Instituto Federal do Rio de Janeiro

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

Romário da Silva Soares

Geometria esférica e astronomia de posição : uma proposta interdisciplinar de matemática, geografia e física na educação básica

Volta Redonda
2018

Romário da Silva Soares

Geometria esférica e astronomia de posição : uma proposta interdisciplinar de matemática, geografia e física na educação básica

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2018

Soares, Romário da Silva

S676g Geometria esférica e astronomia de posição/Romário da Silva Soares. - - RJ: Volta Redonda, 2018.

69 f.: il.

Orientador: Profª Me. Roberta Fonseca dos Prazeres

Monografia (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2018.

1.Astronomia. 2.Geometria esférica. 3. Interdisciplinaridade I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Prazeres, Roberta Fonseca dos III. Título

CDU 52

ROMÁRIO DA SILVA SOARES

GEOMETRIA ESFÉRICA E ASTRONOMIA DE POSIÇÃO : UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR DE MATEMÁTICA, GEOGRAFIA E FÍSICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em julho de 2018.

Banca Examinadora

Roberta Fonseca dos Prazeres.

Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Orientadora/IFRJ

Dr. Andrey Dione Ferreira
Convidado 1/IFRJ

Me. Glauco Antoni Diniz Monteiro
Convidado 2/IFRJ

Me. Magno Luiz Ferreira
Convidado 3/IFRJ

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus, por possibilitar realizar este trabalho.

A minha família, especialmente aos meus pais, Antônio Rodrigues e Maria de Fátima Soares, pelo apoio imparcial que sempre deram desde a minha infância aos estudos das ciências.

Aos meus padrinhos, Deusded Gomes e Norma Dutra, por me transmitirem os valores éticos e morais e ao me ensinarem que o estudo é a direção para seus objetivos.

A minha querida companheira Gláucia Dantas, pelos momentos de compreensão e por estar desde sempre ao meu lado. Por propiciar momentos de alegria e serenidade.

À mestra e orientadora Roberta Fonseca, por me oferecer suporte nos momentos em que mais precisei. Pelos ensinamentos preciosos, pelas incansáveis revisões e reflexões sobre o tema que permeou este trabalho, pelas nossas reuniões, nossos momentos de descontração e por ser uma grande amiga.

Aos amigos, pelo companheirismo e por sempre estarem ao meu lado em toda minha trajetória acadêmica.

Aos membros da banca examinadora, por avaliarem este trabalho.

Enfim, agradeço a todos que colaboraram de algum modo para possibilitar a concretização deste trabalho.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."(Albert Einstein)

RESUMO

A matemática é uma ciência que, ainda hoje, revela muitas dificuldades em seu processo de ensino-aprendizagem. Por isso, os professores devem sempre procurar novas formas de lecionar os conteúdos, de maneira a permitir melhor compreensão por parte de seus alunos. Partindo dessa justificativa, o presente trabalho tem como objetivo fundamental estabelecer uma conexão entre a matemática, a geografia e a física. Com esse propósito apresentam-se, assim, as diversas interfaces que o conceito de interdisciplinaridade propicia, em conformidade com as orientações e com os objetivos educacionais propostos pelos documentos oficiais da educação. Nessa perspectiva, são propostas atividades interdisciplinares entre as diferentes ciências. As situações enumeradas no trabalho permitem a viabilização da percepção e da utilização de conceitos e propriedades básicas da astronomia. Com o auxílio da estrutura lógica e dedutiva da geometria esférica, tais situações surgem como elemento motivador de contextualização no ensino de matemática dentro da educação básica. O caráter utilitário da proposta encontra-se na forma como as atividades são apresentadas, utilizando-se de situações-problemas que abrangem, em suma, uma excelente associação entre as disciplinas mencionadas.

Palavras-chave: Astronomia; Geometria esférica; Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

Mathematics is a science that, even today, reveals many difficulties in its teaching-learning process. Therefore, teachers should always look for new ways of teaching content in order to allow better understanding of their students. Based on this justification, the main objective of this work is to establish a connection between mathematics, geography and physics. With this purpose, this research presents the different interfaces that the concept of interdisciplinarity provides, in accordance with the guidelines and educational objectives proposed by official education documents. In this perspective, interdisciplinary activities between the different sciences are proposed. The situations enumerated in this work allow the realization of the perception and the use of basic concepts and properties of astronomy. With the aid of the logical and deductive structure of spherical geometry, such situations appear as a motivating element of contextualization in the teaching of mathematics within basic education. The utility of the proposal lies in the way the activities are presented, using situations-problems that, in short, cover an excellent association between the disciplines mentioned.
Keywords: Astronomy; Spherical geometry; Interdisciplinarity.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A astronomia se caracteriza como uma ciência que parte das observações dos fenômenos para explicar situações referentes aos corpos celestes. Através dela são estabelecidos métodos, modelos e teorias que quantificam e relacionam grandezas que permitem o cálculo de tempo e distância. Por meio desses conhecimentos são obtidos, por exemplo, o tamanho da Terra e do Sol, utilizando-se ferramentas geométricas.

A geometria, nome que vem do grego e significa *medida da terra*, se ocupa das formas e suas propriedades. A geometria baseada nos postulados de Euclides ($\sim$ 300 a.E.C), ou geometria euclidiana, é a explicada no ensino básico. Por esse motivo, muitas vezes, tal geometria é vista como única. O estudo da geometria euclidiana, contudo, não é suficiente para descrever todos os fenômenos do mundo.

Tal fato pode ser justificado visto que diversas aplicações no mundo físico, como a obtenção da localização de pontos no planeta Terra, que se aproxima muito de uma esfera (de fato um geoide, com excentricidade muito pequena), não se encaixam nessa geometria. A geometria euclidiana simplifica uma série de conjecturas práticas, mas não todas, visto que o mundo não é um plano.

Diante desse pensamento indaga-se, na presente pesquisa, sobre de que forma podem ser desenvolvidas, no aluno, competências necessárias e indispensáveis para além da geometria euclidiana. Tendo tal pergunta em vista pretende-se, com esse trabalho, realizado por meio de pesquisa bibliográfica, dissertar sobre como conteúdos de astronomia podem ser abordados em sala de aula permitindo, assim, uma introdução a conteúdos relacionados a geometrias não euclidianas.

A proposta de se trabalhar geometrias não euclidianas fornece uma forma construtiva e integradora de ensinar conceitos e domínios de conhecimento ligados a outras disciplinas. Ou seja, os conteúdos de geometria podem ser ensinados de forma interdisciplinar. Além disso, o ensino de geometria esférica surge como recurso motivador e capaz de vivenciar os conteúdos de forma integral, auxiliando na construção do saber.

Como objetivos específicos, tem-se o de apresentar alguns momentos importantes na história da astronomia, além de fornecer um panorama sobre o ensino de astronomia no Brasil. Como maneira de apresentar conceitos relacionados à astronomia em sala de aula, disserta-se sobre a interdisciplinaridade e, posteriormente, pretende-se mostrar alguns resultados importantes associados à geometria esférica.

Partindo dessa perspectiva, o trabalho está organizado em sete capítulos bem delineados, propiciando uma apresentação sequencial do tema proposto. No primeiro capítulo, coloca-se como a pesquisa foi realizada e, no segundo, apresenta-se o contexto histórico da astronomia, desde o desenvolvimento em civilizações antigas até a astronomia ser constituída como ciência. Para tanto, o capítulo destinado ao contexto histórico organizou-se em quatro seções, que abordam a origem da astronomia, o estabelecimento da astronomia como ciência na Grécia antiga, a astronomia no Renascimento e a astronomia atual.

No terceiro capítulo, tem-se como tema a educação em astronomia no Brasil. Verifica-se toda a trajetória pela qual passou o ensino de astronomia no país, desde a chegada dos europeus ao Brasil, destacando os acontecimentos mais significativos, até sua inserção na educação básica. Ressaltam-se, também, diversas propostas de documentos oficiais de educação que incluem sua contextualização dentro do âmbito escolar.

O quarto capítulo destina-se à apresentação de uma concepção essencial neste trabalho, que é o conceito de interdisciplinaridade. Tem-se, por foco, a fundamentação teórica acerca dos temas abordados anteriormente, buscando-se apresentar a contextualização da matemática que se dá através da astronomia e da geografia. São abordados conceitos inerentes à interdisciplinaridade no âmbito escolar e em ensino de geometria, em conformidade com as orientações oficiais.

No quinto capítulo propõe-se um estudo sucinto sobre a história do surgimento das geometrias não euclidianas e a sua inserção na educação básica. O levantamento histórico do surgimento das geometrias não euclidianas tem, como ponto de partida, os postulados de Euclides e os fundamentos matemáticos que motivaram a existência de outras geometrias, através de inúmeras tentativas de se provar o quinto postulado.

No sexto capítulo aborda-se a geometria esférica com conceitos, corolários, proposições, teoremas e objetos matemáticos inerentes ao estudo de triângulos esféricos e suas propriedades. É apresentada, ainda, a esfera celeste, que permite a correlação entre a geometria, a geografia e a astronomia, por meio do estudo das coordenadas astronômicas e geográficas, bem como a distância entre dois pontos no globo terrestre. A posteriori, são apresentados alguns conceitos sobre o triângulo de posição.

No sétimo capítulo, faz-se o uso da resolução de problemas como instrumento de aprendizagem matemática. As situações expostas permitem que, através de conhecimentos contextualizados, se faça a ligação entre as disciplinas de astronomia e geografia, necessárias para a introdução de temas e conteúdos de geometria esférica. E, finalmente, conclui-se o trabalho com as considerações finais.

1 METODOLOGIA

O presente trabalho foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica, utilizando-se de diversas publicações sobre os assuntos tratados, como livros, teses e artigos. Segundo Marconi e Lakatos (2003), essa forma de pesquisa não se constitui em uma simples reprodução do que já foi abordado sobre o assunto, mas uma nova visão acerca do tema em estudo.

Diante dessa premissa, a pesquisa bibliográfica permite um entendimento sobre como a astronomia, a geografia e a geometria esférica podem ser utilizadas no ensino de maneira interdisciplinar. Visto que a educação passa por diversas mudanças no decorrer do tempo, novas transformações são necessárias para a criação de um conhecimento pedagógico eficiente, que é um dos objetivos dessa abordagem.

Indaga-se, assim, sobre a necessidade de desenvolver, no aluno, competências necessárias e exigidas no mundo contemporâneo como forma de realizar interpretações de inúmeras informações, cada vez mais globais. Os conceitos abordados na astronomia e na geometria esférica são trabalhados no decorrer do processo de aprendizagem em todos os níveis da educação básica, sendo capazes de trazer significado e sentido para o processo de aprendizagem.

Pode-se exemplificar, dentro da geografia, os conteúdos sobre fuso horário, linha do horizonte, meridianos e paralelos. Em matemática, esses conceitos poderão ser abordados junto com as concepções de esfera, superfície esférica, área da superfície esférica, área de um fuso, volume da esfera e até de esclarecer a trajetória de um avião. Nesse caso, consegue-se mostrar que tal trajetória não é uma linha reta, mas sim, muitas vezes, o arco de uma circunferência.

A introdução de geometrias não euclidianas na educação básica, apesar de não ser a geometria mais aplicada e muito menos usada na resolução de problemas em todos os níveis de ensino torna-se, portanto, impreterível. Isso porque propiciará uma visualização mais detalhada e real do mundo, posto que diante do cotidiano do aluno há uma vasta pluralidade de objetos com superfícies das mais variadas formas.

Partindo dessa perspectiva lacunar, no sétimo capítulo são propostas algumas sugestões de atividades extraídas de Coutinho (2001), Alves (2009), Carvalho (2014), Oliveira Filho e Saraiva (2014) e Abreu e Ottoni (2015). O propósito das situações indicadas é o de evidenciar os conceitos de geometria esférica, bem como mostrar aos alunos à existência de novas geometrias através da representação da superfície esférica.

Antes de apresentar tais atividades, faz-se uma exposição sobre astronomia, interdisciplinaridade e conceitos relacionados à geometria esférica. No próximo capítulo, disserta-se sobre os caminhos históricos relacionados à astronomia.

2 ASTRONOMIA - CONTEXTO HISTÓRICO

Neste primeiro capítulo, tem-se uma breve descrição sobre a história da astronomia. Para essa finalidade, foram utilizados os textos de Araújo (2013), Matsuura (2013), Porto e Porto (2008), Rooney (2017) e Selin (2000).

A astronomia é a ciência que estuda os corpos celestes, sua estrutura física, movimentos, origens e posições. Dessa forma, a astronomia está relacionada a outras áreas de conhecimento como, por exemplo, a matemática e física.

A astronomia, considerada a mais antiga das ciências, se desenvolveu inicialmente no mundo pré-histórico, pela necessidade de sobrevivência em um ambiente natural e hostil. Existem evidências de observações astronômicas entre os povos da China, Egito, Índia e Mesopotâmia que datam entre 5000 a.E.C. e 3000 a.E.C. (FERREIRA, 2003).

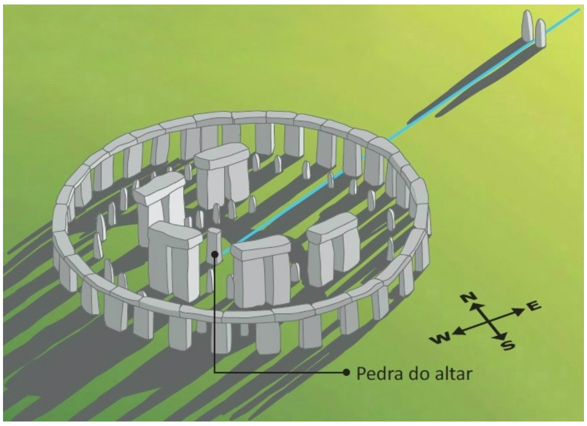
Essas civilizações observavam o movimento do Sol, da Lua e das constelações com a finalidade de interpretá-los e utilizá-los para a criação de um calendário. O intuito era regular suas atividades cotidianas, como a manutenção do tempo para práticas de cultivo. Através da descrição do que poderia vir dos céus, muitas vezes utilizou-se de mitologia junto a observações e mediações cuidadosas.

> Ainda na pré-história, o domínio da agricultura dependeu da compreensão do ciclo das estações do ano, determinado pelo movimento aparente do Sol. Esse tipo de conhecimento, indispensável na identificação do momento ideal para a preparação da terra, o plantio ou a colheita, aparece cristalizado nos monumentos de pedra de diversas culturas, de Stonehenge, na Grã-Bretanha, a pedra Intihuatana em Machu Picchu, no Peru. (ITOKAZU, 2009, p. 42)

A mais conhecida evidência de povos que utilizavam os céus é o monumento de Stonehenge, na Inglaterra, estrutura erguida por volta de 3100 a.E.C. Um estudo realizado pelo antiquário e cientista William Stukeley (1687 - 1765), em 1740, apontou que o eixo principal do monumento estava apontado na direção do nascer do Sol, assim como na Fig. 1, que mostra a configuração ao amanhecer no dia do solstício de verão do Hemisfério Norte.

Durante o mundo pré-histórico não havia distinção entre a astrologia e a astronomia, tampouco as pessoas compreendiam ou conheciam o conceito de ciência. Enquanto a astronomia é uma ciência que se caracteriza como o estudo do movimento, natureza e história dos corpos celestes, a astrologia é um modo de prever eventos a partir de observações oriundas do céu, muitas vezes sendo associada a práticas religiosas. Entretanto, a separação entre astrologia e astronomia não aconteceu da noite para o dia. Durante muitos milênios elas continuaram inseparáveis.

Figura 1 – Amanhecer no dia do solstício de verão do Hemisfério Norte



Fonte: Breve História da Astronomia.[1]

> Com as civilizações estabelecidas vieram registros escritos e matemática, permitindo que as observações mais detalhadas fossem feitas e mantidas ao longo de muitos anos. Então, cerca de 2.500 anos atrás, os antigos gregos começaram a explicar os cosmos sem recorrer à mitologia ou ao sobrenatural e começaram assim a ciência da astronomia. (ROONEY, 2017, p. 7, tradução nossa)

Na próxima seção são apresentados acontecimentos relacionados às origens dessa nova ciência, a astronomia.

2.1 Origens

Os estudos relacionados à história da astronomia mostram que as observações de fenômenos astronômicos não é algo recente. Desde a antiguidade, o céu vem sendo observado. O sistema babilônico é considerado o mais antigo sistema conhecido de astronomia, sendo desenvolvido por volta de 1800 a.E.C. Registros indicam que a civilização babilônica, através de suas observações de regularidade de fenômenos celestiais que possibilitava marcar ou medir a passagem do tempo, estabeleceram os conceitos de dia, mês e ano.

A astronomia dos babilônicos serviu, portanto, para a criação do possível primeiro calendário, onde foram utilizados métodos matemáticos para a observação dos movimentos do Sol e da Lua, além de previsões de eventos astronômicos. Tal conhecimento acumulado serviu de base para a astronomia das demais civilizações.

Já a astronomia chinesa desenvolveu-se, em grande parte, de forma independente, como consequência de sua localização. Além de o Himalaia formar uma barreira geológica natural, havia políticas de isolamento com as demais civilizações. Assim como os babilônios desenvolviam sua astronomia, a civilização chinesa também fazia seus registros astronômicos com seu próprio método matemático para práticas de observação e para o estudo de

[1] Disponível em: <http://www.astro.iag.usp.br/~aga210/pdf_2016a/Introducao_HistoriaAstronomia_2016.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2018.

constelações, estrelas e planetas, como apontam registros de nomes de estrelas que foram preservados nos ossos de oráculos entre 1600 a.E.C. e 1046 a.E.C. Os chineses usavam as estrelas circumpolares, que são aquelas que, em certas latitudes da Terra, não desaparecem abaixo do horizonte, como ponto de referência para os céus.

Os registros da astronomia chinesa fornecem um conjunto de informações interessantes, uma vez que neles estão evidenciados eventos sobre corpos celestes, de cometas brilhantes a estrelas e supernovas, como a explosão de uma supernova em 1054 a.E.C. (atual Nebulosa de Caranguejo). Escavações arqueológicas realizadas na província de Shanxi, em 2005, mostram que uma plataforma esculpida, de aproximadamente 60 metros, foi usada para localizar o aumento e a configuração do Sol em diferentes épocas do ano.

Os egípcios também se baseavam em observações do céu tendo, com isso, diversos propósitos. O surgimento de determinadas estrelas, por exemplo, sinalizavam o provável aumento das águas do rio Nilo. Além disso, a grande pirâmide do Egito está alinhada com os pontos cardeais, e muitos templos estão alinhados ao longo do eixo do Sol.

O conhecimento dos astros não fica somente restrito às civilizações orientais. A astronomia mesoamericana ainda é pouco conhecida, mas há inúmeros registros de artefatos de civilizações da era pré-colombiana que apontam o desenvolvimento da astronomia entre os Astecas no México até a civilização dos Maias. Tais artigos ressaltam sua notável linguagem, escrita e sua precisão nos calendários e observações dos astros.

