre os 28 alunos que também estiveram presentes na primeira aplicação, 24 acertaram a resposta. Nas Fig. 26 e 27 são apresentadas as respostas de uma mesma aluna em ambos os testes. Elas mostram que a aluna alcançou uma melhor apreensão do conceito trabalhado.


5. Maria e João têm ambos dinheiro para gastar em seu bolso. Maria gasta $\frac{1}{4}$ da sua quantia e João gasta $\frac{1}{2}$ do seu. Maria pode gastar mais que João? Por que você pensa assim?

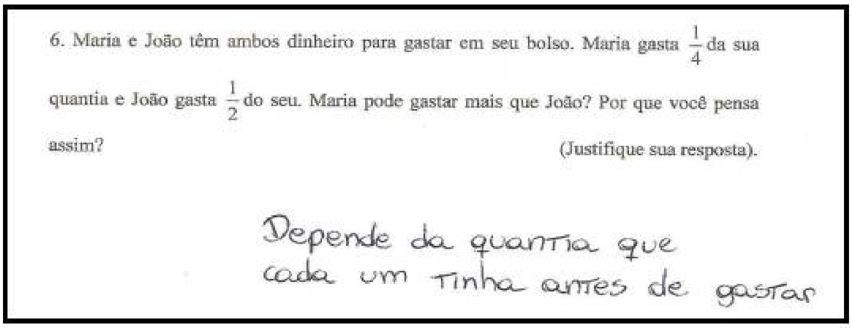
Sim. Pois $\frac{1}{4}$ é menos que $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

MUITO FÁCIL!

J	M	
$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	→ QUANTO GASTOU!
J	M	
$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	→ QUANTO SOBROU!
−	+	

Figura 29 – Questão 5 resolvida em 2006.
Fonte: Sant'Anna (2008, p. 111)


6. Maria e João têm ambos dinheiro para gastar em seu bolso. Maria gasta $\frac{1}{4}$ da sua quantia e João gasta $\frac{1}{2}$ do seu. Maria pode gastar mais que João? Por que você pensa assim?

(Justifique sua resposta).

Depende da quantia que cada um tinha antes de gastar

Figura 30 – Questão 6 resolvida em 2007.
Fonte: Sant'Anna (2008, p. 111)

De acordo com a pesquisadora, quando o conceito do objeto fração é ensinado como medida de um segmento na reta numérica, a transição dos números inteiros para os números racionais é facilitada. Nesse percurso, a habilidade de abstração do aluno vai sendo desenvolvida, facilitando a mudança do campo aritmético para o campo algébrico.

Considerações Finais

O presente trabalho trouxe um levantamento de algumas dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de frações. Dentre elas, cita-se os diferentes significados do número fracionário. Além disso, foi apresentada a proposta de ensino do professor Wu, que tem por objetivo tornar os alunos capazes de fazer a passagem dos números naturais para os racionais de maneira mais clara.

Inúmeras são as pesquisas encontradas que tratam sobre as dificuldades do ensino e aprendizagem de frações. No entanto, apesar de tantos trabalhos, os problemas que ainda são recorrentes. A falta de entendimento dos professores sobre o assunto é um dos principais problemas.

Dessa forma, com uma ênfase aos estudos de Wu, a partir do ensino da fração como medida de comprimento de reta, o estudo pode se dar de maneira mais eficiente, natural, clara e definitiva. O aluno é levado assim a reconhecer o que está fazendo, não apenas de maneira mecânica. Isso pois, ao inserir uma fração na reta numérica, o aluno consegue visualizar melhor a fração como um número, fato fundamental para o ensino de frações.

Assim a proposta de Wu, apresentada e sugerida, visa uma compreensão mais ampla do ensino de frações. Tal sugestão pode ajudar a superar os problemas de aprendizagem e de ensino do referido conteúdo. Wu participou da elaboração do CCSM nos EUA, mas os resultados por lá ainda não refletem se tal metodologia de fato é eficaz, devido sobretudo a animosidades políticas.

