INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

Nathália Barbosa Santos

ESTUDO DE CASO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE ONDAS SONORAS

Volta Redonda

2018

Nathália Barbosa Santos

ESTUDO DE CASO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE ONDAS SONORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática do IFRJ - Campus Volta Redonda, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: José Ricardo Ferreira de Almeida

Volta Redonda

2018

Santos, Nathália Barbosa
S237e Estudo de caso de modelagem matemática de Ondas Sonoras /Nathália Barbosa Santos - - RJ: Volta Redonda, 2018.
68 f.: il.

Orientador: Profº. MSc José Ricardo Ferreira de Almeida

Monografia (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2018.

1.Matemática - Modelagem 2. Matemática - Ensino 3.Ondas Sonoras I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Almeida, José Ricardo Ferreira de IV. Título

CDU 543-7

NATHÁLIA BARBOSA SANTOS

ESTUDO DE CASO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE ONDAS SONORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática do IFRJ - Campus Volta Redonda, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovado em 10 / 07 / 18.

Banca Examinadora

Prof. Msc. José Ricardo Ferreira de Almeida - (Orientador)
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Prof. Dr. Andrey Dione Ferreira - (membro interno)
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Prof. Msc. Jorge Luiz Rebelo - (membro interno)
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Prof. Dr. André Isnard - (membro suplente interno)
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

“Se fui capaz de ver mais longe, é porque
me apoiei em ombros de gigantes.”
Isaac Newton

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus. Pela minha família, saúde, amigos e por todas as coisas boas que já aconteceram comigo. Sempre soube que Você estava ao meu lado.

Em segundo, a minha família: Meus pais, Magna e Luiz, eu nunca vou conseguir mostrar o quanto sou grata por tudo que vocês sempre fizeram por mim; minha irmã: Bruna, o melhor pedido que já fiz em minha vida foi ter uma irmã, ter você como minha irmã; ao meu namorado: Jefferson, todo o seu apoio, amor e carinho foram essenciais para essa conquista. E este é só um dos primeiros passos de todas as conquistas que vamos realizar ao longo de nossa vida juntos. Te amo muito; e a todos os meus tios, primos e avós: Amo muito todos vocês, base para minha vida. Valem agradecimentos especiais ainda a minha quase tia e amiga, Isabella Amorim, a minha avó, Dona Silvia e a minha tia, Ednea: que me deram tanto apoio num dos momentos mais difíceis desta caminhada. Amo vocês, meus exemplos.

Aos meus amigos: às minhas meninas da época do CVD: Gabriela La Croix, Giuliana Barbosa, Marine Lomba, Rani Alvez e Yasmin Arbex; e amigos que fiz durante toda a minha jornada de graduação. Em especial a minha amiga e professora Marina Ribeiro: grande conselheira, profissional e amiga. Muito obrigada por todo o apoio de sempre, quase irmã mais velha e exemplo de professora.

Aos meus queridos professores da UFF, em especial a Marina Sequeiros, Rosemary Pires e Marina Ribeiro; e também a todos os professores e funcionários do IFRJ. Em especial aos professores Isabella Moreira, Giovana Cardoso, Rafael Vassallo, Andrey Ferreira e ao meu orientador José Ricardo. Tenho certeza de que o IF foi minha melhor escolha entre minhas aventuras em tantas faculdades e grande parte do motivo disso é poder ter contado com o apoio, atenção e profissionalismo de vocês. Muito, muito obrigada.

Resumo

Este trabalho visa fazer um estudo de caso sobre modelagem matemática de ondas sonoras. Entende-se modelagem matemática como método no qual fazemos uma abordagem de um fenômeno natural não essencialmente matemático, criando um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão desse fenômeno natural, sendo que esse fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento. Consideramos habilidades e competências a serem desenvolvidas por alunos de Ensino Médio estipuladas pelos documentos oficiais sobre educação no Brasil, PCN e BNCC, para prepararmos um plano de trabalho a ser aplicado numa turma de 3º ano do Ensino Médio-Técnico do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Volta Redonda. Esse plano de trabalho é uma adaptação do material de Matemática e Suas Tecnologias do Projeto EM-Ação realizado pela Secretaria da Educação do Estado da Bahia e pelo professor Humberto Bortolossi. Aplicada a aula, os alunos preencheram um questionário para fins de análise do rendimento da aula, da elaboração dos resultados e conclusões deste trabalho.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino de Matemática. Ondas Sonoras. Funções trigonométricas.