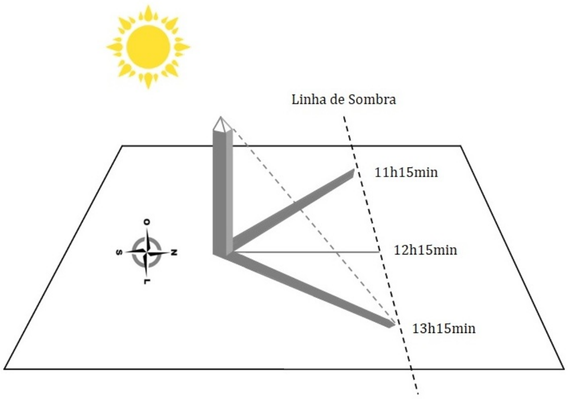
A astronomia brasileira, por exemplo, está fortemente ligada a práticas de observações indígenas, que fornecem referências para o conhecimento astronômico das sociedades antigas que habitaram o Brasil. Grande parte dessas referências se deve ao estudo da arqueoastronomia, que é o estudo da astronomia praticado por civilizações pré-históricas que utilizavam monumentos para realizar observações dos astros. Alguns estudos que buscam compreender a astronomia dos índios se baseiam em conclusões retiradas de megálitos[2] presentes em diversos sítios arqueológicos espalhados pelo Brasil.

Os registros indígenas sobre os movimentos do Sol eram obtidos por antigos instrumentos de astronomia, chamados de gnômons. O gnômon consiste em uma haste cravada verticalmente no solo, do qual se observava a sombra projetada pelo Sol, sobre um terreno horizontal, determinando assim o meio dia solar, os pontos cardeais e as estações do ano.

A astronomia indígena brasileira foi pouco estudada e menos ainda integrada dentro dos saberes dos próprios brasileiros, tampouco considerada em seus valores culturais. Matsuura (2013) afirma que diversos sítios arqueológicos reforçam a concepção de que a astronomia indígena não é tão simples quanto se pensava. Registros evidenciam que, muito antes de Galileu, os índios tupis-guaranis já entendiam que as fases da Lua exerciam influência nas marés. Como exemplo se pode citar o fenômeno natural "pororoca", palavra

[2] São blocos de pedra de grandes dimensões usados em construções pré-históricas como, por exemplo, os de Stonehenge, na Inglaterra, já citado anteriormente.

Figura 2 – Gnômon



Fonte: Elaborada pelo autor.

essa originária do tupi que tem como significado "causar um grande estrondo". Esse fenômeno foi observado pelos tupis-guaranis e era associado, em grande parte, aos períodos de Lua cheia.

Portanto, conclui-se que a observação de diferentes acontecimentos e a busca por sua compreensão foram motivos de estudos em diversas civilizações. Fatores que interferiam em suas vidas cotidianas, como as variações de temperatura e clima, associados diretamente ao deslocamento do Sol, serviram, por exemplo, para estimular a criação de calendários com o intuito de regulação das atividades cotidianas e agrícolas. Na próxima seção disserta-se sobre a relação entre esses estudos e a matemática.

2.1.1 Matemática e astronomia

Os babilônios possuíam conhecimento sobre notáveis relações geométricas relacionadas com a mensuração prática. Alguns registros desvelam que havia problemas geométricos que levavam a equações quadráticas, cúbicas e até a aproximações de raízes quadradas. Os babilônios transcreviam sua escrita e sua matemática em tábuas de argila cozida, caracterizadas por marcas cuneiformes com registros matemáticos de práticas cotidianas. Nelas havia processos aritméticos de multiplicação, de inversos multiplicativos, de quadrados e de cubos.

Os babilônios desenvolveram um sistema sexagesimal de numeração, criando a divisão sexagesimal do círculo. Essa divisão foi feita em 360°, sendo cada grau dividido em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos de grau. Com o sistema estabelecido, dividiram o tempo com base no movimento do Sol e da Lua, constituído em 12 meses lunares, cujo início era indicado pelo aparecimento da Lua nova. Por volta do século XVIII a.E.C. estabeleceram o ano, adotando o calendário lunar, em que o ano lunar tinha 354 dias.

Os chineses, por volta de 1400 a.E.C., dividiram o ano solar em 365,25 dias e descreviam as posições das estrelas no céu dividindo a esfera celeste em 28 partes. Além disso, foi uma das primeiras civilizações a adotar o sistema numérico decimal, por ser mais simples e eficaz. Os chineses eram extremamente delicados e cautelosos com suas observações, no sentido de sempre quererem sofisticar seus resultados. Tal fato contribuiu muito para o desenvolvimento e criação de instrumentos de medição essenciais para a matemática e a astronomia, que datam entrem os séculos III e VI.

De modo igual aos chineses, a astronomia egípcia utilizou-se de relógios de Sol para medir o tempo, dividindo-o em 24 horas, e o céu em 36 agrupamentos de estrelas, chamados *Decans*. Estes poderiam ser usados para contar a hora. O calendário egípcio era divido em 360 dias, com 12 meses e 30 dias cada mês. Os egípcios utilizavam o sistema de numeração de agrupamento simples com base dez e transcreviam informações referentes à matemática em papiros. Assim como os babilônios, seus registros matemáticos eram relacionados a problemas práticos. Os principais papiros descreviam métodos de multiplicação e divisão.

Eles tinham a solução para o problema da determinação da área do círculo e faziam uso de frações unitárias, da regra da falsa posição e sabiam que a altura de um triângulo isósceles bissecta a base. Por transcreverem seus registros em papiros, que eram vulneráveis ao tempo, muito das informações se perderam.

> Escritos relacionados à Matemática aplicada à vida diária e as utilidades locais trazem conhecimentos que mais tarde são apresentados de forma generalizada (proposições, teoremas, etc.) por outros povos. Portanto, não se pode dizer que não existia o conhecimento matemático com referências a Astronomia se já haviam registros anteriores que davam conta desse conhecimento no cotidiano dos povos antigos. (ARAÚJO, 2013, p. 6)

O estabelecimento da astronomia veio a ocorrer com o florescimento da civilização grega, fato esse que será tratado na seção a seguir.

2.2 Astrônomos da Grécia Antiga

A astronomia constituída como ciência só foi possível a partir do século IV a.E.C., com o surgimento da civilização grega, por meio de observações do movimento dos corpos celestes.

> Os estudos sobre Astronomia estão intimamente ligados ao desenvolvimento da geometria e principalmente da trigonometria, que justificavam determinadas ocorrências tais como estimar grandes alturas e distâncias e previam fenômenos como eclipses usando semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo. (ARAÚJO, 2013, p. 7)

Durante muitos milênios, as civilizações antigas tinham por objetivo utilizar a astronomia para elaborar calendários, e era difícil diferenciá-la ou separá-la da astrologia, como já dito anteriormente. Os gregos tinham a finalidade de explicar o funcionamento do Universo descrito por leis matemáticas e por meio de práticas investigativas e explicativas, sem recorrer ao uso de práticas supersticiosas ou sobrenaturais. A Grécia se tornou, assim, o local do nascimento da astronomia como ciência, principalmente devido ao fato do desenvolvimento da matemática e da física.

Na Grécia antiga, pensadores tentaram explicar, sob sua perspectiva, o Universo. Tales de Mileto (624 a.E.C. - 558 a.E.C.), filósofo e matemático, foi o primeiro a incentivar o afastamento da visão mitológica e a expressar a ideia de que a natureza do Universo não dependia de causas sobrenaturais. Ele estimulou a realização de buscas por explicações com base na razão e na observação da própria natureza, o que ocasionou e possibilitou o grande esforço ocidental da ciência.

> Tales teve opiniões sobre vários assuntos, incluindo astronomia. Segundo ele, no modelo cosmológico, a Terra flutuava na água, e é provável que considerasse a Terra como esférica (embora os gregos antigos não concordassem com isso). Sua teoria da Terra flutuante deu-lhe uma explicação para os terremotos – a Terra é jogada em mares tempestuosos. (ROONEY, 2017, p. 52, tradução nossa)

Outros nomes também se destacam, como Aristóteles (384 a.E.C. - 322 a.E.C.). Ele tinha a concepção de que a Terra era esférica e ocupava o centro de um Universo organizado em camadas esféricas concêntricas, em uma estrutura semelhante a uma cebola (NOGUEIRA, 2009).

Já Pitágoras (582 a.E.C. - 497 a.E.C.) acreditava tanto em figuras geométricas perfeitas quanto na esfericidade da Lua, da Terra e dos demais corpos celestes, enquanto Eratóstenes (276 a.E.C - 194 a.E.C.) mediu, em Alexandria, no Egito, o raio da Terra.

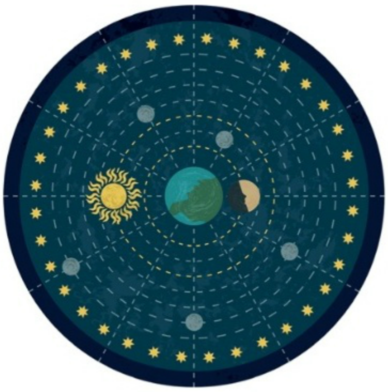
Com a perspectiva da busca ao desenvolvimento do conhecimento em bases plenamente racionais e a incorporação de métodos matemáticos da astronomia babilônica e egípcia, "os gregos são os primeiros a afirmar que a Terra é esférica e realiza o movimento de rotação em torno do Sol, admitindo o heliocentrismo 15 séculos antes de Nicolau Copérnico"(FERREIRA, 2003, p. 1).

Os modelos do sistema solar se caracterizavam pelas observações da trajetória visível dos planetas. Cláudio Ptolomeu (100 - 170) defendia a ideia de que a Terra é o centro do Universo (geocentrismo) (Fig. 3). Ele elaborou o primeiro sistema planetário geocêntrico[3], conhecido como o "Grande Sistema Astronômico" ou "Almagesto", que admitia que quanto mais distantes estivessem os astros da Terra, mais tempo levariam para dar uma volta em torno dela.

> A astronomia ptolomaica baseava-se em modelos geométricos, combinações de círculos que reproduziam os movimentos celestes observados e possibilitavam o cálculo das posições do Sol, da Lua e dos planetas em qualquer instante no tempo. (ITOKAZU, 2009, p. 43)

[3] O modelo geocêntrico do Universo coloca a Terra no centro e tem a Lua, o Sol, os planetas e as estrelas girando em torno dela.

Figura 3 – Geocentrismo



Fonte: Rooney (2017, p. 73).

Durante muito tempo esse modelo foi aceito, sendo somente discutido e questionado durante o início da renascença. O pensamento de Aristóteles e Ptolomeu prevaleceu inquestionável por mais de dez séculos até ser definitivamente abalado pela astronomia copernicana. A mudança do pensamento do geocentrismo para o heliocentrismo foi destaque do renascimento científico, sendo abordado por Nicolau Copérnico (1473 - 1543).

Todavia, o conceito de heliocentrismo já havia sido abordado por Aristarco de Samos (310 a.E.C. - 230 a.E.C.), por volta do século III a.E.C. As idealizações acerca do heliocentrismo não foram muito aceitas na época, visto que experiências e explicações sobre o mundo físico eram baseadas em um pequeno número de princípios filosóficos. Um dos possíveis argumentos utilizados para defender a inércia da Terra (geocentrismo) foi o de que, se fosse jogado um corpo para cima e se a Terra estivesse em movimento, o corpo lançado deveria cair atrás da pessoa que o arremessou, já que ela iria andar junto com o planeta.

2.3 Astrônomos da Era Moderna

Durante o período da Era Moderna, os estudos relacionados à astronomia, realizados até então, se mostraram insuficientes. Com o surgimento da ciência moderna, através do processo de desconstrução da concepção cosmológica de Aristóteles, que ocasionou a revolução científica, além do entendimento sobre os processos de explicação dos movimentos e das inquirições cosmológicas alterou o pensamento de como o homem via a si mesmo e o mundo a sua volta. No século XVI, a teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico mudou a forma sobre a compreensão do modelo cosmológico aristotélico-ptolomaico, estabelecendo as bases científicas da astronomia moderna.

> Segundo Copérnico, o Sol passava a ocupar o centro do Universo, enquanto a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Copérnico, no entanto, manteve, ainda sob influência do antigo modelo cosmológico, a ideia de um Universo finito, fechado por esferas, onde os planetas descreviam órbitas circulares perfeitas. Sua teoria heliocêntrica ainda estava fundamentada em critérios de valor. Segundo seu ponto de vista, parecia ser irracional mover um corpo tão grande como o Sol, em vez de outro tão pequeno como a Terra. (PORTO; PORTO, 2008, p. 4601-4)

Copérnico, entre suas inúmeras observações, errou ao afirmar que as órbitas dos planetas eram circunferências, observações essas reformuladas por Johannes Kepler (1571 – 1630). Este último comprovou que as órbitas dos planetas são elípticas e não circulares, além de ter realizado o feito de traçar a órbita da Terra, passando a afirmar a Terra como planeta. "Kepler e Galileu acreditavam que o Universo estava matematicamente organizado e que a ciência se fazia comparando-se hipóteses com dados observados experimentalmente"(PORTO; PORTO, 2008, p. 4601-4 e 4601-5).

Galileu criou instrumentos de caráter exploratório como, por exemplo, o telescópio. Este concedeu a Galileu a constatação e a comprovação de astros de forma esférica imperfeita, indo em desacordo com a teoria aristotélica. As contribuições de Galileu (1564 - 1642) e Kepler foram excepcionalmente indispensáveis para afastar as antigas teorias cosmológicas, abrindo espaço para a mecânica celeste de Isaac Newton (1643 - 1727), que se ocupou do estudo dos movimentos dos corpos celestes e comprovou as constatações de Kepler, por meio da lei da gravitação universal.

> Newton mostrou que corpos sob a ação de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles e o corpo que os atrai descrevem órbitas que têm a forma de curvas cônicas. Quando as órbitas são fechadas, elas têm a forma elíptica. Estava solucionado então o problema das órbitas elípticas de Kepler. (PORTO; PORTO, 2008, p. 4601-7)

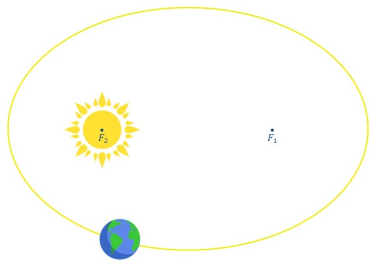
Kepler se interessava principalmente pelas relações numéricas entre os objetos do Universo e "publicara, em 1619, em *Harmonice Mundi*, suas três leis, sendo que as duas primeiras já se encontravam em trabalhos dele que datam de 1609. Em linguagem moderna, as Leis de Kepler são [...]"(PRAZERES, 2010, p. 17):

- Lei das Órbitas Elípticas: Tomando o Sol como referencial, os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos da elipse (Fig. 4);

- Lei das Áreas: Uma linha traçada do Sol a um planeta percorrerá áreas iguais em tempos iguais. Em outras palavras, a 2º Lei de Kepler descreve que se o planeta usou o mesmo tempo para ir de A até B e para ir de C até D, então $A_1 = A_2$ (áreas iguais). Esta lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância que se encontram do Sol (Fig. 5);

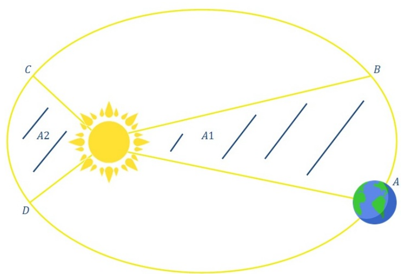
- Lei dos Períodos: Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos dos eixos máximos de suas órbitas. Em outras palavras, a 3º Lei de Kepler descreve que a distância média do planeta ao Sol ao cubo é proporcional ao seu período de revolução ao quadrado. Esta última lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o tempo que ele demora a completar uma revolução em torno do Sol. Assim, quanto mais distante o planeta estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno desta estrela (Fig. 6). O valor da contante k é aproximadamente o mesmo para todos os planetas que orbitam em torno do Sol.

Figura 4 – 1ª Lei de Kepler



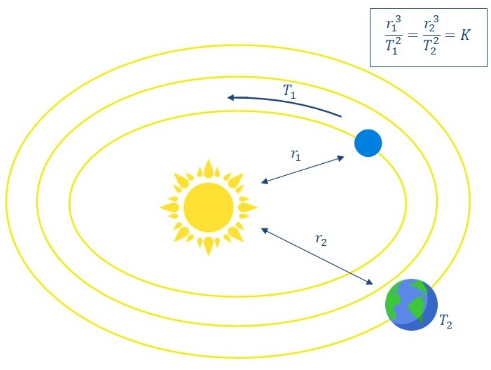
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – 2ª Lei de Kepler



Fonte: Elaborada pelo autor.

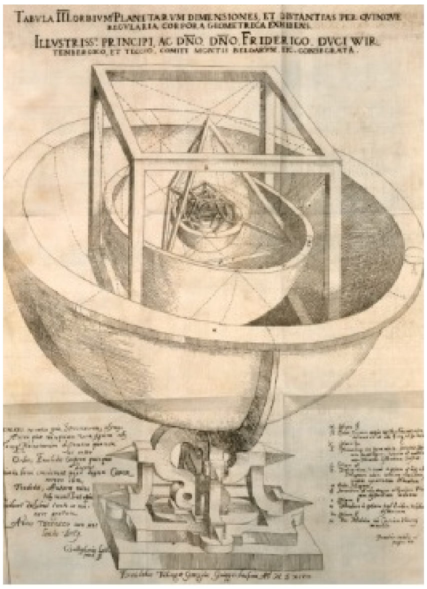
Figura 6 – 3ª Lei de Kepler



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a constatação dessas leis, Kepler contou com os resultados das observações realizadas pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546 – 1601), do qual foi assistente e seu sucessor. Ressalta-se que os dados obtidos por Tycho Brahe eram os mais precisos daquela época sem recorrer ao uso de instrumentos. Assim, como mencionado anteriormente, as obras de Kepler forneceram uma das bases para a teoria da gravitação universal, de Isaac Newton.

Figura 7 – Modelo geométrico de Kepler



Fonte: Rooney (2017, p. 99).

Por intermédio da análise de documentos e registros, pode-se desvelar que as observações realizadas pelos tupis-guaranis foram tanto relevantes quanto indispensáveis para a história da astronomia. Tais observações datam antes mesmo das observações feitas por Galileu Galilei. Em 1632, Galileu publicou o livro *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo; ptolomaico e copernicano*, onde afirmou que a principal causa do fenômeno das marés seriam os dois movimentos circulares da Terra: o de rotação em torno de seu eixo (diurno) e o de translação em torno do Sol (anual), desconsiderando a influência da Lua.

Em 1612, o missionário capuchinho francês Claude d'Abbeville (? - 1632) passou quatro meses entre os tupinambá do Maranhão, localizados perto da Linha do Equador. Seu livro *Histoire de la mission de pères capucins en l'Isle de Maragnan et terres circonvoisines*, publicado em Paris, em 1614, é considerado uma das mais importantes fontes da etnografia dos indígenas do tronco tupi. Segundo Afonso (2010),

> A teoria do astrônomo italiano Galileu Galilei (1564 - 1642), publicada dezoito anos depois do livro de d'Abbeville, falava de uma relação das marés com os movimentos de rotação e translação da Terra, sem considerar a Lua. Só em 1687, setenta e cinco anos após a publicação da obra sobre os capuchinhos no Maranhão, é que o astrônomo inglês Isaac Newton (1643 - 1727) demonstrou que as marés eram causadas pela atração gravitacional do Sol e, em especial, da Lua sobre a superfície da Terra. Esse é um dos raros casos em que um conhecimento astronômico

> indígena é publicado antes de ser conhecido e validado pela comunidade científica. (AFONSO, 2010, p. 63)

Na próxima seção, abordam-se desenvolvimentos posteriores da astronomia, ocorridos na Idade Contemporânea.

2.4 Astronomia Contemporânea

No início do século XIX, Giuseppe Piazzi (1746 - 1826) descobriu o primeiro asteroide, chamado de Ceres. Isso porque, "[...] conhecida a estrutura básica do sistema solar, os astrônomos começam a investigar a estrutura, composição e evolução das estrelas"(Ferreira, 2003, p. 2). Tal fato deu início ao surgimento da astrofísica que, em conjunto com a física, matemática e química, se desenvolveram de forma rápida e eficaz.