Aqui no Brasil, através da pesquisa de Sant'Anna, verifica-se que o ensino de frações da forma explicitada nos trabalho de Wu produz resultados satisfatórios. No entanto, o trabalho não encerra o questão. O que infere-se é que mais pesquisas sobre o tema ainda são necessárias, sendo o papel do professor na busca desse conhecimento imprescindível.

Bibliografia

1. ALVES, D. R. S.; MARTENS, A. S. Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do Ensino Fundamental. In: EDUCERE, 10. **Anais...** Curitiba, 2011. Disponível em: < http://educere.bruc.com.br /CD2011/pdf/6413_ 3640.pdf>. Acesso em: 04 abr. 2017.

2. BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational Number Concepts. In: LESH, Richard & LANDAU, Marsha (ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** Nova York: Academic Press, 1983.

3. BONZANINI, L. C.; BASSOI, T. S. Os professores e o ensino de frações no 2º ciclo do ensino fundamental. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T., orgs. **Ensinar e aprender matemática:** possibilidades para a prática educativa [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, pp. 145-159, 2016.

4. BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. Lei n. 9.394/96, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br /ccivil_03/ Leis/L9394.htm>. Acesso em: 10 out. 2016.

5. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília-DF: MEC/SEF, 1997.

6. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries):** matemática. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.

7. BRASIL. Ministério da Educação. **Brasil no PISA 2015**. Análise e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. 2016.

8. BRASIL. Ministério da Educação. **Ideb- Apresentação**. 2017a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/programas-e-acoes?id=180>. Acesso em: 20 abr. 2017.

9. BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017b. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2017.

10. BUESCU, J. Nas escolas, a matemática é a dos manuais escolares. **Público**. 2016. Disponível em: <https://www.publico.pt/2016/08/14/ciencia/noticia/nas-escolas-a-matematica-e-a- dos-manuais-escolares-1740756#&gid=1&pid=3>. Acesso em: 03 mai. 2017.

11. CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006. Disponível em: <revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/545/433>. Acesso em: 10 fev. 2016.

12. CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2006.

13. COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE et al. **Common Core State Standards for Mathematics**. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, 2010.

14. FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. **Teaching fractions. Educational practices series**. Geneva: International Academy of Education-International Bureau of Education. v.22, 2011.

15. FETEIRA, S. S. **Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade**. Leiria: Instituto Politécnico de Leiria, 2012.

16. FUNDAÇÃO Lemann. **Resultados do Ideb 2015**. 2016. Disponível em: <http://www.fundacaolemann.org.br/wp-content/uploads/2016/09/Resultados-do-Ideb-2015_Analise-Fundacao-Lemann.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2017.

17. GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

18. GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores das séries iniciais sobre frações**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

19. HANNULA, M. S. Locating Fraction on a Number Line. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 3, pp. 17-24, 2003.

20. KAMII, C.; CLARK, F. B. Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 14, n. 4, pp. 365-378, 1995.

21. KENDALL, John. **Understanding Common Core State Standards**. Heinle ELT, 2011.

22. KERSLAKE, D. **Fractions:** Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. London: The NFERNELSON Publishing Company, 1986.

23. KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Ed.), **Number and measurement: papers from a research workshop**, p. 101-144. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

24. KIEREN, T. E. The rational number construct: Its elements and mechanisms. In: T. E. Kieren (Ed.), **Recent research on number learning**, p. 125-149. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1980.

25. KIEREN, T. E.; NELSON, D. Partitioning and unit recognition in performances on rational number tasks. In T. Post & M. Roberts (Eds.), **The proceedings of the third annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter**, p. 91-102, 1981.

26. KIEREN, T. E.; NELSON, D.; SMITH, G. Graphical algorithms in partitioning tasks. **The Journal of Mathematical Behavior**; 4, pp. 25-36, 1985.

27. KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), **Number-concepts and operations in the middle grades**, pp. 53-92. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

28. KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), **Rational numbers: An integration of research**, pp. 49-84. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1993.

29. LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2.ª ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Association, 2006.

30. LEONG, Yu Kiang. Mathematics K12: Crisis in Education Mathematical Medley, v. 38, n.1, pp. 4-15, junho, 2012.

31. LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria. **El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática**, pp. 96-118, 1996.

32. LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações.**Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, pp.1-22, 2008.

33. LORTIE-FORGUES, Hugues.; TIAN, Jing; SIEGLER, Robert. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? **Developmental Review**, 38, pp. 201–221, 2015.

34. MACK, N. K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. **Journal for research in mathematics education**, pp. 16-32, 1990.

35. MARGENAU, H. **Open vistas**. New Haven, Connecticut: Yale UniversiLy Press, 1961.

36. MARIA, Isabel. **Lista de Países da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico)**. 2015. Disponível em: <https://www.artigos enoticias.com/artigos/gerais/300/lista_de_paises_da_ocde_organizacao_para_a_coope racao_e_desenvolvimento_economico.html>. Acesso em: 08 jun. 2017.

37. MARQUES, E. O. **Resultados de testes de larga escala:** um ponto de partida para ações de formação continuada de professores em matemática. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

38. MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

39. MONTEIRO, A. B.; GROENWALD, C. L. O. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos. **Alexandria:** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. UFSC, v. 7, pp. 103-135, 2014.

40. MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**. Porto Alegre, Vol. 7, n. 1, pp. 7-29, 2002.

41. NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Tradução de: COSTA, S. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

42. NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., EVANS, D., WADE. J.; BELL, D. Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. **Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences**. Paris, pp. 28-31, 2004.

43. NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter; WATSON, Anne. **Key understandings in mathematics learning. London: Nuffield Foundation**. 2009.

44. NUNES, T.; BRYANT, P; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D.; WADE, J. Children's understanding of fractions. **Revista Contrapontos**, v. 8, n. 3, p. 509-517, 2009.

45. PEREIRA, A. P. C. C. **O ensino de frações na escola Básica:** o currículo Common Core nos EUA, Hun-Hsi Wu e uma análise comparativa em dois livros didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT). UFF, 2015.

46. ROMANATTO, M. C. **Número Racional:** Relações Necessárias A Sua Compreensão. Tese de Doutorado. Universidade Estadual De Campinas, 1997.

47. SANT'ANNA, N. F. P. **Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra**. Tese (Doutorado em Educação). PUC, 2008.

48. SANTOS, C. **O conceito de fração e seus diferentes significados:** um estudo junto a professores que atuam no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2005.

49. SEMIS, Laís. MEC apresenta terceira e última versão da Base Nacional Comum Curricular. **Nova Escola**. 2017.

50. SIEGLER, R. et al. **Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade:** A practice guide. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, 2010.

51. SIEGLER, R. S.; LORTIE-FORGUES, H. Conceptual knowledge of fraction arithmetic. **Journal of Educational Psychology**, v. 107, n. 3, p. 909, 2015.

52. SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 301 f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

53. SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente:** Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. Tese Doutorado em Educação Matemática – PUC São Paulo, São Paulo, 2007.

54. TAKAHASHI, Fábio. O que os EUA podem ensinar ao Brasil sobre a implementação da base curricular. **Folha de S. Paulo**. 2017.

55. THAMES, M. H.; BALL, D. L. What mathematical knowledge does teaching require? Knowing mathematics in and for teaching. **Teaching Children Mathematics**, 17(4), pp. 220–225, 2010.

56. VASCONCELOS, C. B.; BELFORT, E. Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. In: Salto para o Futuro, **Boletim 13:** Discutindo práticas em Matemática. pp. 39-49 . Rio de Janeiro, 2006.

57. VASCONCELOS, I. C. P. Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do ensino fundamental. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

58. VAZ, R. F. N. **Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2013.

59. VENTURA, H. M. G. L. **A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações:** Uma Experiência de Ensino no 2º Ciclo do Ensino Básico. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.

60. VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). **Addition and subtraction:** A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

61. WHEELDON, D. A. **Developing mathematical practices in a social context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions**. Florida: University of Central Florida, 2008.

62. WU, H. **Chapter 2:** Fractions (Draft)- Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. Berkeley, CA, 2001. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/ wu/EMI2a.pdf>. Acesso em: 11 out. 2016.

63. WU, H. **Fractions, Decimals, and Rational Numbers**. Berkeley, CA, 2008 (revisado em 2014). Disponível em: < https://math.berkeley.edu/ wu/NMP fractions.pdf>. Acesso em: 10 out. 2016.

64. WU, H. The mis-education of mathematics teachers. **Notices of the AMS**, v. 58, n. 3, pp. 372-384, 2011.

Anexo

Entrevista com Hung-Hsi Wu concedida a Jorge Buescu, presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Nas escolas, a matemática é a dos manuais escolares

Hung-Hsi Wu é professor emérito da Universidade da Califórnia em Berkeley. Numa conversa com o matemático português Jorge Buescu, diz que o essencial no ensino da matemática é melhorar os conhecimentos dos professores. É isso que tem feito nos EUA desde os anos 90.

JORGE BUESCU Texto e ENRIC VIVES-RUBIO Fotografia 14 de Agosto de 2016, 8:30

Diz que a coisa mais importante que fez na vida foi começar a mudar a forma como é ensinada a matemática para professores. Dessa forma, considera Hung-Hsi Wu, a matemática pode chegar às crianças e aos jovens. "O essencial é melhorar o conhecimento matemático dos professores", resume este matemático que tem uma carreira científica ligada à geometria diferencial e que a partir dos anos 90 virou as agulhas para o ensino da matemática nos níveis básico e secundário. Tem vários livros publicados sobre estas questões – o último, de 2016, Compreender os Números na Matemática Escolar – Álgebra, será editado em breve em Portugal. O matemático português Jorge Buescu, da Universidade de Lisboa e novo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, autor de livros de divulgação científica como O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias e Primos Gémeos, Triângulos Curvos (Gradiva), entrevistou Hung-Hsi Wu quando da sua passagem recente por Portugal. Esta é uma conversa de matemáticos sobre o ensino da matemática e o que pode ser feito para o melhorar.

O que leva um matemático de primeira linha a nível mundial a enveredar pelos caminhos do ensino da matemática a nível básico e secundário?

A principal razão é que gosto de me envolver com as pessoas. Sentia profundamente o sofrimento dos alunos devido ao mau ensino da matemática, e a certo ponto – por volta de 1998 – senti que era necessário arregaçar as mangas e agir. E sabia que estava numa posição para fazer algo pelo ensino da matemática que quase mais ninguém estaria.

E hoje em dia dedica-se a questões de ensino da matemática a tempo inteiro?

É um trabalho a tempo inteiro! Mas eu não sou um "educador" no sentido clássico do termo. Dedico-me de corpo e alma a melhorar o ensino da matemática naquilo que é mais crítico: construindo melhores programas, contribuindo para melhorar os manuais escolares e, acima de tudo, na tarefa que descobri ser a essencial: melhorar os conhecimentos matemáticos dos professores.

Qual desses factores é o mais importante?

Não tenho quaisquer dúvidas: o essencial é melhorar o conhecimento matemático dos professores. Os professores dos Estados Unidos aprendem pedagogia, psicologia, etc. O que acho escandaloso é que, nos últimos cem anos, ninguém se tenha preocupado seriamente com a forma como os professores estão a aprender a matemática que mais tarde têm de ensinar. Quando dei por isto, fiquei incrédulo. Nem queria acreditar! Os especialistas em educação gostam muito de citar a obra pedagógica de Felix Klein [matemático do século XIX]. Mas a verdade dos factos é que nada do que ele escreveu tem relevância para o que os professores têm hoje de aprender para ensinar.

E onde estão hoje os maiores obstáculos?