Albert Einstein (1879 - 1955), com sua teoria da relatividade, de 1905, e a teoria da relatividade geral, de 1915, desencadeou o intenso processo de modificações na física, propiciando descobertas sobre as leis fundamentais do Universo e sua origem. Posteriormente, esses estudos conduziram à formulação da mecânica quântica. Sendo por muito tempo um dos maiores mistérios da ciência e formando uma das bases de sua teoria geral da relatividade, Einstein previa a existência de buracos negros e ondas gravitacionais. A existência de ondas gravitacionais foi detectada no ano de 2017 pelo Observatório Europeu de Gravidade (EGO), em Cascina, na Itália, reforçando sua teoria e abrindo caminho para uma nova era da astronomia.

Iniciada significativamente por Galileu com seus telescópios, a expansão do conhecimento do Universo se deve ao desenvolvimento de diversos telescópios eficientes, sendo possível a análise de sistemas planetários e a ampliação do conhecimento acerca de diversos corpos celestes. Edwin P. Hubble (1889 - 1953), com suas observações realizadas no observatório de Monte Wilson, na Califórnia, mostrou várias nebulosas. A lei de Hubble, como ficou conhecida, indicou que o Universo está em expansão, pois mostrou que as galáxias se afastam em grande velocidade.

Tem-se ainda, com a utilização de telescópios e sondas em diversos comprimentos de onda que penetram a atmosfera de outros astros, a descoberta da existência de milhares de outras galáxias e a realização de conquistas significativas sobre o sistema solar. Atualmente, são inúmeras as pesquisas e observações realizadas em vários observatórios espalhados pelo mundo, desde as ondas gravitacionais que posicionam a astronomia como uma nova ciência observacional a planetas com características semelhantes à Terra.

Os saberes científicos são de estrutura inteiramente participativa, onde matemáticos, físicos, químicos, geólogos e biólogos, entre outros, trabalham em conjunto para o desenvolvimento da ciência astronômica. Portanto, conteúdos ligados à astronomia fornecem inúmeras possibilidades de abordagem em sala de aula. Tendo tal afirmação em vista, o próximo capítulo se destina a dissertar sobre o ensino dessa ciência nas escolas brasileiras.

3 ENSINO DE ASTRONOMIA NO BRASIL

Neste capítulo, tem-se uma descrição dos acontecimentos relativos ao ensino de astronomia no Brasil. Disserta-se sobre os principais acontecimentos históricos que levaram a astronomia como um meio usual e funcional até a contemplação da astronomia como ciência. Em seguida, apresenta-se um panorama geral da astronomia como disciplina de ciências no Brasil, suas características e desafios como ciência complementar com as demais disciplinas dos anos iniciais do ensino fundamental e do ensino médio, sob a perspectiva da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

3.1 Histórico da astronomia no Brasil

Desde os primórdios da civilização, os mistérios do Universo são objetos de curiosidade das pessoas. Por isso a astronomia, sendo considerada como uma das mais antigas ciências, conquistou o fascínio de diversos povos. Assim como já mencionado, os estudos referentes à astronomia brasileira, especificamente, remontam a tempos em que civilizações indígenas utilizavam diversas práticas de observação pelos mais variados motivos, como a previsão das épocas de caça e pesca, por exemplo. Tais conhecimentos astronômicos eram ensinados e repassados de geração em geração.

As primeiras observações e medidas astronômicas de caráter científico ocorreram após a chegada dos europeus ao Brasil. Devido à necessidade de se orientar em percursos de um lugar a outro e de estabelecer uma cronologia para os acontecimentos, o advento da navegação foi essencial no aprimoramento da astronomia. Todavia, ainda não existia uma associação da astronomia com um estudo sistemático.

> Até então, alguns séculos depois da chegada dos portugueses e dos primeiros registros astronômicos, a astronomia praticada no Brasil era uma ciência muito particular, apenas de exposição de pensamentos e, portanto, não era um estudo puramente metodológico e objetivo. (ARAÚJO, 2010, p. 24)

As primeiras referências ao ensino de astronomia no Brasil no período colonial estão ligadas aos jesuítas, que foram os primeiros a apresentar essa ciência como corpo de conhecimento. Como professores eles lecionavam, promoviam essa ciência no Brasil e realizavam práticas de observação. Com a expulsão dos mesmos em 1759, o ensino de astronomia transmitido em seus colégios que, embora não fizesse parte do currículo, era ensinado, foi substituído por aulas cada vez mais régias adotadas pela coroa portuguesa (LANGHI, 2004).

O Brasil ganhou seus primeiros instrumentos astronômicos de cunho científico em 1781, com o planejamento da construção de um Observatório Astronômico, no Rio de Janeiro. Esse observatório foi criado somente no ano de 1827, tencionando o estudo da astronomia com a finalidade de demarcação do território nacional e a orientação das navegações através do estabelecimento e criação de um horário oficial, indispensável naquela época (ARAÚJO, 2010).

Durante a passagem do século XIX para o XX, o Brasil passou por diversas mudanças econômicas, políticas e sociais. A divulgação da astronomia teve intensivas contribuições, em específico com a criação da Escola Politécnica de São Paulo, onde funcionaram os primeiros cursos regulares de astronomia e a valorização e aquisição de novos instrumentos para o Observatório Nacional (ON). Os trabalhos desenvolvidos sobre astronomia no Brasil se iniciaram no século XX, sendo explorada como uma atividade complementar de pesquisadores interessados em fortalecer a história da ciência e procurando desvendar e compreender as transformações pelas quais a astronomia estava passando.

Segundo Araújo (2010), foi somente na década de 1960 que o Observatório do Valongo, localizado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), ofereceu o primeiro curso de graduação em astronomia. Todavia, esses cursos foram perdendo espaço e força no ensino superior e aos poucos se tornaram disciplinas optativas.

De acordo com Buffon e Neves (2016), a astronomia começou a ter mais expressividade com a criação da Sociedade Astronômica Brasileira (SAB) e a ampliação de diversos estudos voltados à área de ensino de ciências, nos anos de 1970. A astronomia passou, então, a se estabelecer como um fator importante para o ensino, sendo seus conteúdos associados ao ensino básico reformulados através das reformas educacionais.

> Nas reformas educacionais que se seguiram, os conteúdos de Astronomia passaram a fazer parte de disciplinas como Ciências e Geografia (Ensino Fundamental) e Física (Ensino Médio). Atualmente, pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1996, a Astronomia está presente essencialmente na disciplina de Ciências, conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997, deixando assim de ser definitivamente uma disciplina específica nos cursos de formação de professores. (LANGHI, 2004, p. 20)

Logo, apesar de a astronomia continuar fazendo parte dos conteúdos do ensino básico, sua presença não é tão marcante, visto que ela perdeu espaço em muitas disciplinas. Essa questão será discutida na seção a seguir.

3.2 Astronomia na educação básica

A astronomia consiste em uma ciência que desperta atenção e interesse pelas explicações e curiosidades, além de diferentes questionamentos que podem ser realizados tanto dentro quanto fora de sala de aula. A astronomia se constitui não em uma disciplina curricular, mas em uma ciência que tem alguns de seus temas espalhados pelo currículo escolar, desde os anos iniciais.

O ensino de astronomia, como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, constitui-se como um importante avanço dentro do ensino de ciências. Isso porque permite concepções alternativas sobre diversas problemáticas que englobam a disciplina de matemática e as demais que integram o currículo do ensino básico, como a geografia. A ciência apresentada dessa maneira poderá incentivar os alunos na busca pelo conhecimento, tornando o estudo mais aprazível.

Apontando diferentes razões para a importância do ensino de astronomia como um dos meios justificáveis para o processo de ensino-aprendizagem, Caniato (1973, p. 39) afirma que "A Astronomia, pela diversidade dos problemas que propõe e dos meios que utiliza, oferece o ensejo de contato com atividades e desenvolvimento úteis em todos os ramos do saber e do quotidiano da ciência."Todavia,

> Atualmente, a astronomia faz parte do programa curricular do ensino básico, embora sendo evidente a importância do seu ensino nas escolas, por muitas vezes o ensino de astronomia é abordado de forma resumida e até mesmo esquecida. A falta de interesse e iniciativa dos professores e de alguns poderes competentes e a desorganizações de um planejamento escolar, implica em uma falta de acesso à ciência astronômica. No entanto, a popularização do conhecimento astronômico é de extrema importância para garantir uma educação científica de qualidade, possibilitando aos alunos uma melhor compreensão do mundo ao qual está inserido. (ARAÚJO, 2010, p. 42)

A LDB, de 1996, propôs uma ampla reforma no ensino, cujas diretrizes visavam uma consolidação na formação geral do educando. O ensino de astronomia é tido como um fator de contribuição para o estabelecimento do conhecimento científico e a construção do raciocínio lógico. Para que tal meta seja alcançada, deve-se levar em consideração a interdisciplinaridade.

A importância de tais práticas docentes interdisciplinares encontram-se como parte integrante dos PCNs dos anos iniciais do ensino fundamental. Objetivando o ensino de ciências são sugeridos, ao professor, o desenvolvimento de procedimentos que possibilitem a aprendizagem dos alunos de maneira a atribuir sentido a esses saberes (BRASIL, 1997).

> O Ensino de Astronomia no Brasil em sua modalidade de Educação Básica segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Reforma Curricular do Ensino Médio, e tem como objetivo preparar o estudante para uma melhor compreensão sobre o mundo contemporâneo. (ARAÚJO, 2010, p. 41)

Um dos procedimentos fundamentais mencionados pelos PCNs são o estabelecimento de relações entre fatos, fenômenos e ideias, além do estudo de dados obtidos por investigação, visando a solução de problemas. Esses são processos que poderão ser atribuídos ao professor, que serão repassados aos alunos com a finalidade de desenvolver habilidades matemáticas através da contextualização dos conceitos. Como exemplo dessas habilidades, citam-se melhor capacidade, raciocínio e visualização de cálculos matemáticos (BRASIL, 1997).

Por se tratar de uma ciência que estuda e inclui diversas interfaces com as diversas áreas de conhecimento, o ensino de astronomia não só pode encarado como uma alternativa para um ensino mais significativo quanto ser parte integrante do ensino básico como ferramenta interdisciplinar. Partindo dessa perspectiva, o ensino de astronomia pretende proporcionar aos alunos uma visão menos fragmentada do conhecimento, além de despertar neles o interesse pela busca de respostas e explicações.

> Uma vantagem encontrada na escolha do estudo da Astronomia é a multidisciplinaridade [...]. Desta forma, encontramos uma excelente oportunidade de mostrarmos aos alunos que as ciências não existem de maneira segmentada, mas sim de uma forma única. Nas aulas de Astronomia, podemos levantar assuntos que contemplem todos os níveis de ensino nas mais variadas áreas, sendo assim considerado um tema integrador. (DAMASCENO, 2016, p. 17)

O ensino de ciências no ensino fundamental, aliado ao ensino de astronomia, trabalha conteúdos com enfoque sobre as fases da Lua, eclipses, estações do ano, movimentos da Terra, dentre outros. Subsequentemente, são lecionados conteúdos como comparações entre planetas, verificando-se escalas de distância e grandeza em unidades usuais. Os PCNs do ensino médio incluem a ideia de que o ensino de ciências, estando intimamente ligado à astronomia, deverá fornecer ao educando a compreensão de que o Universo é composto por elementos que agem interativamente e que é essa interação que configura o Universo (BRASIL, 1999).

Tais ideias reforçam a concepção de contemplar temas transversais, sendo que esses despertam a curiosidade por parte dos alunos e reforçam a concepção da construção de conhecimento através de práticas interdisciplinares, que poderão ser associadas a práticas incentivadoras, que buscam promover o ensino mais amplo e diversificado. Langhi (2004) apresenta fundamentos motivacionais para ensinar astronomia, ao atribuir diversos aspectos que envolvem curiosidades, habilidades e o aprendizado, como um facilitador de mudança conceitual e, por ser interdisciplinar, auxiliador na formação cidadã.

> O questionamento a respeito da origem da vida e do universo são assuntos do interesse da maior parte dos estudantes do ensino médio. A astronomia tem sido uma das áreas preferidas para os divulgadores de ciência nas últimas décadas e é sugerida como um tema oportuno para ser discutido no ensino médio, como forma de desenvolver competências e habilidades [...]. (ANDRADE; HENRIQUE; L'ASTORIN, 2010, p. 22)

Os PCNs "[...] deixam claro que o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental deve incluir, dentre outras disciplinas, a Astronomia em seu planejamento."(Langhi, 2004, p. 80). Assim, é imprescindível que o professor esteja preparado para trabalhar com conteúdos de astronomia adequados a cada etapa escolar. No entanto, muito desses conteúdos não estão no planejamento do professor e são raramente abordados em sala de aula. Dentre os motivos para esse cenário se encontra a falta de preparo dos professores, que não possuem o conhecimento dessa ciência ou presumem não saber explicar e associar os fenômenos a vários saberes específicos a ela relacionados (ANDRADE; HENRIQUE; L'ASTORIN, 2010).

Todavia, verifica-se que o panorama do ensino de astronomia como ciência complementar e interdisciplinar vem se alterando vagarosamente. Há todo um estímulo em favor dessa ciência, por meio de pequenas iniciativas dos professores, das escolas, planetários, observatórios e até de grandes iniciativas. Como exemplo, cita-se a Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA), o Simpósio Nacional de Educação em Astronomia (SNEA), a Comissão de Ensino da Sociedade Astronômica Brasileira e os Encontros Regionais de Ensino de Astronomia. Como reconhecimento de todo o esforço nacional para desenvolver um ensino mais amplo e eficaz, é necessário haver proposições de ações concretas e incentivos na área de educação.

> Em geral, a popularização da astronomia no Brasil deve visar aprimorar e aprofundar os conhecimentos do público em geral (particularmente estudantes e professores, agentes multiplicadores de conhecimento) de temas ligados à astronomia através de uma abordagem multidisciplinar, com isso, possibilitando que o público alvo possa ter uma visão mais realista sobre ciência e tecnologia de uma maneira global e de forma mais crítica e participativa. (ARAÚJO, 2010, p. 41)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de 2017 cuja proposta é nortear o ensino em todo o Brasil, determinando as habilidades e competências a serem desenvolvidas na educação básica. Na área de ciências, são apresentadas três unidades temáticas essenciais no ensino fundamental. Uma das unidades é *Terra e Universo*, em que se pretende o entendimento de propriedades relacionadas ao Sol, à Terra, à Lua e a outros corpos celestes. Ressalta-se a relevância dos conhecimentos levantados pelos povos indígenas, as diversas discussões sobre os modelos geocêntrico e heliocêntrico, além da sistematização das observações do céu que permitiu, por exemplo, a construção de calendários e também avanços na agricultura (BRASIL, 2017).

Portanto, verifica-se a necessidade de trabalhar, em sala de aula, assuntos relacionados à astronomia. Partindo dessa premissa, no próximo capítulo será tratada a importância da interdisciplinaridade no ensino de matemática, que permite que tal lacuna seja preenchida.

4 MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE

Neste capítulo apresenta-se um referencial teórico concernente à interdisciplinaridade na educação básica. Dentro dessa perspectiva se visa considerar, em particular, uma abordagem em relação à efetivação da interdisciplinaridade no ensino de matemática. Assim, possibilita-se o desenvolvimento de uma prática pedagógica que trabalha com conexões em diversas áreas de conhecimento, permitindo um maior dinamismo nas aulas.

Tem-se, ainda, a relevância do papel do professor nesse processo, compreendendo que o pensamento e a reflexão são características de um ser humano criativo. Ou seja, um professor que não veja o aluno como mero reprodutor de ideias e práticas que lhe são exteriores. Apresenta-se, também, uma análise teórica aplicada aos textos da LDB, dos PCNs, das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) e da BNCC, tendo por foco explorar os sentidos relacionados ao conceito de interdisciplinaridade.

Com a finalidade de estudar tais documentos, fundamentou-se na análise conceitual como método de pesquisa. Dessa forma, a análise textual forneceu uma interessante conjectura de investigação para o significado do conceito examinado nesse conjunto de textos. O método possibilitou, por exemplo, o conhecimento da grande diversidade de sentidos associados ao conceito de interdisciplinaridade e ao papel a ele atrelado nas práticas culturais, educacionais e sociais. Evidencia-se, assim, a importância de inserir a interdisciplinaridade dentro do âmbito acadêmico.

4.1 Interdisciplinaridade no âmbito escolar

Interdisciplinaridade é uma palavra originária do século XX. Seus primeiros registros ocorreram nos Estados Unidos, no debate sobre a importância do diálogo entre as áreas do conhecimento em ciências sociais.

> Este conceito passou a ser articulado na literatura educacional ainda nos anos 30, nos Estados Unidos, onde surgiu em meio à discussão teórica sobre integração do currículo, particularmente no contexto da educação básica. (GARCIA, 2008, p. 365)

O termo foi proposto pela primeira vez em 1937, pelo sociólogo alemão Louis Wirtz, atribuindo o conceito de que disciplinas podem estar interligadas a partir de relações previamente definidas em um amplo processo dinâmico para solucionar ou responder problemas. No Brasil, esse conceito tem estado presente em documentos educacionais desde os anos 70, quando sua utilização estava inicialmente articulada à noção de integração.

Interdisciplinaridade no Brasil, portanto, é um fenômeno recente, estabelecido através das reformas educacionais modernas, na pesquisa aplicada e nos esforços para dissolver barreiras disciplinares (Klein, 1998). A interdisciplinaridade apresenta novas perspectivas acerca do conhecimento, atribui sentido contextual e assegura a construção de um entendimento amplo, rompendo com os limites das disciplinas através de uma pluralidade de interpretações teóricas e práticas.

> Trata-se de um conceito fundamental no discurso da educação contemporânea e que está articulado nos textos dos PCNs de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, documentos centrais da política curricular brasileira atual para a Educação Básica. (GARCIA, 2008, p. 364)

O conceito de interdisciplinaridade pode ser resumido ao que é comum a duas ou mais disciplinas ou a outras áreas de conhecimento. A palavra interdisciplinar é formada pela união do prefixo "inter", que significa o conceito de "dentro", "entre"; com a palavra "disciplinar", que atribui sentido pedagógico de instruir, consistindo em uma abordagem metodológica que integra conceitos, teorias e fórmulas na tentativa de compreender o objeto de estudo como um fenômeno sistêmico, sendo relacionada a um conjunto plural e dissonante de significados.

Dessa forma, integrando o conceito interdisciplinar dentro do contexto escolar, deve-se necessariamente ter o apoio em pressupostos que indiquem uma orientação pedagógica e epistemológica à metodologia. Dessa maneira, propicia-se um delineamento quanto aos objetivos educacionais e a outros aspectos formativos que se anseia que os alunos venham a desenvolver.

> É importante destacar que as discussões sobre interdisciplinaridade assumiram duas perspectivas. Uma delas, mais relacionada à discussão epistemológica, produziu avanços ao explorar aquele conceito como um diálogo integrativo entre diferentes disciplinas, entendidas como campos do conhecimento. A outra perspectiva refere-se aos desenvolvimentos relacionados ao currículo da educação básica, na forma de estratégias para a integração entre disciplinas, aqui entendidas como as matérias do currículo escolar. É importante destacar que, ao representar um princípio de integração das disciplinas escolares, a ideia de interdisciplinaridade vai estabelecer um modo de pensar e produzir o currículo escolar que contrasta com a tendência tradicional de recorte e especialização do conhecimento. (GARCIA, 2008, p. 365)

A orientação de práticas interdisciplinares está presente como parte integrante nos textos direcionados à educação como a LDB (Brasil, 1996), os PCNs (Brasil, 1997, 1998, 2000, 2002), as DCNs (Brasil, 2013) e a BNCC (Brasil, 2017). Tais documentos sugerem que a interdisciplinaridade deva ser realizada através de uma vasta leitura sobre a diversidade das formas de conhecimento.