Os mais graves começam logo nos níveis mais elementares. Por exemplo, as fracções. É um erro tremendo ensiná-las ab initio como fatias de piza. Por exemplo, imagine que a um miúdo treinado a pensar em fracções como fatias de piza é colocado o seguinte problema: se um carro anda 50 quilómetros em 45 minutos, qual a distância que percorre em duas horas e meia? E agora, onde estão as pizas? No meio da auto-estrada? E como é que se multiplicam ou dividem fracções? Como é que se multiplicam pizas?

Isso é muito estranho.

Muito estranho mesmo. Compreendi que, se queria mudar a forma como a matemática para professores é ensinada, tinha de começar logo do início. Pela maneira como são entendidas e ensinadas as fracções. É isso o que faço no meu livro [Compreender os Números na Matemática Escolar, a editar em breve em Portugal].

Ficou satisfeito com o resultado?

Foi a coisa mais importante que fiz na vida. Para chegar aos alunos, às crianças, a única forma que tenho é através dos seus professores. E sei, por experiência, que estou a chegar a estes. E, assim, a influenciar positivamente milhões de crianças e jovens. Isto é fundamental, porque se conseguir fazer isto com o objecto mais básico da matemática – números e fracções –, então sei que posso fazê-lo com tópicos mais avançados, como álgebra e geometria. E é essencial modernizar a forma e o conteúdo no ensino destes tópicos. Hoje em dia começam a levantar-se obstáculos aos alunos desde o início, muitas vezes, porque se ensina mal. Eu apelido a forma estruturalmente errada como a matemática é tratada nas escolas, de uma forma vaga, fluida e opaca como "matemática dos manuais escolares". É preciso ultrapassá-la!

Foi coordenador, entre 2001 e 2008, do National Mathematics Advisory Board [estudo nacional para melhorar o ensino da matemática escolar ordenado pelo Presidente dos EUA], e mais tarde esteve na criação dos Common Core Standards [conjunto de metas e programas a atingir em todos os estados dos EUA]. A adopção destas recomendações, programas e metas tem sido consensual?

De maneira nenhuma. Tem havido grandes resistências, e de sectores inesperados. Em primeiro lugar, por estranho que possa parecer, os pais. Os pais querem ver as suas crianças aprender exactamente da mesma forma que eles aprenderam 30 anos antes. Dá ideia de que não integram a noção de que se construíram métodos melhores. De facto, já em 2010 nós tínhamos redigido um curriculum escolar completo, do jardim-escola ao 12.º ano, lógico, coerente, estruturado e integrado. Mal estaríamos se fosse igual ao de há 30 anos! O grande desafio foi elaborar metas e programas que as crianças compreendam bem e que, simultaneamente, sejam matematicamente correctos e rigorosos – como tínhamos anteriormente feito com as fracções, que deixaram de ser pedaços de piza para serem pontos numa recta. Mas os pais reagem mal a isto: as crianças chegam a casa, fazem perguntas e... muitas vezes eles não sabem as respostas. E pensam: quando tinha esta idade não era isto o que aprendia.

Por que acha que houve esta reacção?

Quando mudaram os programas e metas, teria sido necessário esclarecer pais e famílias sobre as mudanças que iam acontecer e, acima de tudo, por que razão eram necessárias. Era preciso explicar que não se estava a mudar só porque sim, mas porque as crianças vão aprender matemática melhor. Os processos de pensamento, sendo mais correctos, são mais transparentes, mais simples de aprender. As crianças vão conseguir ultrapassar a fobia da matemática. O problema, para retomar o exemplo das fracções, em pensar em fracções como fatias de piza é que, quando passamos a um outro contexto, as crianças deixam de reconhecer que se trata de um problema sobre números. Tudo fica opaco, e muitas vezes só é ultrapassável por memorização bruta, decorando técnicas para resolver problemas de contextos diferentes – pizas, distâncias percorridas por carros, temperaturas... – como se fossem problemas diferentes, quando o objectivo é precisamente o oposto: trata-se, com roupagens diferentes, do mesmo tipo de problemas, e os métodos de resolução são os mesmos. Trata-se apenas de números e fracções. A forma opaca como a “matemática dos manuais escolares” trata as fracções faz com que se perca esta mensagem simplificadora.

De que sector encontrou maior resistência às reformas?

De longe, da parte dos professores. E aqui o problema é bastante mais grave; creio mesmo que é este o ponto crucial. Para ser muito directo, o facto é que a maioria dos professores só conhece, infelizmente, matemática incorrecta. E portanto, do ponto de vista de um professor, todas estas reformas parecem muito... assustadoras. Trata-se de uma reacção muito humana e compreensível. Se sinto que alguma coisa me ameaça, resisto. Não quero abandonar a minha zona de conforto. E assim muitos professores começaram a atacar os programas utilizando argumentos sem qualquer sentido, quando no fundo o problema era apenas a sua própria resistência à mudança.

Mas houve também uma questão política: seria necessário realizar um investimento gigantesco na formação e reeducação dos professores para estas mudanças; e esse investimento não foi feito. Isto era absolutamente essencial, porque os professores nem tinham noção da razão pela qual era necessário reformar a forma de ensinar. Nunca tinham visto a forma correcta de fazer as coisas.

Portanto, não houve apoio político à formação de professores?

Exactamente. Alertei veementemente para esta necessidade, mas os decisores não me deram ouvidos. Foi um tremendo erro. Passei eu a trabalhar directamente com os professores. Ou melhor, continuei com redobrada intensidade, pois já faço formação de professores de matemática desde o ano 2000.

E qual é a sua experiência nesse particular?

Comecei por criar, em Berkeley, Escolas de Verão para Professores. Os professores eram divididos em três grupos: elementar (jardim-escola ao 5.º ano), intermédio (final do Básico) e secundário. Cada grupo tinha cursos intensivos de três semanas, onde era explicada em detalhe e com rigor a matemática que os professores precisam de ensinar. A experiência foi fantástica: a grande maioria saía desses cursos inspirados, com a sensação de pela primeira vez terem compreendido a fundo aquilo de que estavam a falar nas aulas.

Está a dizer que os professores não compreendem verdadeiramente aquilo do que falam?

Nos EUA, muitos não compreendem. O problema é este: as universidades não ensinam a matemática de que os professores vão falar. Ensinam matemática avançada – grupos, anéis ou funções holomorfas – na esperança, totalmente infundada, de que ao aprendê-la os futuros professores fiquem intelectualmente equipados para ensinar matemática elementar. Mas não ficam. E quando chegar a altura de ensinarem fracções, para onde se vão virar? Vão pensar, "como é que me ensinaram estas coisas há 15 anos?", e repete-se o ciclo. Repetem exactamente o que aprenderam na escola porque nunca viram outra forma de o fazer. É este círculo vicioso a origem da "matemática dos manuais escolares".

E como se pode quebrá-lo?

Vou dizer-lhe a minha experiência pessoal. Tendo-me apercebido de que era necessária uma solução mais sistemática, acabei por criar, na Universidade de Berkeley, uma sequência de três semestres de disciplinas de Matemática para Professores. Este curso está a funcionar continuamente desde 2006. Escrevi livros de texto específicos para estas disciplinas, pois não existia em lado algum nada de semelhante. O objectivo foi, como disse no início da entrevista, colmatar a muito deficiente preparação científica dos professores nos fundamentos das matérias que vão ensinar.

Esses livros já existem?

Os livros já existem, são utilizados nos cursos e irão ser publicados autonomamente dentro de um ano e meio. Note que não foram uma imposição minha! Pelo contrário: estes materiais evoluíram de acordo com o feedback dos professores, que foi incrivelmente valioso. Eles próprios me iam dizendo aquilo com que valia a pena gastar mais tempo – e aquilo com que não valia. A colaboração dos professores foi essencial para a construção e o sucesso deste curso. A abertura de espírito é essencial em todo este processo. Se eu posso transmitir aos professores aquilo que eles não sabem, também eles sabem muito melhor do que eu aquilo que não sabem! Num certo sentido, foram os professores que me disseram o que ensinar. Curiosamente, o facto de este curso não ter financiamento federal acabou por ser uma vantagem: não tinha nenhuma comissão a dizer-me o que fazer. Tivemos toda a liberdade para construir as nossas próprias soluções. E o resultado foi excelente.