A interdisciplinaridade é uma orientação da LDB para o ensino médio, cujo propósito é fazer da sala de aula mais do que um espaço para simples absorção de informações. Segundo orientações do Ministério da Educação (MEC), a interdisciplinaridade não pretende acabar com as disciplinas, mas utilizar os conhecimentos de várias formas na compreensão de um problema, na busca de soluções para entender um fenômeno sob diferentes pontos de vista (TERRADAS, 2011).

Dentre os principais conceitos depreendidos sobre o conceito de interdisciplinaridade nos PCNs, destaca-se o modo de articular conteúdos. Este conceito pode "[...] ser considerado a forma mais tradicional de representação da interdisciplinaridade e de sua implementação no currículo"(Garcia, 2008, p. 369). Isso ocorre pois ele viabiliza a percepção da interdisciplinaridade como mecanismo de articulação de conteúdos. Além disso, a articulação pode ser comumente entendida "[...] como um esforço para "construir pontes"entre os conteúdos das disciplinas do currículo escolar"(GARCIA, 2008, p. 369).

O autor também defende a forma de contribuição das disciplinas, reconhecendo que:

> Neste caso, a interdisciplinaridade seria um modo como as disciplinas poderiam ser capazes de contribuir para um entendimento ampliado sobre determinado assunto ou tema, através de ações exercidas pelos professores, no contexto de suas disciplinas individuais e de seus processos particulares de ensino-aprendizagem. Segundo esta perspectiva, a interdisciplinaridade poderia ser exercida através do modo como os professores orientam os alunos a pensar questões e temas a partir das perspectivas das disciplinas. (GARCIA, 2008, p. 370)

Sua integração pode ser sugerida na elaboração dos planejamentos curriculares seguindo os parâmetros estabelecidos, de maneira que as disciplinas escolares prossigam com seus alicerces. A interdisciplinaridade se daria à medida que o problema ou temática abordada exigissem saberes específicos de uma ou outra disciplina, viabilizando situações educativas em que se tem o intento de promover o estudo e a análise de conhecimentos mais específicos, necessários à formação do aluno.

> Embora o conceito de interdisciplinaridade seja fundamental na educação contemporânea, sua compreensão persiste como um desafio aos educadores. Isso parece refletir o quanto esse termo está atrelado a uma variedade de entendimentos acerca do que estaria sendo solicitado às práticas pedagógicas. É um conceito polissêmico na literatura educacional, que ainda está por ser discutido de modo mais amplo pelos teóricos do currículo no Brasil. (GARCIA, 2008, p. 364)

Os PCNs para o Ensino Médio - área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Brasil, 2000), consideram a interdisciplinaridade como um dos elementos essenciais para uma abordagem por competências. Tal documento reconhece também a multiplicidade de sentidos e dimensões deste termo, considerando-os todos importantes. Ressalta-se que os PCNs não apresentam referências bibliográficas que possam orientar os professores. Portanto, o enriquecimento da disciplina fica a critério do educador, que deve adaptar os conteúdos de maneira a estimular o caráter crítico-reflexivo por parte do aluno.

Tem-se, por finalidade, a de conseguir formar indivíduos que se realizem como pessoas, cidadãos e profissionais, exigindo da escola muito mais do que a simples transmissão e acúmulo de informações. Portanto, a escola deve permitir experiências concretas e diversificadas que se relacionem com situações de aprendizagem por meio da contextualização.

Segundo Paula e Fernandes (2009), a interdisciplinaridade é importante para o progresso dos alunos, apesar de ainda não ser muito utilizada. Destaca-se também que atividades diversificadas favorecem a construção coletiva, despertando nos alunos um grande fascínio e servindo como incentivo para o estudo.

As DCNs estabelecem que a escola precisa acolher variados saberes, promovendo manifestações de aprendizagem sob diferentes perspectivas e empenhando-se para constituir, ao mesmo tempo, um espaço para a vasta pluralidade de conhecimento. Dentro da organização e gestão curricular das DCNs, estão apresentadas abordagens interdisciplinares que requerem atenção criteriosa, em razão de envolverem um planejamento adequado ao conjunto de atividades que se realizam no âmbito escolar.

Os componentes curriculares integradores das DCNs são organizados através da articulação das áreas de conhecimento, onde disciplinas e eixos temáticos são abordados em diferentes campos de conhecimento, buscando o desenvolvimento de habilidades, práticas e valores. Tais habilidades são equivalentes às da BNCC, em virtude de promoverem o desenvolvimento para o exercício da cidadania, enriquecendo, complementando e promovendo características específicas para cada um dos temas demonstrados dentro da matriz curricular.

> O trabalho com eixos temáticos permite a concretização da proposta de trabalho pedagógico centrada na visão interdisciplinar, pois facilita a organização dos assuntos, de forma ampla e abrangente, a problematização e o encadeamento lógico dos conteúdos e a abordagem selecionada para a análise e/ou descrição dos temas. O recurso dos eixos temáticos propicia o trabalho em equipe, além de contribuir para a superação do isolamento das pessoas e de conteúdos fixos. Os professores com os estudantes têm liberdade de escolher temas, assuntos que desejam estudar, contextualizando-os em interface com outros. (BRASIL, 2013, p. 30)

A BNCC determina um conjunto amplo de aprendizagens essenciais que os alunos da educação básica precisam desenvolver ao longo de todas as etapas e modalidade de ensino. Dessa forma, visa garantir aos estudantes os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

> Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. (BRASIL, 2017, p. 6)

As aprendizagens definidas pela BNCC pretendem, portanto, assegurar ao aluno da educação básica o desenvolvimento de práticas educacionais, dentro de um contexto interdisciplinar, pela adoção de estratégias dinâmicas e interativas. Essas devem tanto propiciar o desenvolvimento de competências pedagógicas quanto induzirem à concepção do conhecimento curricular contextualizado, identificando estratégias para "[...] formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas"(BRASIL, 2017, p. 7).

Partindo desses pressupostos, a interdisciplinaridade possibilitaria diversas interfaces, em razão de articular métodos para a elaboração de conhecimento nos planejamentos curriculares, sugerida como modalidade de integração entre outras áreas de conhecimento. Dessa forma, através de práticas transformadoras, permitiria aos alunos diferentes perspectivas de saberes para o mesmo objeto de estudo.

> Pela abordagem interdisciplinar ocorre a transversalidade do conhecimento constitutivo de diferentes disciplinas, por meio da ação didático-pedagógica mediada pela pedagogia dos projetos temáticos. Estes facilitam a organização coletiva e cooperativa do trabalho pedagógico, embora sejam ainda recursos que vêm sendo utilizados de modo restrito e, às vezes, equivocados. (BRASIL, 2013, p. 28)

A BNNC evidencia, por exemplo, que a disciplina de matemática, em sua abrangência, se inter-relaciona com diversos fenômenos, entre os quais se destacam os fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, podendo ou não estar associado ao mundo físico.

> Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno. (PAULA; FERNANDES, 2009, p. 1)

A interdisciplinaridade representa, assim, um recurso frente às dificuldades encontradas pelos professores, pressionados por mudanças concretas e perceptíveis no ambiente escolar. Se fazem necessários, portanto, a contextualização dos conteúdos abordados, de forma a torná-los mais significativos, além da indicação de propostas para aperfeiçoamento metodológico do professor. Dessa forma, reafirma-se a necessidade de compreensão do conceito de interdisciplinaridade e desenvolvimento de práticas para exercê-la.

4.2 Interdisciplinaridade em ensino de geometria

A abordagem do ensino de geometria no contexto da interdisciplinaridade fundamenta-se na sua importância. Isso pois a geometria é um campo cheio de possibilidades de interpretação, em que podem ser exploradas situações que envolvam a realidade do aluno. Além disso, as dificuldades detectadas em todo o processo de ensino-aprendizagem contribuem para o desenvolvimento do pensamento reflexivo. Esses obstáculos também proporcionam ao aluno momentos de investigação, sintetização, discussão e aplicação em noções matemáticas.

Segundo Martins (2008), a geometria tem tido pouco destaque nas aulas de matemática, sendo vista como sem importância por parte de alguns professores. A geometria é ensinada de forma a deixar a interpretação das propriedades das figuras geométricas de lado. No entanto, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver uma forma de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo que vive.

A geometria é conceituada como uma ciência que investiga o espaço, as formas e suas propriedades. Por se tratar de uma disciplina em que há grandes possibilidades de manipulação, tanto a geometria plana quanto a geometria espacial é vista como naturalmente interessante para os alunos, por ser de fácil aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento e no cotidiano, desde que transmitida de forma interessante e eficiente aos alunos (SANTOS; NUNES, 2014).

A BNCC propõe unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas. Dentre as cinco unidades propostas em matemática destacam-se a unidade de *Geometria* e *Grandezas e medidas*. Em *Geometria*, envolve-se o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, por meio de assuntos como posição, deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais. Em *Grandezas e medidas*, propõe-se o estudo das medidas e das relações entre elas, integrando diferentes áreas de conhecimento, como ciências, que se contextualiza ao ensino de astronomia (BRASIL, 2017).

Segundo Luckesi (1994), o conhecimento escolar só se torna significativo aos estudantes se esse for adquirido por meio de real compreensão e utilização criativa. Por isso, muitos insucessos no aprendizado da geometria estão relacionados ao fato de que seu ensino se limita a regras e fórmulas, além de demonstrações sem sintonia com a realidade, sem que ocorra um entendimento dos conceitos.

A geometria tem como propósito oferecer condições para que o aluno leia e interprete o mundo. Logo, se faz necessário verificar se o ensino da geometria plana e espacial tem viabilizado a conquista de tal objetivo, uma vez que a geometria ensinada nas salas de aula não se relaciona com situações reais. Tornar o ensino de geometria realmente interessante é possibilitar ao aluno um resgate da importância de se aprender e de mostrar ao mesmo sua relevância e articulação com as demais disciplinas.

> O renascimento e a reformulação do ensino de Geometria, não são apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social. A geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. (FAINGUELERNT, 1997, p. 47)

É necessária a análise de como os alunos têm percebido e explorado os conceitos geométricos espaciais quanto à abstração e à realidade, e como eles estabelecem a relação entre conceitos e fórmulas estudadas em geometria espacial. Necessita-se, ainda, realizar um estudo sobre a percepção do professor quanto à aprendizagem e quanto à avaliação dos seus procedimentos metodológicos, uma vez que o estudo da geometria deve despertar a capacidade dos alunos em resolver problemas do cotidiano. Dessa forma, nada mais eficaz do que atribuir essas capacidade à inserção da interdisciplinaridade.

4.3 Ensino de matemática contextualizado pela astronomia

Dentro do ambiente acadêmico, nota-se a dificuldade que muitos alunos da educação básica possuem em compreender e, principalmente, em interpretar, conceitos matemáticos. No ensino médio, os conteúdos de matemática são trabalhados, em sua grande maioria, de forma mecânica, onde o professor passou a ser refém da técnica, repassada pelos manuais, e o aluno, a reproduzir respostas pré-estabelecidas.

O entendimento matemático, todavia, é de extrema importância, dado que oferece suporte para várias outras ciências, como a astronomia. Essa permite não só a quantificação dos fenômenos astronômicos, mas também uma descrição lógica da sua natureza e da sua evolução. A relação entre a matemática e astronomia sempre esteve presente na história da humanidade, desde os primeiros povos. No entanto,

> A relação entre a Matemática e Astronomia é pouco explorada no Ensino Fundamental e Ensino Médio na disciplina de Matemática, tendo em vista o que propõe os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), que afirma que a interdisciplinaridade e a contextualização são importantes para o desenvolvimento cultural e social dos alunos. (PAULA; FERNANDES, 2009, p. 1)

Dados, valores e teoremas são utilizados como base para cálculos que foram estabelecidos, no passado, por meio de observações astronômicas. Se tratando de uma ciência empírica, o estabelecimento de teorias e o relacionamento de grandezas demanda o uso de ferramentas matemáticas como a geometria, funções, entre outras. Tal fato permite a criação de uma relação de causa e efeito, uma vez que não se pode abordar astronomia sem estabelecer relação com as leis da matemática.

A matemática é caracterizada pelo desenvolvimento de práticas e habilidades. Essas, por sua vez, estão intrinsecamente relacionadas a outras áreas de conhecimento que, em conjectura com ideias, raciocínios e abstrações, contribuem para a compreensão de diversos fenômenos. Portanto, tais ligações funcionam como uma forma de atribuir aos experimentos científicos e tecnológicos o alicerce para a "[...] formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas"(BRASIL, 2017, p. 262).

Além de contribuir significativamente para o progresso da humanidade, as disciplinas de astronomia e matemática estão interligadas por diversos fatores. Dentre eles conceitos abordados na própria matemática que, se articulados de outra maneira, serão absorvidos de forma interessante e curiosa, em virtude de que parte do interesse dos alunos está na forma como a matemática está associada a sua realidade.

O ensino de ciências contextualizado pela astronomia oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, além de demonstrações que validam os conceitos existentes em diversos assuntos. Tais exemplos respondem ao "para que serve"do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da matemática como instrumento da ciência aplicada. Além disso, permite ao aluno adquirir flexibilidade para lidar com diversas situações através da grande diversidade de problemas de matemática ligados a outras áreas do conhecimento.

Através de algumas atividades de caráter manipulativo, pode-se mostrar aos alunos métodos de calcular o tamanho da Terra, do Sol, da Lua e as distâncias entre esses astros. É possível, também, realizar transformações entre as diversas medidas de conversão, como anos-luz, dentre outros. Muitos desses cálculos são acessíveis a alunos de 7º e 8º anos e servem como excelente motivação para o estudo da matemática.

O estudo de triângulos e círculos, além de alguns cálculos geométricos, podem ser realizados, por exemplo, por meio do experimento de Eratóstenes. Esse experimento serve como ferramenta de visualização e investigação, além de evidenciar a forte relação entre essas duas áreas de conhecimento e trazer o contexto histórico de como eram feitos os cálculos há centenas de anos.

Com a intenção de promover a ligação entre a matemática, a astronomia e a geografia, o próximo capítulo trata sobre as geometrias não-euclidianas. Esse conhecimento será o elo que fará a conexão entre essas diferentes áreas do conhecimento.

5 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O presente capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos relacionados às geometrias não euclidianas. A partir desse conhecimento, é considerada viável sua utilização como conteúdo a ser ensinado na educação básica.

5.1 O surgimento das geometrias não euclidianas

A geometria presente nos livros didáticos e transmitida em salas de aula, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, é a geometria de Euclides ($\sim$ 300 a.E.C.). Ela foi proposta por ele em sua mais importante obra, *Elementos*, que deu à geometria forma, coesão e lógica. Escrita em torno de 300 a.E.C., essa obra é composta por treze livros que fornecem as bases para a geometria, álgebra e aritmética. Nela são reunidos os conhecimentos matemáticos da época, tendo sido bem apreciada entre filósofos e matemáticos.

Euclides apresenta a geometria de forma axiomática, isto é, como uma ciência que parte de certas hipóteses básicas, que são chamados de postulados ou axiomas. Sua obra foi de suma importância, já que estabeleceu a explicação e o entendimento sobre como funciona o mundo físico. A geometria de Euclides, ou geometria euclidiana, era a única geometria possível e verdadeira, no sentido de corresponder à realidade.

Em *Elementos*, Euclides inicia com uma lista de vinte e três definições, tais como ponto, linha, círculo e ângulo reto. Depois das definições, aparecem os postulados e as noções comuns (ou axiomas), nessa ordem. Em linguagem moderna, os postulados de Euclides são:

1. Dados dois pontos, existe uma única reta que passa por eles;
2. Um segmento pode ser prolongado;
3. Dados um ponto e um raio, pode-se traçar uma circunferência;
4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Dados um ponto e uma reta que não o contém, existe uma só reta paralela que passa por este ponto.

A tradução completa do quinto postulado de Euclides diz o seguinte:

> E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas

> retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 98)

Devido a sua difícil linguagem e por ser uma afirmação complexa e de caráter não intuitivo, muitos matemáticos e filósofos, durante mais de dois milênios, imaginaram se tratar de um teorema, que poderia ser demonstrado a partir dos quatro primeiros postulados[4].

Às definições da geometria euclidiana correspondiam problemas que envolviam pequenas medidas. Todavia, os conceitos dessa geometria possuíam limitações, pois não eram aplicáveis, por exemplo, a medidas de grande escala, já que esses conhecimentos não se mostravam suficientes e poderiam implicar em resultados errôneos.

Logo, a geometria euclidiana já não explicava os novos conhecimentos da matemática. Além disso, havia a grande polêmica envolvida com o postulado das paralelas, que levou a tentativas frustradas de se provar ou até de negar e não mais de constatar sua veracidade como se fosse um teorema. Tais fatos fizeram emergir outras geometrias, fundamentadas e embasadas teoricamente em conceitos apoiados nos quatros primeiros postulados de Euclides.

> Os esforços mal sucedidos para provar esse postulado, a partir de outros quatro originalmente considerados por Euclides, perduraram durante mais de 2000 anos. Na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como Karl Frederich Gauss em 1824, Nicolai Lobachevsky em 1829, Janos Bolyai em 1832, Georg Bernhard Riemann em 1854 e posteriormente Eugenio Beltrami, Jules-Henri Poincaré e Felix Klein concluíram que a pretendida demonstração não era possível. (KALEFF, 2010, p. 3)

A geometria euclidiana é uma geometria plana onde os conceitos básicos se restringem a ponto, reta e plano. No entanto, a realidade mostra um mundo diferente do estudado pela geometria euclidiana em que, por exemplo, as retas traçadas sobre a superfície não são retas euclidianas.

Com a elaboração das geometrias não euclidianas e indo de acordo com a substituição que se fez do postulado das paralelas, tem-se o surgimento da geometria hiperbólica (em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta dada), da geometria elíptica (ou esférica) (na qual não existem retas paralelas) e uma ampla variedade de sistemas axiomáticos dedutivos.

> Resumidamente, o surgimento das novas geometrias trouxe à luz uma importante característica da própria Matemática que até o século XIX era pouco percebida, ou seja, a de que Matemática é um sistema de conhecimentos construídos através da história, sujeito a reformulações e transformações, cujas afirmações, frente a determinados questionamentos,

[4] Com a finalidade de melhorar a compreensão do quinto postulado outros enunciados emergiram. Dentre eles se destaca, pela formulação moderna, a do geólogo e matemático escocês John Playfair (1748 - 1819), que diz: "Por um ponto P fora de uma reta r, passa uma única reta paralela à reta dada", tornando esse postulado conhecido como *postulado das paralelas*.

> geram revisões de seus próprios conceitos, acarretando novas teorias matemáticas. (KALEFF, 2010, p. 4 - 5)

Com o desenvolvimento de novas geometrias, os conceitos que limitavam a compreensão do mundo físico deu espaço à busca pelo entendimento da geometria do Universo e suas medidas, compreendendo melhor as leis que os regem. Com o estudo dessas geometrias, tem-se a constatação de que a geometria euclidiana era apenas uma de várias geometrias possíveis, e que todas elas são igualmente válidas. Além disso, nenhuma deve ser considerada mais verdadeira do que a outra, pois todas tiveram seus modelos comprovados e continuam legítimas cientificamente.