Quais são as variáveis fundamentais para quebrar o círculo vicioso de que falava há pouco?

Em primeiro lugar, como já disse, o fundamental é colmatar a deficiente formação dos professores nas matérias que vão ensinar. Neste ponto as universidades têm uma grande responsabilidade. Em segundo lugar, os manuais escolares. Estes têm uma importância muito maior do que poderia parecer. É que não são usados apenas pelos alunos: são usados pelos professores. Muitos professores não têm tempo, não têm informação, não têm recursos para pensar profundamente na forma como vão ensinar. E portanto limitam-se a seguir o que está no manual. Hoje em dia os manuais são o que são: maus. Ora nos EUA o Governo federal não pode intervir na educação. E portanto o que acontece é ditado apenas pelo mercado. Os editores não têm incentivo para fazer manuais melhores, porque vão vender menos. Portanto sobrevivem os piores, numa espécie de selecção natural invertida. É insano!

Isso funciona mesmo assim?

Deixe-me contar-lhe uma história verídica. Fui consultado por uma grande editora de manuais, que me perguntou quais as alterações que deveriam fazer para estarem de acordo com os novos programas. Fiz um relatório detalhado. Dali a umas semanas fui contactado pelo representante da editora, que me disse que não iam fazer nada do que eu recomendara. "Mas porquê?", perguntei. Ao que ele me respondeu que se o fizessem iam vender muito menos, e "não podiam correr o risco de terem manuais com os quais os professores não se sentissem confortáveis".

Espantoso.

É por isso que todo este equilíbrio perverso só pode ser quebrado pelo lado dos professores. Temos de formar melhor os professores, temos de ter melhores professores, para que sejam eles a dizer aos editores "como se atrevem a produzir este lixo?", e a não adoptar maus manuais. São os professores a chave do problema. É quase irónico: os políticos acham que os problemas da educação se podem resolver atirando mais dinheiro para os problemas, fazendo mais obras, pondo mais computadores nas escolas. Mas a chave dos problemas é humana: são os professores.

Tudo isto é muito interessante para Portugal. Entre nós, houve recentemente um redesenhar das metas e programas do básico e secundário num sentido muito semelhante ao que o professor Wu descreve para o caso americano. E, também como no caso americano, as grandes reacções vieram precisamente de certas franjas de professores e de associações de professores, que os descrevem como contendo "matemática a mais e educação a menos". Pode comentar?

Não conheço de perto o caso português, pelo que posso apenas fazer comentários genéricos. Por várias razões, sobretudo pelas que já apontei, uma tal reacção é, num certo sentido, de esperar. Para o sucesso das reformas, é crítico apostar muito forte na formação de professores. Por outro lado, é absolutamente necessário ter muito cuidado com a qualidade dos manuais escolares. Se houver manuais de excelência que concretizem programas e metas, eles irão sem dúvida ajudar a conquistar os professores.

Um argumento que se ouve por vezes é que programas e metas teriam uma abordagem demasiado "formal", entendendo-se por isso que se deixou de praticar uma abordagem quase exclusivamente intuitiva e informal, em que os conceitos fundamentais se deixam vagos e imprecisos.

É claro que o excesso de formalismo é pernicioso; basta recordar a malfadada experiência da Matemática Moderna nos anos 60. No entanto, se é nesse sentido que é utilizado o termo "formal", essa crítica não faz sentido. É absolutamente impossível percorrer a matemática do básico e secundário apenas com ideias vagas e sem rigor. Quando se introduz um conceito, é necessário fazê-lo de forma clara, não ambígua e com rigor – até mesmo a propósito das fracções, no ensino básico. Além disso, a matemática do jardim-escola ao 12.º ano não é um fim em si. É uma escadaria que tem de ser percorrida, também, tendo como objectivo o atingir a matemática superior. É claro que não se pode ensinar a matemática do básico e secundário da mesma forma que se ensina a matemática superior; mas não se pode nunca perder de vista que um dos objectivos é preparar os alunos para aprender a matemática superior. E não podemos estar a vender gato por lebre. É forçoso, a pouco e pouco, conduzir os alunos no sentido da abstracção, porque a matemática sem abstracção não é matemática. E isso deve fazer-se a todos os níveis. A abstracção não é um fim em si; faz-se porque se revela muito útil. As fracções não são pedaços de piza, são pontos numa recta numérica. Quando pensamos neles desta forma, conseguimos fazer coisas que não conseguimos com pizas. A abstracção é útil!

Pode elaborar?

A questão da abstracção é a mais importante na minha luta com os “especialistas em educação”. Estes insistem em que a abstracção é má porque sim. No entanto, eu trabalho directamente com professores e vejo o que se passa na realidade, no terreno. Por exemplo, nós temos um programa em que damos formação intensiva a professores cinco vezes por ano, uma semana de cada vez. Temos portanto feedback mensal desses professores, e eu vejo que temos todos os anos mais professores, que estão cada vez mais ligados à nossa abordagem... Para retomar o exemplo das fracções, nós trabalhamo-las desde o início da forma correcta, esquecendo as pizas. Depois, quando chega a parte de somar fracções, as coisas tornam-se muito mais claras e simples. Cada professor vai para a sua escola e ensina de acordo com os nossos métodos. Em geral, têm uma adesão total por parte dos alunos, cujas reacções são do tipo: “Ah! Afinal era assim tão fácil? Isto consigo eu fazer!” É, além do mais, muito gratificante.

Os seus livros sobre ensino da matemática elementar vão ser publicados em Portugal no final deste ano, numa edição apoiada pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Como foi o seu impacto nos EUA? Têm marcado a diferença?

Sim e não. Os meus livros inicialmente passaram despercebidos porque, na comunidade da educação, foram boicotados. Durante mais de um ano, não houve uma única recensão, nem positiva nem negativa. Ergueu-se um muro de absoluto silêncio. E o silêncio é a melhor forma de matar ideias... Há cerca de um ano, Deborah Ball, professora de matemática da Universidade do Michigan em Ann Arbor e directora do Departamento de Educação, fez-me exactamente essa pergunta. Eu dei-lhe esta resposta. Ela achou “um escândalo”, e ofereceu-se imediatamente para fazer uma recensão aos livros. Então sim, saíram da obscuridade a que os educadores os queriam remeter e agora estão bastante difundidos entre os professores. Veremos se podem fazer a diferença. No próximo ano e meio publicarei mais dois para a matemática do 3.º ciclo e secundário.

Há alguma mensagem que queira deixar especificamente para Portugal no que se refere ao ensino da matemática?

Portugal tem muito maiores possibilidades de sucesso nestas reformas do que os EUA. É um país tão pequeno! Pense nisto: só o meu Estado, a Califórnia, tem quatro vezes a população de Portugal. Para lá de lidarem bem com os três problemas essenciais – preparação científica dos professores, programas e manuais escolares –, é fundamental que existam administradores esclarecidos e com conhecimento profundo dos problemas que saibam estabelecer o diálogo e uma ligação profícua com os professores. Uma decisão tomada no topo, que não tenha a colaboração dos professores, não vai funcionar. É por isso que estou sempre a mudar os meus cursos de formação para professores: não tenho a pretensão de saber tudo. Quando não concordo com uma ideia, digo “então explique-me lá porque pensa assim”. Talvez seja essa a origem das minhas lutas com os autoproclamados “especialistas em educação”: estão convencidos de que estão na posse de toda a verdade, são impermeáveis a argumentos e muitas vezes nem estão sequer abertos ao diálogo. Mas nas questões de educação é essencial manter o espírito aberto. Ninguém sabe tudo.