5.2 Ensino de geometria não euclidiana na educação básica

Os conhecimentos geométricos abordados no âmbito escolar, como parte da matriz curricular que integra a educação básica, se restringem às relações lógicas e a construções de símbolos decorrentes de uma geometria dedutiva e axiomática. De acordo com Kaleff (2010), é necessário repensar o ensino da geometria escolar com a perspectiva de levar o aluno, ainda no ensino médio, a observar outros conteúdos geométricos para além dos conhecimentos e paradigmas propostos por Euclides. Tal visão é embasada no fato de que muitos problemas do cotidiano só são resolvidos pelas geometrias não euclidianas.

Nos encontros e conferências nacionais de educação matemática houve uma intensa discussão em relação à inclusão de conteúdos da geometria não euclidiana na matriz curricular da educação básica, evidenciando-se como adequado à formação de alunos para os dias atuais em decorrência dos avanços da matemática e da computação. Sobre essas discussões, Brum e Schuhmacher (2014) apontam que emergiram alguns questionamentos dentro do âmbito escolar, dentre os quais destacam-se:

> [...] o ensino da Geometria não Euclidiana é um tema distante da realidade dos estudantes? O modelo geométrico para representar o planeta Terra abordado nas aulas de Geografia e Matemática é um plano, uma folha retangular ou uma superfície quase esférica? Se um dos pontos de discussão é a reformulação do ensino no Brasil, porque as Geometrias não Euclidianas ainda não são consideradas um ramo importante da Matemática por parte dos professores? Será que o ensino de Geometrias não Euclidianas, como a Esférica e Hiperbólica vem causando inquietações em professores de Matemática por ser um assunto novo e ainda desconhecido? (BRUM; SCHUHMACHER, 2014, p. 128)

O estudo de geometrias não euclidianas não compõe a matriz curricular do ensino básico. Uma das possíveis motivações da não inserção pode ser devido a sua complexidade e até a falta de interesse por parte do professor, em razão do mesmo ter completa autonomia para aplicar uma metodologia que vá de encontro às necessidades dos alunos.

No entanto, os conteúdos que integram a geometria não euclidiana muitas vezes são associados a conteúdos ímprobos, além de haver uma ausência de linhas metodológicas para sua abordagem em sala de aula. Tais fatores dificultam a inserção desse conteúdo no ensino básico, o que prejudica o pensar e o saber do aluno em compreender o mundo que vive.

Carvalho e Carvalho (2011) ratificam que as dificuldades de apresentar as noções de geometrias não euclidianas estão associadas a diversos fatores. Dentre os quais se pode mencionar que raramente os professores possuem o domínio do conteúdo específico, em razão de não ter sido estudado durante sua formação acadêmica, tal como é incomum constatar autores que tratam do tema nos livros didáticos do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

A partir desses pressupostos, torna-se oportuno a apresentação de conteúdos que possam criar significados. Isso ocorre em virtude de ser intrínseca a associação da geometria não euclidiana a diversos temas que norteiam o cotidiano dos alunos, sustentando ainda mais a interdisciplinaridade como fator de agregação de conhecimento.

Além disso, destaca-se que a geometria possibilita o desenvolvimento de habilidades ligadas à forma, espaço e distância, proporcionando uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente o mundo em que se vive, bem como estabelecer aplicações práticas. A geometria apresentada dessa forma possibilitaria a criação e a compreensão da relação entre várias disciplinas estudadas, como a física e a geografia, de maneira a gerar melhores condições de assimilação e interpretação dos assuntos.

Em conformidade com os conteúdos interdisciplinares, podem-se exemplificar vários deles relacionados à geometria não euclidiana que podem ser associados com outras disciplinas. Dueli (2013) afirma que "[...] de um ponto no Globo Terrestre, dadas suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), poderia ser melhor compreendida se os alunos compreendessem conceitos básicos de Geometria Esférica"(DUELI, 2013, p. 14).

Uma das relações existentes entre a matemática e geografia se dá através de sistemas de localização no globo terrestre. Segundo Dueli (2013):

> Uma das relações entre Matemática e a Geografia ocorre nos princípios de funcionamento de modernos sistemas de localização sobre o Globo Terrestre. [...]. Tendo as coordenadas (latitude e longitude) de dois pontos quaisquer sobre a superfície terrestre sempre é possível determinar a distância entre eles. Quando este cálculo é feito na geometria euclidiana, a menor distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une. Quando estamos na superfície terrestre a menor distância entre dois pontos é calculada ao longo de um arco de circunferência máxima ou geodésica. Como determinar, então, distâncias em uma superfície curva? Este questionamento, que é matemático, pode surgir na aula de Geografia. (DUELI, 2013, p. 14)

Esses questionamentos tornam a geometria um tema que gera grande interesse, visto que ela pode ser explorada pelos professores por englobar várias situações, além de permitir a viabilização de resoluções diversas, estabelecendo uma interação dinâmica com o conhecimento. A BNCC propõe conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico através do estudo, posição, localização e deslocamentos de pontos no espaço, reconhecendo noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, relevantes ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (BRASIL, 2017).

Tais pensamentos são necessários para realizar conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes, bem como para auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e no entendimento de aspectos mais estruturados da linguagem simbólica matemática. Isso conduz o aluno a constatar representações matemáticas diferentes para um mesmo conceito, além de entender que uma afirmação matemática é considerada verdadeira por ser o resultado de uma dedução lógica.

Mediante à análise conceitual das orientações dos textos em relação ao pensamento geométrico, essas afirmações podem ser estendidas ao ensino da geometria esférica. A partir da análise, por exemplo, da superfície terrestre em sua forma elipsoidal, pode-se constatar os obstáculos de construir conceitos pertinentes ao campo da geometria usando somente noções de reta, ponto e plano. Segundo Brum e Schuhmacher (2014):

> Para estabelecer diferenças entre objetos geométricos, conforme orienta os PCN, é preciso identificar uma pluralidade de modelos geométricos na natureza que pode ser pelo estudo das navegações, no sistema de localização por GPS (Sistema de Posicionamento Global), em aulas de Geografia ao tratar sobre o planeta Terra, na Física para compreensão do comportamento da luz no espaço, em objetos comuns do nosso cotidiano [...]. (BRUM; SCHUHMACHER, 2014, p. 129)

Portanto, pode-se atestar a relevância do estudo, ainda no ensino básico, de geometrias não euclidianas. No próximo capítulo, são apresentadas algumas noções básicas referentes à geometria esférica, que é utilizada na astronomia e na geografia para o estabelecimento das coordenadas de pontos.

6 GEOMETRIA ESFÉRICA

Este capítulo trata sobre a geometria esférica. Através desse conteúdo, podem ser abordados conceitos, dentro da astronomia, que relacionam a geometria, a física e a geografia. Além disso, serão explicitadas propriedades básicas de geometria esférica que podem ser trabalhadas na educação básica, especificamente no ensino médio, em virtude de serem equivalentes aos conteúdos de geometria euclidiana. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica a partir dos textos de Abreu e Ottoni (2015), Carvalho (2014), Filho e Saraiva (2017) e Usui (2014).

O estudo de geometria esférica se dá através de conceitos geométricos e suas relações entre os elementos que a constituem, que são ângulos, arcos, planos e triângulos esféricos, utilizados para a determinação do posicionamento e localização dos astros na denominada esfera celeste, sem se preocupar com sua distância em relação ao observador.

Sobre a origem da geometria esférica, Abreu e Ottoni (2015) afirmam que:

> Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), considerando o plano como a superfície de uma esfera e descartando a infinitude da reta, admitindo somente que a reta seja ilimitada, desenvolveu uma nova geometria, que Félix Klein denominou de Geometria Elíptica (Esférica). (ABREU; OTTONI, 2015, p. 2 - 3)

Riemann negou o quinto postulado de Euclides e, na geometria por ele desenvolvida, não há paralelas a uma reta dada, sendo a superfície esférica o plano e os círculos máximos da esfera suas retas. Sobre algumas diferenças entre as geometrias esférica e euclidiana, segundo Abreu e Ottoni (2015), citam-se que uma superfície pode ser finita, mas não limitada e que um círculo máximo tem comprimento finito sendo, todavia, ilimitado.

Como discutido anteriormente, é importante a inserção de conteúdos relacionados à geometrias não euclidianas no ensino básico. Com a intenção de estimular o estudo, por exemplo, da geometria esférica, Carvalho (2014) propõe o seguinte desafio:

> [...] desenhe um quadrado ou um triângulo numa folha de papel. Em seguida, recorte essa figura e tente colocá-la recobrindo uma bola de isopor ou qualquer outro objeto esférico; observe que não será possível apoiar toda a área do recorte feito, pois as propriedades das superfícies planas são diferentes das propriedades da superfície esférica. Outro fato é que dois pontos distintos determinam apenas uma reta na Geometria Euclidiana, enquanto na Geometria Esférica por dois pontos distintos existem infinitas retas que passam por eles. (CARVALHO, 2014, p. 28 - 29)

Outra atividade que pode ser proposta para a introdução dos conceitos de geometria esférica é a seguinte situação-problema: Uma andorinha parte do ponto P e percorre nove mil quilômetros no sentido Sul. Em seguida, muda de rumo e voa nove mil quilômetros no sentido Leste. Finalmente, muda outra vez de rumo e percorre nove mil quilômetros no sentido Norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor da andorinha?

O enunciado da situação-problema sugere uma excelente reflexão, visto que a geometria esférica é adequada ao realizar-se um estudo do globo terrestre. Tal fato leva os alunos a realizarem comparações entre as geometrias, verificando diferenças entre elas.

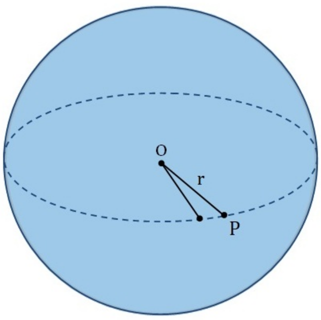
Aborda-se a geometria esférica, incontornável em astronomia, já que foi desenvolvida ao longo dos séculos devido a sua grande aplicabilidade à astronomia e ao advento da navegação. Apesar de não integrar a matriz curricular da educação básica, a geometria esférica não deixa de ser útil, tampouco interessante, uma vez que os conceitos que a sustentam são uma extensão dos conceitos utilizados na geometria plana, abordados na educação básica. Por essa razão, esses conceitos podem ser compreendidos a um nível de abstração semelhante aos trabalhados na geometria plana.

6.1 Definições

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições fundamentais à geometria esférica.

Definição 1 (Esfera)**.** *Seja o ponto O (centro da esfera) e r um número real positivo. Chamamos de esfera o lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a O são menores ou iguais a r. Isto é, a esfera é um sólido geométrico.*

Figura 8 – Esfera de centro O e raio r



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são ditos interiores à superfície da esfera; aqueles cuja distância é maior que r são exteriores à mesma. As posições relativas entre um plano e uma esfera, são definidas por: tangente, secante e exterior. Em relação ao plano tangente, existe um único ponto em comum que é perpendicular ao raio da esfera; no plano secante é gerado um círculo que intercepta a esfera.

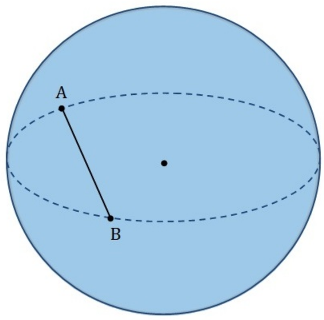
Definição 2. *A distância do centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado raio.*

Definição 3. *Superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância a um ponto fixo, chamado centro, é constante.*

Definição 4. *O círculo máximo é a interseção de um plano que passa pelo centro da esfera e a superfície esférica, sendo denominado de reta na superfície esférica.*

Definição 5. *Corda da superfície é o segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.*

Figura 9 – Corda da superfície esférica.

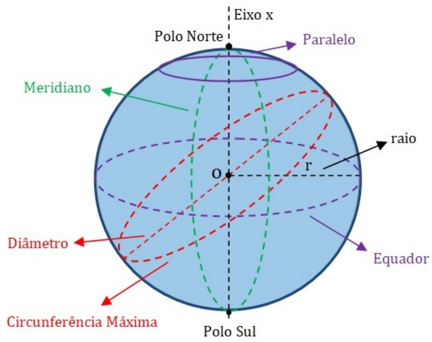


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 6 (Elementos notáveis da superfície esférica)**.**

- *Circunferência máxima: é uma circunferência que tem o mesmo raio da superfície esférica;*
- *Diâmetro: segmento que une dois pontos da superfície esférica e que contém o centro;*
- *Eixo x: qualquer reta que contém o centro O;*
- *Equador: é uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo;*
- *Meridiano: é uma semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo x e liga os polos;*
- *Paralelo: é uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo x e é paralela ao Equador;*
- *Polos: são os pontos de interseção do eixo x com a superfície esférica.*

Figura 10 – Elementos da esfera



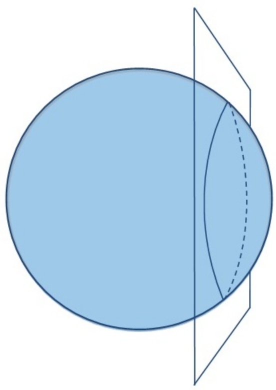
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que o quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas, não se aplica na geometria esférica. Isso porque por um ponto P na superfície esférica fora de uma reta r (círculo máximo) não é possível traçar nenhuma paralela à reta dada, como afirmado anteriormente. Dessa forma, pode-se notar que duas retas (círculos máximos) quaisquer possuem sempre dois pontos comuns e opostos pelo diâmetro.

Definição 7. *Dois pontos de uma esfera são chamados antípodas se são as extremidades de um diâmetro. As antípodas são, portanto, dois pontos diametralmente opostos.*

Definição 8 (Calota esférica)**.** *Quando a interseção de um plano com uma superfície esférica é uma circunferência, tem-se que essa superfície foi dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, então, é denominada calota esférica.*

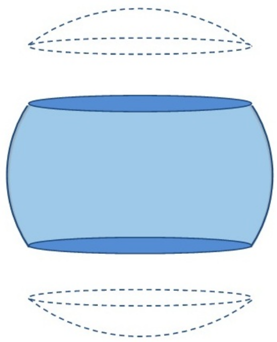
Figura 11 – Calota esférica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 9. *Zona esférica é a parte da superfície esférica delimitada por dois planos distintos paralelos não tangentes à superfície esférica, mas que a interceptam.*

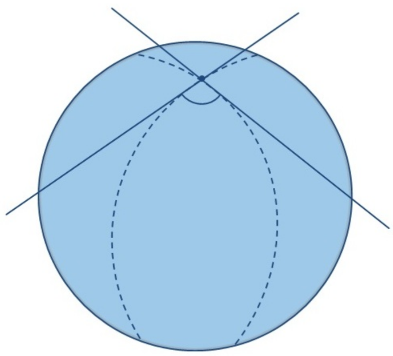
Figura 12 – Zona esférica



Fonte: Elaborada pelo autor.

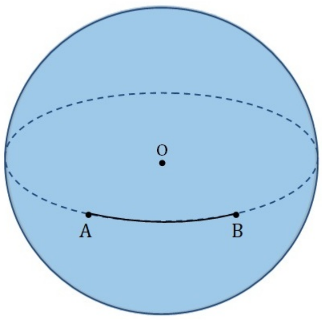
Definição 10 (Ângulo esférico)**.** *É o angulo formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.*

Figura 13 – Ângulos esféricos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Geodésica



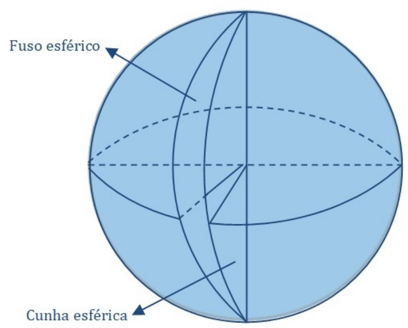
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 11. *Geodésica é a curva contida na superfície esférica que minimiza a distancia entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.*

Na geometria plana, a distância entre dois pontos é o segmento de reta formado por esses dois pontos. Como o plano na geometria esférica é uma superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco de circunferência máxima.

Definição 12 (Fuso e Cunha esférica)**.** *Fuso esférico é a parte da superfície esférica compreendida entre dois planos que têm um diâmetro comum. Cunha esférica é o volume determinado por esses dois planos.*

Figura 15 – Fuso e Cunha esférica



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Triângulos esféricos

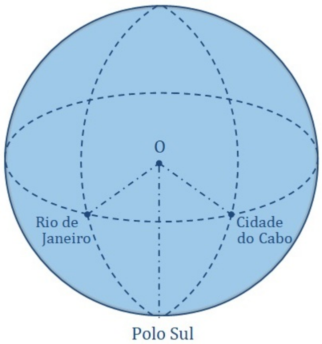
O estudo dos triângulos esféricos será de suma importância na geometria esférica, em razão de encontrar a distância entre dois pontos quaisquer na superfície esférica. Na Fig. 16, pode-se observar um exemplo geográfico de um triângulo esférico.

No triângulo esférico, tem-se como vértices o Polo Sul geográfico e as cidades do Rio de Janeiro e Cidade do Cabo. Os lados do triângulo que ligam cada uma dessas duas cidades ao Polo Sul são simplesmente os arcos ao longo dos seus respectivos meridianos geográficos; arcos de grandes círculos. Já o lado que liga as duas cidades é também um arco de grande círculo.

Definição 13 (Triângulo esférico)**.** *É a superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima.*

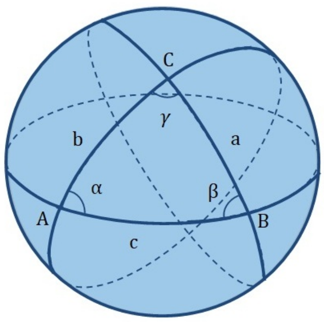
Na Fig. 17, os lados BC, AC e AB do triângulo esférico são denotados, respectivamente, por a, b e c. Seus ângulos internos são α, β e γ.

Figura 16 – Distância entre dois pontos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os triângulos esféricos podem ter a seguinte classificação:

Quanto aos ângulos: Retângulo - um ângulo reto; Birretângulo - dois ângulos retos; Trirretângulo - os três ângulos retos.

Quanto aos lados: Retilátero - um lado medindo 90°; Birretilátero - dois lados medindo 90°; Trirretilátero - cada um dos lados medindo 90°.

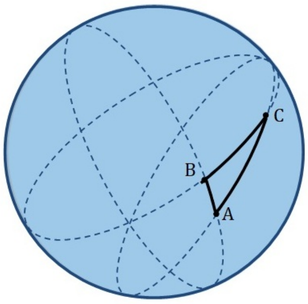
Ressalta-se que um triângulo esférico não é qualquer figura de três vértices desenhada sobre uma esfera. Para ser um triângulo esférico, essa figura tem que ter lados que sejam arcos de círculos máximos. Ou seja, arcos esféricos. A Fig. 18 ilustra um exemplo no qual o triângulo formado pelos arcos não é um triângulo esférico.

Definição 14. *A distância esférica entre dois pontos A e B é o comprimento do menor arco $\widehat{AB}$ do círculo máximo.*

Proposição 1. *A distância esférica l entre dois pontos A e B é dada por $l = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$, onde α é o ângulo central, medido em graus, relacionado ao menor arco $\widehat{AB}$ do círculo máximo de raio r.*

Demonstração. Sendo l o comprimento do arco de círculo, que é proporcional á medida α,

Figura 18 – Triângulo não esférico: $\widehat{AB}$ é um arco de círculo menor



Fonte: Elaborada pelo autor.

segue que

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{2\pi r}{l}.$$

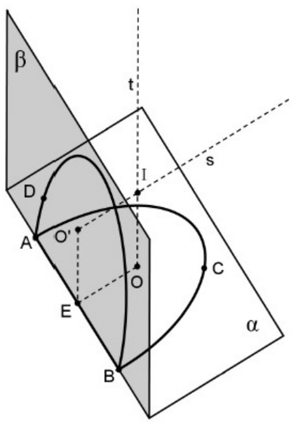
Logo,

$$l = \frac{\alpha}{360°} \times 2\pi r.$$

□

Proposição 2. *Quatro pontos, não coplanares, determinam uma única superfície esférica.*

Figura 19 – Determinação da superfície esférica



Fonte: Usui (2014, p. 22).

Demonstração.

1ª parte (Existência): Da geometria plana tem-se que, em um círculo, o diâmetro perpendicular a uma corda divide a corda em seu ponto médio. Reciprocamente, um diâmetro que divide uma corda no seu ponto médio é perpendicular a essa corda. Isto é, a reta mediatriz de qualquer corda passa pelo centro do círculo. Assim, um círculo que passe pelos três pontos distintos e não colineares deve ter seu centro equidistante dos três pontos.

Sejam quatro pontos A, B, C e D, não coplanares (ver Fig. 19). Os pontos A, B e C determinam um plano α e, nesse plano, um círculo com centro O. Da mesma forma, um plano β é determinado por A, B e D, além de um círculo com centro O'. Logo, AB é uma corda dos dois círculos. Traçando-se as perpendiculares a partir do centro de cada círculo à corda AB obtém-se o ponto médio E de tal corda. Portanto, os pontos O, O' e E determinam um plano γ. Além disso a corda AB é perpendicular a tal plano pois existem retas OE e $O'E$ de γ perpendiculares à corda AB. A partir do ponto O, traça-se uma reta t, que seja perpendicular à α.

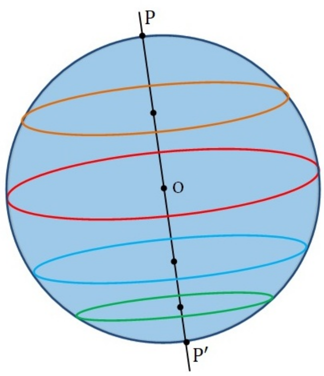
A partir de O', traça-se reta perpendicular ao plano β, denominada reta s. As retas s e t estão no mesmo plano, a saber, γ, mas não são paralelas, visto que A, B, C e D não são coplanares. Dessa forma, as retas t e s são concorrentes em um ponto, denominado I. Sendo I um ponto de t, segue que I está a uma mesma distância de A, B e C. Pode-se afirmar, ainda, que, como I pertence a s, então ele é equidistante a A, B e D. Logo, I é um ponto equidistante de A, B, C e D, donde existe ao menos uma superfície esférica com centro em I que passa por esses pontos.

2ª parte (Unicidade): A esfera obtida na parte 1 é única. Isso porque se houvesse outro ponto equidistante ao pontos dados, esse ponto pertenceria à reta t, que é perpendicular ao plano α e que passa por O, e também pertenceria à reta s, que é perpendicular ao plano β e que passa por O'. Assim, ele teria que ser o próprio ponto I, visto que I é o único ponto do espaço que está a uma mesma distância dos pontos A, B, C e D.

□

Proposição 3. *Todos os círculos paralelos têm os mesmos polos.*

Figura 20 – Círculos paralelos têm os mesmos polos



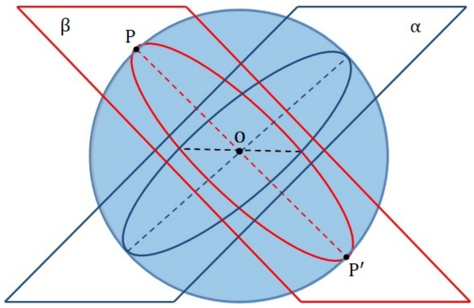
Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Sabe-se que "se dois planos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro". Portanto, o eixo polar (PP') de um círculo máximo é também o eixo polar do seu círculo paralelo. Por transitividade, qualquer outro círculo paralelo aos círculos citados tem, também, o mesmo eixo polar. Consequentemente, todos os círculos paralelos têm o mesmo eixo polar, ou seja, os mesmos polos (ver Fig. 20).

□

Proposição 4. *Todo plano que contém o eixo polar de um círculo máximo é perpendicular ao plano que contém esse círculo.*

Figura 21 – Círculos perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Como o eixo polar PP' é perpendicular ao plano do seu círculo máximo, qualquer plano que contém PP' é perpendicular ao plano do círculo máximo. Isso ocorre porque a definição de planos perpendiculares diz: "o plano β é perpendicular ao plano α se existe uma reta contida no plano β que seja perpendicular a α" (ver Fig. 21). □

Teorema 1. *O volume de uma esfera de raio r é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

Demonstração. O volume de um sólido determinado pela revolução de um gráfico de uma função contínua f, em torno do eixo Ox, é dado por $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$. Assim, tem-se que o volume da esfera, considerando-se $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, é dado por

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

□

Teorema 2. *A área A de uma superfície esférica é igual a $A = 4\pi r^2$, onde r é o raio da superfície esférica.*

Demonstração. Tem-se que a área da superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função contínua f, positiva e diferenciável, com derivada primeira contínua em um intervalo

(a,b) em torno do eixo Ox, é dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

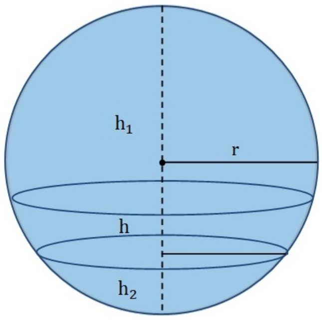
Assim, sendo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, segue que

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

□

Corolário 1. *A área A_z de uma zona esférica é $A_z = 2\pi rh$, onde r é o raio da superfície esférica e h é a distância entre os planos paralelos.*

Figura 22 – Área de uma zona esférica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. A zona esférica fica situada entre duas calotas esféricas. Logo, a área da zona esférica será a área da superfície esférica menos a área das calotas. Assim, a área da zona esférica é

$$4\pi r^2 - (2\pi rh_1 + 2\pi rh_2) = 2\pi r(2r - h_1 - h_2) = 2\pi rh.$$

□

Corolário 2. *A área A_f de um fuso esférico é $A_f = 2\alpha r^2$, onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo do fuso.*

Demonstração. Sabe-se que a área do fuso esférico A_f está para a área da superfície esférica da mesma forma que o ângulo do fuso α está para 2π. Logo, tem-se que

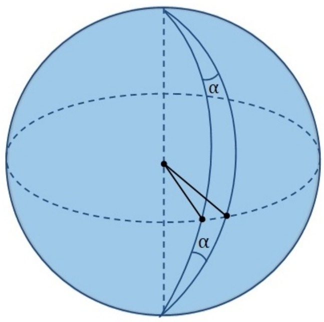
$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Portanto,

$$A_f = 2\alpha r^2.$$

□

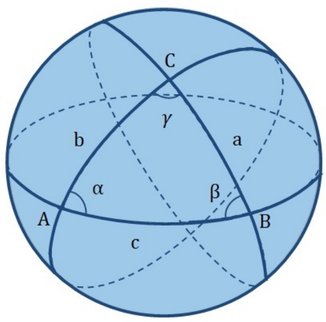
Figura 23 – Área do fuso esférico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 3. *Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC. Então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \dfrac{a}{r^2}$, sendo a a área desse triângulo esférico e r o raio da superfície esférica.*

Figura 24 – Área do triângulo esférico ABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Quando são prolongados os lados do triângulo esférico, são obtidos três fusos completos, que apresentam os mesmos ângulos internos que esse triângulo, com áreas $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. A área de um triângulo esférico ABC é a mesma área do triângulo $A'B'C'$, esse formado pelos pontos antípodas do triângulo ABC. Isso ocorre pois os triângulos são congruentes pelo casos LLL. Somando tais áreas, tem-se:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4a.$$

Tal igualdade ocorre porque, somando as áreas dos fusos, tem-se a área da superfície esférica acrescida da área do triângulo ABC multiplicada por quatro (equivalente a duas vezes à área de ABC e duas vezes a de $A'B'C'$). Portanto, $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \dfrac{a}{r^2}$.

$\square$

Teorema 4. *Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC. Então, $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3, a soma $\alpha+\beta+\gamma$ é maior do que π. Se forem tomados três vértices equidistantes, sendo próximos da circunferência máxima que separa o hemisfério que contém o triângulo e o que não o contém, tem-se que a a área desse triângulo tende ao valor da área do hemisfério, que é $2\pi r^2$. Portanto, de acordo com o resultado obtido pelo Teorema 3, a soma tende ao valor 3π, nunca assumindo tal valor. □

Logo, verificou-se que a soma dos ângulos em um triângulo esférico é um valor não constante, sempre maior do que π e menor que 3π.

Teorema 5. *Dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente se, os ângulos opostos também são iguais. Ou seja, $a = b \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$.*

Teorema 6. *Ao maior lado se opõe o maior ângulo, e vice-versa.*

Teorema 7. *A soma de dois ângulos é menor do que o terceiro acrescido de $180°$ e a diferença é menor do que o suplemento do terceiro. Ou seja, $\hat{A} + \hat{B} < \hat{C} + 180°$ e $\hat{A} - \hat{B} < 180° - \hat{C}$.*

Os Teoremas 5, 6 e 7 possuem deduções intuitivamente claras. Por isso, suas demonstrações estão omitidas.

Nota-se que uma das características que permite diferenciar a geometria euclidiana da geometria não euclidiana, em particular, a geometria esférica, é a não existência da ideia de semelhança. Isto é, em um plano esférico não é possível desenhar duas figuras que tenham a mesma proporção. Assim sendo, não há maneira de encontrar um triângulo esférico em que os ângulos correspondentes sejam congruentes e que possuam a mesma razão de proporcionalidade. Constata-se somente congruência entre triângulos, já que a área de um triângulo esférico depende apenas da soma dos seus ângulos internos, onde na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área. Dessa forma, na geometria esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

6.3 Trigonometria esférica

A trigonometria esférica estuda as propriedades geométricas dos triângulos esféricos. Eles são imprescindíveis na astronomia de posição, que considera a observação dos corpos na esfera celeste. Com base em conceitos previamente vistos, apresentam-se as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, especificamente a lei dos cossenos e lei dos senos, sendo essa última equivalente à lei do senos na trigonometria plana. A trigonometria esférica estabelece relações entre os seis elementos de um triângulo esférico (3 lados e 3 ângulos), tornando possível o cálculo de três desses elementos quando são conhecidos os outros três.

Lei dos cossenos para triângulos esféricos: Em todo triângulo esférico, o cosseno de um lado qualquer é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados somado ao produto dos senos desses mesmos lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

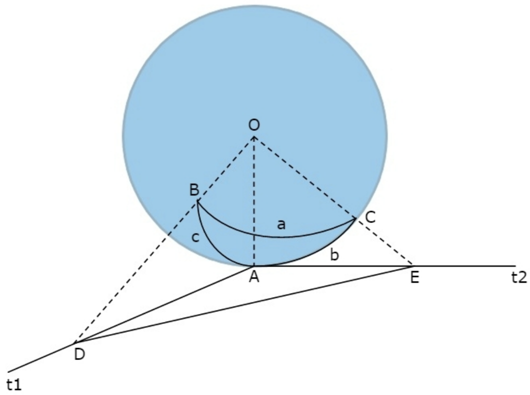
Proposição 5. *Seja ABC um triângulo esférico de centro O e lados a, b e c, sendo expressos pela medida dos ângulos planos $B\hat{O}C$, $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$, e $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos esféricos. Então:*

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$$

$$cos(b) = cos(a) \cdot cos(c) + sen(a) \cdot sen(c) \cdot cos(B)$$

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b) \cdot cos(C)$$

Figura 25 – Triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Considere um triângulo esférico ABC em um esfera de centro O, com lados a, b e c. As retas tangentes aos círculos máximos AB e AC, denominadas t_1 e t_2, são perpendiculares ao raio da esfera OA. Os raios OB e OC, se prolongados, se encontram com t_1 e t_2 nos pontos D e E, sendo formado um triângulo plano ADE. Na Fig. 25 podem ser observados os quatro triângulos planos, sendo dois deles retângulos em A, a saber, OAD e OAE. Dessa forma, as razões no triângulo AOD são :

$$\overline{AD} = \overline{OA} \cdot tan(B\hat{O}A)$$

$$\overline{OD} = \overline{OA} \cdot sec(B\hat{O}A).$$

Dado que $B\hat{O}A$ mede o lado c do triângulo, segue que:

$$\overline{AD} = \overline{OA} \cdot tan(c)$$

$$\overline{OD} = \overline{OA} \cdot sec(c).$$

No triângulo retângulo AOE, tem-se que:

$$\overline{AE} = \overline{OA} \cdot tan(A\hat{O}C)$$
$$\overline{OE} = \overline{OA} \cdot sec(A\hat{O}C),$$

que pode ser escrito como:

$$\overline{AE} = \overline{OA} \cdot tan(b)$$
$$\overline{OE} = \overline{OA} \cdot sec(b).$$

Considerando o triângulo DAE, segue que:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot cos(D\hat{A}E).$$

Sendo $r = 1$, a última relação pode ser reescrita como:

$$\overline{DE}^2 = tan^2(c) + tan^2(b) - 2 \cdot tan(b) \cdot tan(c) \cdot cos(A),$$

onde $D\hat{A}E$ mede o ângulo esférico $\hat{A}$ no triângulo ABC. No triângulo DOE, segue que:

$$\overline{DE}^2 = sec^2(c) + sec^2(b) - 2 \cdot sec(b) \cdot sec(c) \cdot cos(a),$$

dado que o ângulo $D\hat{O}E$ mede o lado a do triângulo esférico ABC. A partir das duas últimas igualdades, tem-se:

$$sec^2(c) + sec^2(b) - 2 \cdot sec(b)sec(c)cos(a) = tan^2(c) + tan^2(b) - 2 \cdot tan(b) \cdot tan(c) \cdot cos(A).$$

Utilizando a igualdade $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$, a relação anterior se torna:

$$1+tan^2(c)+1+tan^2(b)-2\cdot sec(b)\cdot sec(c)\cdot cos(a) = tan^2(c)+tan^2(b)-2\cdot tan(b)\cdot tan(c)\cdot cos(A),$$

donde:

$$1 - \frac{1}{cos(b)} \cdot \frac{1}{cos(c)} \cdot cos(a) = -\frac{sen(b)}{cos(b)} \cdot \frac{sen(c)}{cos(c)} \cdot cos(A)$$

$$cos(b) \cdot cos(c) - cos(a) = -sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$$

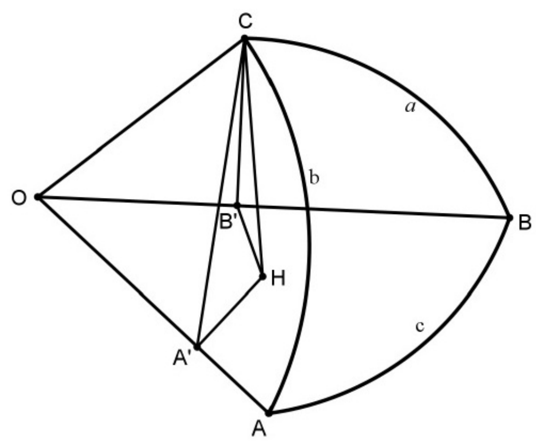
$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A).$$

Com demonstrações análogas, chega-se às outras relações expressas no enunciado da proposição.

□

Proposição 6 (Lei dos senos para triângulos esféricos)**.** *Em um triângulo esférico, os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Figura 26 – Lei do Senos



Fonte: Usui (2014, p. 69).

Demonstração. Considere ABC um triângulo esférico e O o centro da esfera. Na Fig. 26, o ponto H é a projeção do vértice C no plano AOB. Logo, CH é perpendicular a esse plano. Considere as projeções do ponto H sobre OA e OB, a saber, A' e B'. Assim, os triângulos $A'HC$, $B'HC$, $OA'C$ e $OB'C$ são retângulos. Logo,

$$sen(A) = sen(H\hat{A'}C) = \frac{CH}{CA'}$$

$$sen(B) = sen(H\hat{B'}C) = \frac{CH}{CB'},$$

donde:

$$\frac{sen(A)}{sen(B)} = \frac{CB'}{CA'} = \frac{sen(a)}{sen(b)} \Rightarrow \frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{sen(B)}{sen(b)}.$$

Pode-se mostrar, de forma análoga, que $\dfrac{sen(B)}{sen(b)} = \dfrac{sen(C)}{sen(c)}$, então:

$$\frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{sen(B)}{sen(b)} = \frac{sen(C)}{sen(c)}.$$

□

Uma das indagações referentes ao estudo de triângulos esféricos é o fato de ser possível existir o teorema de Pitágoras na geometria esférica. É sabido que o teorema de Pitágoras é derivado dos postulados da geometria euclidiana. Como a geometria euclidiana é a geometria sobre planos ou objetos em três dimensões baseados nos postulados de Euclides, de fato não tem-se o teorema de Pitágoras para a geometria esférica.

Contudo, pode-se estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo esférico retângulo a partir da fórmula fundamental $cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$, obtendo $cos(a) = cos(b) \cdot cos(c)$, que é uma relação envolvendo os lados do triângulo retângulo esférico.

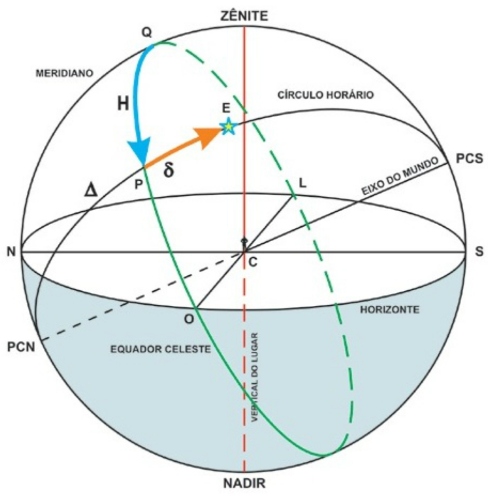
6.4 A esfera celeste

A partir da perspectiva de incluir o conceito de interdisciplinaridade no âmbito escolar, serão explicitadas informações sobre coordenadas astronômicas e geográficas, necessárias para a construção do conhecimento sobre a esfera celeste. Dessa forma, promove-se uma conexão entre as disciplinas de física, geografia e matemática, por meio dos conceitos abordados nesse trabalho, visando motivar e fundamentar tais estudos.

6.4.1 Sistemas de coordenadas astronômicas

Para determinar a posição de um astro no céu, é necessário definir e esclarecer um sistema de coordenadas.

Figura 27 – Elementos de coordenadas na esfera



Fonte: *Coordenadas Celestes II*.[5]

[5] Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/astronomia/AA003/horario.htm>. Acesso em: 19 mai. 2018.

- A vertical do lugar é a reta suporte do vetor aceleração da gravidade em um ponto da superfície terrestre onde se realiza a observação astronômica;

- Plano horizontal: é o plano perpendicular à direção vertical de um observador. Como o raio da Terra é muito pequeno frente ao raio da esfera celeste, considera-se que o plano horizontal intercepta a esfera celeste em um círculo máximo, ou seja, passa pelo centro. Esse círculo máximo é chamado de horizonte;

- Zênite: é o ponto no qual a vertical do lugar (perpendicular ao horizonte) intercepta a esfera celeste, acima da cabeça do observador;

- Nadir: é o ponto diametralmente oposto ao Zênite;

- Equador Celeste: é um círculo máximo, dado pela interseção da expansão do plano Equatorial Terrestre com a esfera celeste. Sendo o plano Equatorial Terrestre, o plano que contém o Equador Terrestre;

- Círculos verticais: de forma semelhante aos meridianos de superfície esférica, é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zênite e passam pelo Nadir;

- Círculos horários ou meridianos: são semicírculos da esfera celeste que contém os dois Polos Celestes. São perpendiculares ao Equador Celeste;

- Paralelos: são círculos da esfera celeste paralelos ao Equador Celeste;

- Ângulo horário (H): indica o afastamento angular do semicírculo horário de um astro em relação ao meridiano astronômico do observador. É a medida do arco do Equador Celeste, contada do meridiano para Oeste, até o pé do semicírculo horário do astro considerado (arco QP, da Fig. 27). É expresso em horas, minutos e segundos de tempo. Os ângulos horários dos diversos pontos da esfera celeste estão compreendidos, portanto, de 0 h até 24 h. Os pontos da esfera celeste situados no meridiano superior têm $H = 0$ h; os situados no meridiano inferior, $H = 12$ h. Os Polos Celestes não têm ângulo horário definido. Ressalta-se que consideram-se positivos os ângulos horários dos astros situados a Oeste do meridiano e negativos os dos astros a Leste;

- Declinação (δ): indica o afastamento angular de um astro em relação ao Equador Celeste. É a medida do arco do semicírculo horário que contém um astro, contada do Equador Celeste até o astro considerado (arco PE na Fig. 27). É expressa em graus, minutos e segundos de arco e é positiva para os astros situados ao Norte do Equador e negativa para os que estão ao Sul. As declinações dos diversos pontos da esfera celeste estão compreendidas, portanto, de $-90°$ até $+90°$. Os pontos da esfera celeste situados na linha do Equador Celeste têm $\delta = 0°$; o Polo Celeste Norte $\delta = +90°$ e, o Polo Celeste Sul, $\delta = -90°$;

- Distância polar (Δ): coordenada polar que indica o afastamento angular de um astro em relação ao Polo Celeste Norte. É a medida do arco do semicírculo horário que contém um astro, contada a partir do Polo Celeste Norte (PCN) até o astro considerado. É expressa em graus, minutos e segundos de arco e varia de $0°$ a $180°$. Os astros que estão no Hemisfério Celeste Norte têm $\Delta < 90°$ e, os que estão no Hemisfério Celeste Sul, $\Delta > 90°$. Os pontos da esfera celeste que se encontram no Equador Celeste têm $\Delta = 90°$; o Polo Celeste Norte tem $\Delta = 0°$ e o Polo Celeste Sul, $\Delta = 180°$. Para qualquer ponto da esfera celeste, vale a relação $\Delta + \delta = 90°$.

6.4.2 Coordenadas geográficas

Considerando o raio da esfera como sendo um parâmetro constante, para localizar um ponto qualquer na superfície esférica é necessário definir:

- O centro da esfera denominado origem das coordenadas;
- Um plano fundamental que passa pelo centro da esfera e, cuja intersecção com a mesma, determina o círculo máximo fundamental, e consequentemente, a direção fundamental, a reta perpendicular a esse círculo que passa pela origem e que determina os polos da mesma;
- Um ponto arbitrário do círculo máximo fundamental denominado ponto fundamental do sistema;
- Um círculo perpendicular que passa pelo ponto fundamental do sistema denominado círculo máximo secundário;
- Um sentido de orientação do arco. Se o sentido adotado coincide com o movimento do ponteiro de relógio denomina-se retrógrado, caso contrário, denomina-se direto.

Definem-se, a seguir, dois conceitos relacionados à geografia que são importantes para a localização exata de pontos no globo terrestre.

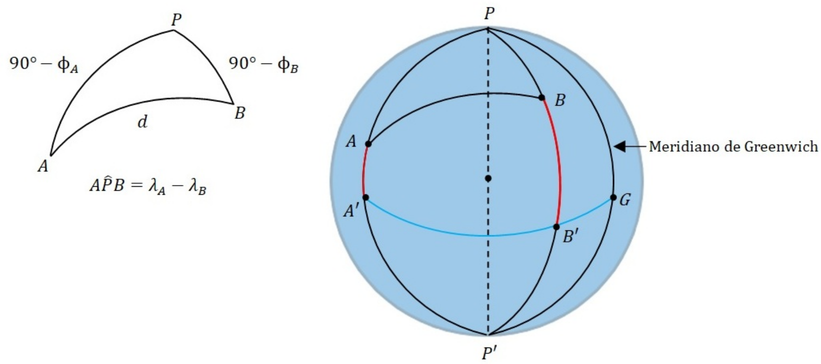
Definição 15. *A longitude geográfica (λ) de um lugar é o arco, medido sobre a linha do Equador, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano do lugar. A longitude varia de* $-180°$ *a* $+180°$*. A longitude do meridiano de Greenwich é* $0°$*. Adota-se o sinal positivo para a longitude de pontos localizados a Leste de Greenwich e o sinal negativo para pontos situados a Oeste.*

Definição 16. *A latitude geográfica (ϕ) de um lugar é o arco, medido ao longo do meridiano do lugar, entre a linha do Equador e o paralelo do lugar. O referencial da latitude é a linha do Equador (*$0°$*). A latitude varia entre* $-90°$ *e* $+90°$*, sendo positivo no Hemisfério Norte e negativa no Hemisfério Sul.*

6.4.3 Distância esférica entre dois pontos no globo terrestre

Proposição 7. *Sejam os pontos A, com latitude ϕ_A e longitude λ_A e B, com latitude ϕ_B e longitude λ_B, no globo terrestre. A distância esférica, d, entre dois pontos A e B, é dada pela expressão $cos(d) = sen(\phi_A) \cdot sen(\phi_B) + cos(\phi_A) \cdot cos(\phi_B) \cdot cos(\Delta\lambda)$, onde $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$.*

Figura 28 – Distância esférica entre dois pontos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Sejam A e B pontos no Hemisfério Norte. Na Fig. 28, P está no Polo Norte. Os pontos A', B' e G estão na interseção dos meridianos A, B e Greenwich com a linha do Equador. Considere $\widehat{AA'} = \phi_A$, $\widehat{BB'} = \phi_B$, $\widehat{A'G} = \lambda_A$ e $\widehat{B'G} = \lambda_B$. De acordo com a lei dos cossenos:

$$cos(\widehat{AB}) = cos(\widehat{AP}) \cdot cos(\widehat{BP}) + sen(\widehat{AP}) \cdot sen(\widehat{BP}) \cdot cos(A\hat{P}B).$$

Tem-se que $\widehat{AB} = d$, $\widehat{AP} = 90° - \phi_A$, $\widehat{BP} = 90° - \phi_B$ e $A\hat{P}B = \Delta\lambda$. Logo,

$$cos(d) = cos(90° - \phi_A) \cdot cos(90° - \phi_B) + sen(90° - \phi_A) \cdot sen(90° - \phi_B) \cdot cos(\Delta\lambda).$$

Como $sen(90° - \alpha) = cos(\alpha)$ e $cos(90° - \alpha) = sen(\alpha)$, segue que $cos(d) = sen(\phi_A) \cdot sen(\phi_B) + cos(\phi_A) \cdot cos(\phi_B) \cdot cos(\Delta\lambda)$. Considerando os pontos A e B no Hemisfério Sul ou em hemisférios diferentes, como $sen(90° + \alpha) = cos(\alpha)$ e $cos(90° + \alpha) = sen(-\alpha)$, chega-se ao mesmo resultado, considerando ϕ positivo para pontos no Hemisfério Norte e negativo para pontos no Hemisfério Sul.

□

Com base dos conceitos de latitude e longitude, é possível localizar qualquer ponto no globo terrestre. Para calcular a latitude, basta atentar ao ângulo formado entre o plano do Equador e a reta normal à superfície que se pretende descobrir. Para calcular a longitude, deve-se observar o ângulo formado entre o meridiano de Greenwich e o meridiano de referência.

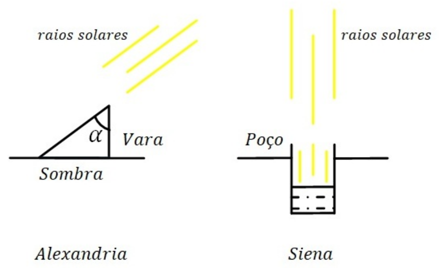
6.4.4 A medida do raio da Terra

Os conceitos de geometria não euclidiana, especificamente de geometria esférica, que são inerentes à esfera celeste relevam curiosidades e propriedades importantes em relação ao globo terrestre. Com a finalidade de exemplificar cálculos sobre o globo terrestre, deve-se recordar o cálculo notável de Eratóstenes.

O primeiro cálculo baseado em métodos geométricos foi o experimento de Eratóstenes, diretor da biblioteca de Alexandria que, por volta de 240 a.E.C., estimou o raio do planeta Terra pela primeira vez. No solstício de verão, Eratóstenes observou que, ao meio dia, os raios solares iluminavam o fundo de um poço situado em Siena (concluindo que os raios solares incidiam perpendicularmente).

Enquanto isso, na mesma hora, em Alexandria, havia uma sombra projetada por uma vara que permitia-lhe, a partir do comprimento da sombra e da altura da vara, o cálculo da inclinação dos raios solares. Eratóstenes então mediu um ângulo α correspondente à quinquagésima parte da circunferência, ou seja, 7,2° (Fig. 29).

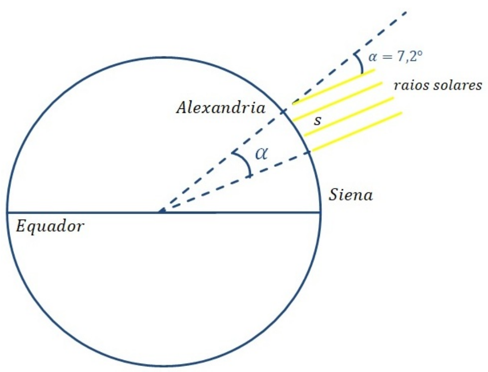
Figura 29 – O observado por Eratóstenes no solstício de verão



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir disso, o raciocínio utilizado pode ser traduzido geometricamente na Fig. 30.

Figura 30 – Determinação do raio da Terra por Eratóstenes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando a correspondência entre ângulos e arcos de circunferência e sendo p o perímetro da Terra, tem-se:

$$\frac{s}{p} = \frac{7{,}2°}{360°}.$$

Sendo s a distância entre Siena e Alexandria, estimada em 5000 estádios, segue que:

$$\frac{5000}{p} = \frac{7{,}2°}{360°}.$$

Dessa forma, obtém-se que $p = 250000$ estádios. Admite-se que o estádio equivalia, na época, a 157,5 metros, donde chega-se a $p = 250000 \times 0{,}1575 = 39375$ km. Assumindo o planeta Terra como esférico e sendo o perímetro da circunferência dado por $2\pi R$ tem-se:

$$R = \frac{39375}{2\pi} \Rightarrow R = 6267 \text{ km}.$$

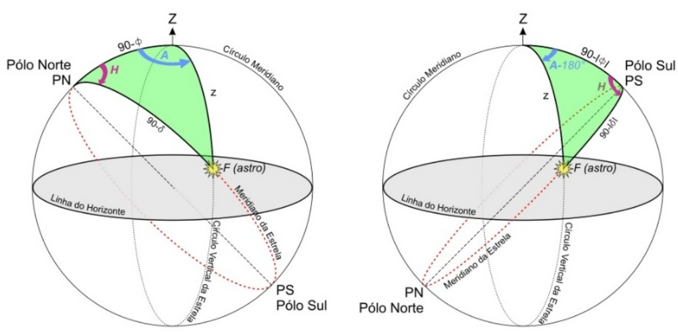
Atualmente, sabe-se que o raio da Terra é de 6378 km, ou seja, Eratóstenes, há mais de 2000 anos, estimou o raio da Terra diferindo em apenas 1,77% do real, o que pode ser considerado notável em seu experimento.

6.4.5 Triângulo de posição

O triângulo de posição é usado para obter as coordenadas do astro, quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou para determinar as coordenadas geográficas, quando conhecidas as coordenadas do astro. Isso porque o triângulo esférico é formado, na esfera celeste, pelo astro, pelo Zênite e pelo polo elevado. Ele também permite fazer as transformações de um sistema de coordenadas para outro.

As medidas dos lados do triângulo de posição são:

Figura 31 – Triângulo de posição



Fonte: *Trigonometria esférica.*[6]

- Lado formado pelo Zênite e o polo elevado é arco de medida igual a $90° - |\phi|$, sendo ϕ a latitude local do observador;

[6] Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>. Acesso em: 19 mai. 2018.

- Lado formado pelo Zênite e o astro é o arco de medida igual a z (distância zenital);
- Lado formado pelo astro e o polo elevado é o arco de medida igual a $90° - |\delta|$, sendo δ a declinação do astro.

Os ângulos internos do triângulo de posição são:

- Ângulo com vértice no Zênite tem medida igual a A (azimute), no Hemisfério Norte ou $A - 180°$ no Hemisfério Sul;
- Ângulo com vértice no polo elevado tem medida igual a H (ângulo horário);
- Ângulo com vértice na esfera celeste.

É possível estabelecer relações entre a distância zenital z, o azimute A, o ângulo horário H e a declinação δ. Usando a fórmula dos cossenos no triângulo de posição, pode-se tirar duas relações entre os sistemas de coordenadas. A saber, $cos(H) = cos(z) \cdot sec(\phi) \cdot sec(\delta) - tan(\phi) \cdot tan(\delta)$ e $cos(A) = sen(\delta) \cdot sec(\phi) \cdot cossec(z) - tan(\phi) \cdot cotan(z)$.

No caso em que $z = 90°$, segue que $cos(H) = -tan(\phi) \cdot tan(\delta)$. Essa fórmula pode ser usada para calcular o tempo de duração de visibilidade de um astro, como será visto na situação-problema 12 do capítulo 7.

Algumas definições e teoremas referentes à geometria esférica foram expostos ao longo desse capítulo, mostrando que essa geometria é importante para a compreensão de diversos problemas relacionados, por exemplo, à localização geográfica. No próximo capítulo tem-se a sugestão de algumas atividades que permitem que tal conteúdo seja abordado no ensino básico.

7 GEOMETRIA ESFÉRICA, ASTRONOMIA E GEOGRAFIA: PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentam-se atividades que tem por intento promover o ensino de geometria esférica através de situações-problemas. Essas situações estão relacionadas a conceitos abordados ao longo da presente pesquisa. A escolha dos problemas se deu em razão de que tais questões podem ser aplicadas nas disciplinas de geografia e astronomia, além de se encontrarem em paralelo aos conteúdos de geometria euclidiana.

A proposta aqui exposta visa, portanto, a interdisciplinaridade entre as disciplinas promovendo, ainda, a introdução de conceitos ligados à geometria esférica no ensino médio. Mais especificamente, procura-se desenvolver o estudo da esfera e suas características, explorando sua associação com o globo terrestre. Tal fato ocorre mediante a resolução de exercícios de caráter investigativo, que introduz os conceitos de modo intuitivo para, posteriormente, formalizá-los.

Os conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários, abordados anteriormente nesse trabalho, estão baseados em importantes ideias geométricas. Essas ideias, quando trabalhadas neste contexto, pretendem conduzir o aluno à compreensão do tema. Além disso, a utilização da esfera celeste com suas consequentes questões relacionadas, por exemplo, ao cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, abre caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a matemática e a geografia.

Situação-problema 1: Adaptada de Coutinho (2001) - Uma andorinha parte do ponto P e percorre nove mil quilômetros no sentido Sul. Em seguida, muda de rumo e voa nove mil quilômetros no sentido Leste. Finalmente, muda outra vez de rumo e percorre nove mil quilômetros no sentido Norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor da andorinha?

Nesta situação, solicita-se:

1. Desenhar, em uma folha de papel, o trajeto percorrido pela andorinha.
2. De acordo com a situação-problema acima, é possível que a andorinha volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões.
3. Desenhar, em uma esfera de isopor, o trajeto percorrido pela andorinha.
4. Analisando o trajeto desenhado na esfera de isopor é possível, para a andorinha, voltar ao mesmo ponto de partida?

A desígnio de introduzir e formalizar o conceito de geodésica, diferenciando a reta na superfície plana e na superfície esférica, bem como de abordar o conceito de reta na geometria euclidiana e esférica, isto é, infinita e finita, respectivamente, pode-se trabalhar a mesma situação-problema, como na situação a seguir.

Situação-problema 2: Baseando-se na situação-problema anterior, suponha que a andorinha parta do ponto de partida P e voe, em linha reta, infinitamente. Nesta situação, solicita-se:

1. Desenhar, em uma folha de papel, o trajeto percorrido pela andorinha.

2. De acordo com o trajeto percorrido, desenhado na folha de papel, é possível que a andorinha volte ao ponto de partida?

3. Desenhar, em uma esfera de isopor, o trajeto percorrido pela andorinha.

4. De acordo com o trajeto percorrido e desenhado na esfera de isopor, é possível, para a andorinha, voltar ao ponto de partida?

5. Anote suas conclusões.

Através da situação-problema 1, pode-se trabalhar a interdisciplinaridade com a geografia. Apresenta-se, como ideia, trabalhar a inexistência de retas paralelas na superfície esférica e a distância entre dois pontos. Isto é, demonstrar, aos alunos, que a distância entre dois pontos na superfície plana é um segmento de reta que os une e, na superfície esférica, é um arco. Para isso, é necessário somente utilizar-se da mesma sequência didática abordada acima, mesclando com conceitos da geografia tais como meridianos, paralelos, linhas do Equador, dentre outros.

Valendo-se do mesmo raciocínio, pode-se introduzir os conceitos de triângulos esféricos e a classificação de acordo com a medida de seus ângulos internos e seus lados.

Situação-problema 3: Construa as figuras, como indicado abaixo:

1. Desenhe um triângulo qualquer em uma folha de papel e, com um transferidor, meça seus ângulos. Anote os resultados.

2. Desenhe um triângulo qualquer em uma esfera de isopor e, com um transferidor, meça seus ângulos. Anote os resultados.

3. A quais conclusões você chegou?

Nesta situação, é possível constatar que a soma dos ângulos em um triângulo esférico é maior do que 180°. Com a situação-problema a seguir, mostra-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, além de ser maior que 180°, não é constante.

Situação-problema 4: Construa, com fios elásticos, um triângulo na superfície da esfera de isopor.

1. O que acontecerá com os ângulos se seus vértices forem progressivamente afastados?
2. Quanto medirão os ângulos quando se inscreverem sobre um Equador da esfera?
3. Quanto será a soma desses ângulos?

Situação-problema 5: Utilizando uma esfera de isopor, desenhar um círculo máximo, depois desenhar outro círculo máximo perpendicular ao anterior e, por fim, desenhar um terceiro círculo máximo, perpendicular aos dois já construídos.

1. Em quantos triângulos a esfera ficou dividida?
2. Quanto mede cada ângulo desses triângulos?
3. Qual é a soma dos ângulos internos desses triângulos?
4. Como é classificado esse triângulo esférico, de acordo com seus lados e seus ângulos?

Situação-problema 6: Na geometria esférica, as "linhas retas"são representadas por circunferências máximas. Se puder, encontre cada uma das seguintes figuras em tal geometria.

1. Um triângulo equilátero.
2. Um triângulo com dois ângulos retos.
3. Um triângulo com três ângulos retos.
4. Um triângulo cujas medidas de seus ângulos somem 500.

Situação-problema 7: Para identificar a localização de um ponto no plano, é necessário conhecer duas referências. No caso da geometria euclidiana, temos o plano cartesiano, e as duas referências são as coordenadas cartesianas x e y. No globo terrestre, como um ponto pode ser localizado?

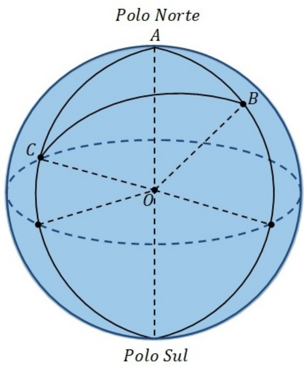
1. Localize e determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição da Ilha de Fernando de Noronha-PE e do Morro de São Paulo (Ilha de Tinharé-BA).
2. O globo terrestre possui um eixo de rotação imaginário. Como se chamam as interseções do globo terrestre com esse eixo?
3. Identifique quais tipos de círculos você pode observar na superfície do globo terrestre.
4. Quais dos círculos são círculos máximos?
5. Quais dos círculos são denominados paralelos terrestres?

6. Quais dos círculos são denominados meridianos?

Situação-problema 8: Adaptada de Carvalho (2014) - Considere a situação hipotética: Um pescador resolver pescar e saiu em alto mar. Começou uma tempestade e ele se perdeu. Por sorte, um avião que passava no local o avistou e passou as seguintes coordenadas para um navio que estava localizado na posição $47°10'$ N e $5°10'$ O: "Atenção! Embarcação pedindo socorro! Localização do pescador $59°15'$ N e $3°20'$ L". Qual é a distância que o navio deverá percorrer para salvar o pescador?

Nesta situação, é pertinente apresentar as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, especificamente a lei dos cossenos. Isto é, $cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$. Considerando o triângulo esférico (ver Fig. 32), nota-se que o ponto A está situado no Polo Norte, o ponto B é a localização do navio e o ponto C é a localização do pescador. Logo:

Figura 32 – Distância na superfície esférica



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\text{Lado } AB = c = 90° - 47°10' = 42°50'$$

$$\text{Lado } AC = b = 90° - 59°15' = 30°45'$$

$$\text{Ângulo } A = 5°10' + 3°20' = 8°30'$$

Aplicando a fórmula fundamental $cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A)$, tem-se que:

$$cos(a) = cos(30°45') \cdot cos(42°50') + sen(30°45') \cdot sen(42°50') \cdot cos(8°30')$$

$$cos(a) = (0.8594064115) \times (0.7333344574) + (0.5112930861) \times (0.679868056) \times (0.9890158634)$$

$$cos(a) = (0.6302323345) + (0.3476118365) \times (0.9890158634)$$

$$cos(a) = 0.6302323345 + 0.3437936206 \rightarrow cos(a) = 0.9740259551.$$

Logo, $a = 13.08735745$, ou, $13°5'14.49''$. Para converter o valor $13°5'14.49''$ em distância, basta isolar cada valor e converter, individualmente, somando os resultados.

$$13° \times 60 = 780$$

$$5' \times 1 = 5$$

$$14.49'' \div 60 = 0.2415$$

$$780 + 5 + 0.2415 \approx 785 \text{ milhas náuticas} \approx 1453 \text{ km.}$$

Logo, a distância que o navio deverá percorrer para resgatar o pescador é de 1453 km.

Situação-problema 9: Adaptado de Alves (2009) - As cidades de Curitiba e Goiânia estão sobre o mesmo meridiano 49° O. Suas latitudes são 26° S e 17° S, respectivamente. As cidades estão separadas por 9° de latitude e, tomando o raio da Terra como 6378 km, calcule a distância entre as duas cidades.

$$l = \frac{9}{360} \times 2\pi \times 6378 \approx 1001 \text{ km.}$$

Ressalta-se que todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas enquanto que, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Logo, quando A e B possuem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser usada para achar a medida α. Analogamente, quando A e B estão sobre o Equador, é a diferença entre as longitudes que nos permite calcular α.

Situação-problema 10: Adaptada de Carvalho (2014) - Encontre a diferença entre as longitudes:

1. Rio de Janeiro ($\lambda_1 = 43°10'22.427''$) e Pearl Harbour ($\lambda_2 = 157°58'34.356''$).

2. Rio de Janeiro e Moscou ($\lambda_3 = 37°37'2.279''$)

Para encontrar as distâncias entre as longitudes, basta realizar as seguintes operações:

1)

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 157°58'34.356'' - 43°10'22.427'' = 114°48'11.93''.$$

Para converter o valor $114°48'11.93''$ em distância, basta isolar cada valor e converter individualmente, somando os resultados.

$$114° \times 60 = 6840$$

$$48' \times 1 = 48$$

$$11.93'' \div 60 = 0.1988$$

$$6840 + 48 + 0.1988 \approx 6888$$

uma vez que ambas estão a Oeste de Greenwich.

2) $\lambda_3 + \lambda_1 = 37°37'2.279'' + 43°10'22.427'' = 80°47'24.71''$.

Para converter o valor $80°47'24.71''$ em distância, basta isolar cada valor e converter individualmente, somando os resultados.

$$80° \times 60 = 4800$$

$$47' \times 1 = 47$$

$$24.71'' \div 60 = 0.4118$$

$$4800 + 47 + 0.4118 \approx 4847$$

uma vez que uma é a Leste e a outra é a Oeste de Greenwich.

Situação-problema 11: Adaptado de Alves (2009) - Qual é a distância entre a cidade de Nova York ($40°42'45.991''$ N, $74°$ O) e Buenos Aires ($34°36'13.2624''$ S, $58°22'53.6124''$ O)?

Nesta situação, é preciso calcular a distância esférica entre dois pontos no globo terrestre. Sejam os pontos A, com latitude ϕ_A e longitude λ_A e B, com latitude ϕ_B e longitude λ_B, no globo terrestre. A distância esférica d entre dois pontos A e B, é dada pela expressão:

$$cos(d) = sen(\phi_A) \cdot sen(\phi_B) + cos(\phi_A) \cdot cos(\phi_B) \cdot cos(\Delta\lambda)$$

onde $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$.

Sendo A a cidade de Nova York e B a cidade de Buenos Aires, e considerando ϕ positivo para pontos no Hemisfério Norte e ϕ negativo para pontos no Hemisfério Sul, obtém-se:

$$cos(d) = sen(40°42'45.991''\ \text{N}) \cdot sen(-34°36'13.2624''\ \text{S}) +$$

$$+ cos(40°42'45.991''\ \text{N}) \cdot cos(-34°36'13.2624''\ \text{S}) \cdot cos(15°37'6.39'')$$

$$cos(d) = -0.370420501 + 0.60086364$$

$$cos(d) = 0.230443139$$

Portanto, $d = 76.67683741$ ou $76°40'36.61''$. Para converter o valor $76°40'36.61''$ em distância, basta isolar cada valor e converter, individualmente, somando os resultados.

$$76° \times 60 = 4560$$

$$40' \times 1 = 40$$

$$36.61'' \div 60 = 0.6101$$

$$4560 + 40 + 0.6101 \approx 4600.6101 \text{ milhas náuticas} \times 1.852 \approx 8520 \text{ km.}$$

Logo, a distância entre as cidades de Nova York e Buenos Aires é de 8520 km.

A próxima situação-problema relaciona-se com o triângulo de posição.

Situação-problema 12: Adaptada de Abreu e Ottoni (2015) - Obtenha o tempo em que o Sol estará acima do horizonte na cidade de Porto Alegre, cuja latitude é de 30°, no dia do solstício de verão no Hemisfério Sul, em que a declinação do Sol é igual a $-23°27'$.

Nesta situação, é preciso utilizar a fórmula dos cossenos no triângulo de posição, no caso em que $z = 90°$, isto é, $cos(H) = -tan(\phi) \cdot tan(\delta)$. Usando a fórmula acima, tem-se que:

$$cos(H) = -tan(-30°) \cdot tan(-23°27') = -0.2504401801.$$

Portanto, $H = 104.5°$. Assim, o tempo total que o Sol fica acima do horizonte será de $2\ H = 209° \approx 14$ h.

Notadamente, em Porto Alegre, o Sol estará acima do horizonte aproximadamente às 14 h e 10 min em 21 de dezembro, e 10 h e 10 min em 21 de junho. Note que a diferença de 10 minutos é devido à definição de que o dia começa com a borda superior do Sol no horizonte, terminando com a borda superior do Sol no horizonte, e não no centro do disco solar, como assumido na fórmula acima.

Situação-problema 13: Adaptada de Abreu e Ottoni (2015) - A distância verificada através de um círculo máximo que passa por duas estrelas é a separação angular entre elas. Sejam dados dois astros, a saber, A e B, com coordenadas dadas por (α_A, δ_A) e (α_B, δ_B), respectivamente.

Obtém-se, assim, um triângulo esférico constituído pelos arcos ao longo dos meridianos, de um polo P até as estrelas, e o terceiro arco sendo a separação angular entre elas. Dessa forma, por meio da aplicação da lei dos cossenos, segue que $cos(\widehat{AB}) = sen(\delta_A) \cdot sen(\delta_B) + cos(\delta_A) \cdot cos(\delta_B) \cdot cos(\alpha_A - \alpha_B)$.

Sabe-se que, no eixo maior da constelação do Cruzeiro do Sul, tem-se as estrelas Gacrux, com coordenadas $\alpha_A = 187{,}80°$ e $\delta_A = -57{,}11°$ e Acrux, com coordenadas $\alpha_B = 186{,}65°$ e $\delta_B = -63{,}10°$. Qual é, então, o tamanho dessa constelação, por meio da medida do eixo maior?

Tem-se, denotando por d o tamanho procurado, que:

$$cos(d) = sen(\delta_A) \cdot sen(\delta_B) + cos(\delta_A) \cdot cos(\delta_B) \cdot cos(\alpha_A - \alpha_B)$$

$$cos(d) = sen(-57{,}11°) \cdot sen(-63{,}10°) + cos(-57{,}11°) \cdot cos(-63{,}10°) \cdot cos(187{,}80° - 186{,}65°)$$

$$cos(d) = 0{,}9944906377 \Rightarrow d \approx 6°.$$

Ao longo do presente capítulo, foram verificadas algumas sugestões de atividades que permitem a interdisciplinaridade de matemática, geografia e física. Além disso é possível, por meio de exemplos reais, mostrar a importância de se trabalhar os conceitos relacionados à geometria esférica na educação básica. Esses problemas podem, ainda, ser expandidos e adaptados de acordo com o critério de cada professor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Questões relacionadas à astronomia são estudadas desde civilizações antigas. Na procura por respostas, verifica-se que a geometria euclidiana não é suficiente para sua completa compreensão. A apresentação de outras geometrias torna-se, portanto, indispensável.

Ao se analisar todo o contexto que engloba a disciplina de matemática, em todos os níveis da educação básica, a problemática propiciada pela abstração e sistematização do conhecimento mostra que mudanças devem ser realizadas. Nessa perspectiva, pode ser inserido o conceito de interdisciplinaridade, que propõe novas relações entre as disciplinas e atribuí à contextualização um fator de resgate do ensino significativo.

Ao longo do trabalho mostrou-se que a astronomia e a geografia, em conjunto com a geometria esférica, estão em estrita conexão, sendo que uma desempenha um papel de suma importância no desenvolvimento da outra. Dessa forma, a aplicação da astronomia e da geografia no ensino de matemática pode servir como elemento motivador na educação básica.

Tendo tais afirmações em vista, foram expostas situações que ratificam que conteúdos de astronomia podem e devem ser abordados em sala de aula permitindo, assim uma introdução a conteúdos relacionados a geometrias não euclidianas. A compreensão de conceitos matemáticos é, então, associada à resolução de problemas concretos, buscando uma maior participação do discente.

Esse trabalho não se constituiu, contudo, em um tutorial de resolução de problemas de geometria esférica. O que objetivou-se aqui foi apresentar exemplos envolvendo diferentes aplicações que permitem interligar as disciplinas mencionadas. Pretendeu-se, também, promover um entendimento sobre quais são as possibilidades e características de ensino e aprendizagem de conceitos próprios de geometrias não euclidianas na educação básica. Essa é uma área que, sem dúvida, carece de mais pesquisas e maior atenção, propiciando um ambiente de ensino que contribua significativamente para a formação dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

1. ABREU, Shyrlene Martins de; OTTONI, Jose Eloy. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição**. 2015.

2. AFONSO, G. B. Astronomia indígena. **Reunião Anual da SBPC**, v. 61, p. 1-5, 2010.

3. ALVES, Sérgio. **A geometria do globo terrestre**. 2009.

4. ARAÚJO, Diones Charles Costa de. **Astronomia no Brasil:** das grandes descobertas à popularização. Brasília, 2010.

5. ARAÚJO, Acenilso Lima de. **Aplicações de Astronomia no Ensino de Matemática na Educação Básica**. 2013.

6. BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: UNESP, 2009.

7. BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

8. BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais no primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC - Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

9. BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC - Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

10. BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental, 2000.

11. BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

12. BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view= alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 17 mar. 2018.

13. BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/ uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2018.

14. BRUM, Wanderley P.; SCHUMACHER, Elcio. Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio Sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando Uma Sequência Didática. **Alexandria:** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 7, n. 1, p. 127-156, 2014.

15. BUFFON, Alessandra Daniela; NEVES, Marcos Cesar Danhoni. A importância do ensino de astronomia na perspectiva de professores e pesquisadores. Simpósio Nacional do Ensino de Ciência e Tecnologia **-V SINECT**. 2016.

16. CANIATO, Rodolpho. **Um projeto brasileiro para o ensino de física**. Rio Claro, 1974.

17. CARVALHO, Maria Aparecida da Silva de; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. **XIII CIAEM**. 2011.

18. CARVALHO, Osnildo Andrade. **Uma abordagem de geometrias não euclidianas na educação básica:** Geometria esférica . 2014.

19. COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2001.

20. DAMASCENO, Julio Cesar Gonçalves. **O ensino de astronomia como facilitador nos processos de ensino e aprendizagem** . 2016.

21. DUELI, Leandro de Jesus. **Geometria esférica:** propostas de sequências didáticas interdisciplinares. 2013.

22. FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria e a Teoria das Inteligências Múltiplas: uma experiência com Informática no Colégio Santa Úrsula, no Rio de Janeiro. Pátio. **Revista pedagógica**. Porto Alegre. Ano 1. n. 1, p. 46-50, maio/jul. 1997.

23. FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Integração e interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro:** efetividade ou ideologia. São Paulo: Edições Loyola, 1979.

24. FERREIRA, Paulo Roberto. **Astronomia**. 2003.

25. FREIRE, Paulo. **Comunicação ou extensão**. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, v. 7, 1992.

26. GARCIA, Joe. A interdisciplinaridade segundo os PCNs. **Revista de Educação Pública**, v. 17, n. 35, p. 363-378, 2008.

27. GOZZER, Giovanni. Interdisciplinary: a concept still unclear. **Prospects**, New York, v. 12, n. 3, p. 281-292, 1982.

28. HENRIQUE, Alexandre Bagdonas; ANDRADE, Victória Flório Pires de; L'Astorina, Bruno. Discussões sobre a natureza da ciência em um curso sobre a história da astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, n. 9, p. 17-31, 2010.

29. HUGUENIN, Jose Augusto Oliveira; ZONZIN, Marlice. A lei da Esperança. In: CAMINHA, Vera Lúcia et al. **Autismo:** vivências e caminhos. São Paulo: Blucher, 2016.

30. ITOKAZU, A. G. 1609: da astronomia tradicional ao nascimento da astrofísica. **Ciência e Cultura**, v. 61, n. 4, p. 42-45, 2009.

31. JANTSCH, Ari Paulo. BIANCHETTI, Lucídio (orgs). **Interdisciplinaridade:** para além da filosofia do sujeito, v. 9, 1995.

32. KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou Possibilidade. **X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador–BA, 2010.

33. KLEIN, J. Ensino interdisciplinar: didática e teoria. In: FAZENDA, Ivani (Org.). **Didática e interdisciplinaridade**. Campinas: Papirus, 1998. p. 109-132.

34. LANGHI, Rodolfo. **Um estudo exploratório para a inserção da Astronomia na formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Bauru: UNESP, 2004.

35. LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. **História da Matemática no Egito**. 2000. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/egito.html>. Acesso em: 02 fev. 2018.

36. LUCKESI, Cipriano Carlos. **Filosofia da Educação**. São Paulo: Cortez, 1994.

37. MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**, 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

38. MARTINS, Leocadia Figueredo. **Motivando o ensino da geometria**. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Santa Catarina, 2008.

39. MATSUURA, Oscar T. **História da Astronomia no Brasil**. 2013.

40. NOGUEIRA, Salvador; CANALLE, João Batista Garcia. Astronomia: ensinos fundamental e médio. **Coleção explorando o ensino:** Astronomia, v. 11. Brasília: MEC, SEB ; MCT ; AEB, 2009.

41. OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica**. 2014.

42. PAULA, Elvis de; FERNANDES, Francisco CR. Educação Matemática pela contextualização da Astronomia. **XIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica**, UNIVAP, São José dos Campos, SP, v. 15, 2009.

43. POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro - RJ: Interciência, 1995.

44. PORTO, Deivd Andrade. **História da Astronomia:** A evolução da ideia do universo da antiguidade à idade moderna. 2010.

45. PORTO, C. M.; PORTO, M. B. D. S. M. A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna. **Revista brasileira de ensino de física**, v. 30, n. 4, p. 4601, 2008.

46. PRAZERES, Roberta Fonseca dos. **Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos**. 2010.

47. ROONEY, Anne. **The story of astronomy**. 2017.

48. SANTOS, Tawana Telles Batista; NUNES, Daniel Martins. Um olhar reflexivo sobre a aprendizagem geométrica no 9º ano do ensino fundamental. **IV EIEMAT**. 2014.

49. SELIN, Helaine. **Astronomy across cultures:** the history of non-Western astronomy. Springer Science & Business Media, 2000.

50. SOLER, Daniel Rutkowski; LEITE, Cristina. Importância e Justificativas para o Ensino de Astronomia: um olhar para as pesquisas da área. **II Simpósio Nacional de Educação em Astronomia**, 2012.

51. SHUTTLEWORTH, Martyn. **Egyptian Astronomy**. 2010a. Disponível em: <https:// explorable.com/egyptian-astronomy>. Acesso em: 20 jan. 2018.

52. SHUTTLEWORTH, Martyn. **Ancient Chinese Astronomy**. 2010b. Disponível em: <https:// explorable.com/chinese-astronomy>. Acesso em: 20 jan. 2018.

53. TERRADAS, Rodrigo Donizete. A importância da interdisciplinaridade na educação matemática. **Revista da Faculdade de Educação**, Ano IX, n. 16, p. 95-114, 2011.

54. THOMAZ, Mara Lucia; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria não-euclidiana e geometria esférica. **O professor pde e os desafios da escola pública paranaense**. Paraná: Secretaria de Educação, 2007.

55. TIGNANELLI, H. L. Sobre o ensino da astronomia no ensino fundamental. In: WEISSMANN, H. (org.). **Didática das ciências naturais:** contribuições e reflexões. Porto Alegre: Artmed, 1998.

56. USUI, Tetsuo. **O globo terrestre e a esfera celeste:** uma abordagem interdisciplinar de Matemática, Geografia e Astronomia. 2014.

57. VARELLA, Irineu Gomes. Coordenadas Celestes II: Sistema Horário. **Astronomia e Astrofísica**. 2004. Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/astronomia/AA003/horario.htm>. Acesso em: 23 abr. 2018.