Abstract

This paper aims to make a case study on mathematical modeling of sound waves. It is understood mathematical modeling as a method in which we approach a natural phenomenon not essentially mathematical, creating a mathematical model (a mathematical pattern or formula) for explanation or understanding of this natural phenomenon and this phenomenon can be from any area of knowledge. We consider the skills and competences to be developed by high school students stipulated by the official documents on education in Brazil, PCN and BNCC, in order to prepare a work plan to be applied in a 3rd year class of the Technical High School of the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Volta Redonda. This work plan is an adaptation of the material of Mathematics and Its Technologies of the Project EM-Ação carried out by the Secretary of Education of the State of Bahia and by Professor Humberto Bortolossi. Applied to the class, the students completed a questionnaire for the purpose of analyzing the class performance, the elaboration of the results and conclusions of this work.

Key words: Mathematical Modeling. Mathematics Teaching. Sound waves. Trigonometric functions.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEB	Câmara de Educação Básica
CNE	Conselho Nacional de Educação
Consed	Conselho Nacional de Secretários de Educação
EM-Ação	Programa Ensino Médio EM-Ação
GPS	*Global Positioning System*
Hz	*Hertz*
IAT	Instituto Anísio Teixeira
IFBA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PUC-Rio	Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Undime	União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação
UNE	União Nacional dos Estudantes.

Sumário

Introdução

De acordo com Neivaldo Silva (2004), o Ensino de matemática busca, principalmente, a formação de indivíduos independentes e com raciocínio lógico bem desenvolvido. Sendo assim capazes de resolver problemas da vida real utilizando conhecimentos adquiridos em seu período escolar.

Porém, D’AMBROSIO, Beatriz S. (1989) observa que, o desinteresse dos alunos por esta disciplina, tanto do ensino fundamental quanto do médio, torna-se cada vez mais evidente, uma vez que o método de ensino utilizado pela maioria dos professores é monótono e repetitivo. Tratando-se do sistema de ensino do conceito, onde exemplos são feitos pelo professor, e seguidos da realização de inúmeras atividades pelos alunos, sendo que essas não fogem em nada aos exemplos apresentados. Não estimulando assim, o raciocínio lógico do aluno.

Isso faz com que os alunos adquiram a visão de que a matemática é apenas um acúmulo de fórmulas e algoritmos. E também de que tais conceitos são inquestionáveis. Não havendo assim necessidade de duvidar ou compreender como eles funcionam.

Consequentemente, ainda de acordo com D’AMBROSIO, o aluno não desenvolve autoconfiança em sua intuição matemática. Além de não conseguir visualizar que a solução de um problema encontrado matematicamente, pode estar relacionado com a solução de um problema encontrado numa situação real.

D’AMBROSIO afirma ainda que, diversas são as atuais linhas de pesquisa e propostas de trabalho lidando com a pergunta: como ensinar matemática hoje? Algumas delas colocando o aluno como centro do processo educacional. Tornando-o assim, um ser ativo nesse processo e o professor no papel de orientador e monitor das atividades propostas aos alunos e por eles realizadas. Algumas dessas propostas são: resolução de problemas, etnomatemática, história da matemática, uso de computadores, uso de materiais concretos e jogos matemáticos e modelagem.

A resolução de problemas, para DANTE (1991), é uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas que ocasionam investigação e exploração de novos conceitos.

A importância da resolução está no fato de proporcionar aos alunos a mobilização de conhecimentos e desenvolvimento da capacidade de gerenciar informações ao seu alcance, no dia-a-dia ou em sala de aula. Assim, os alunos tornam-se capazes de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como do mundo em geral. Desenvolvendo ainda, sua autoconfiança (SCHOENFELD apud PCN, 1998).

Ainda, segundo DANTE (1991):

> *É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela. DANTE (1991)*

A etnomatemática e a história da matemática, na perspectiva de D'AMBROSIO, também são outros eficientes auxiliadores no ensino de matemática. Ela afirma que a etnomatemática é o estudo da matemática usada e criada por cada grupo social. Pois, embora a matemática seja uma ciência e linguagem universal, vê-se que povos de diferentes culturas usam-na de diversas maneiras. Tornando-se essencial que os professores de matemática interpretem e compreendam tais conhecimentos a fim de utilizá-los no ensino-aprendizagem de pessoas desse grupo.

A história da matemática acaba se tornando um estímulo para os pesquisadores ao estudo de matemática. Uma vez que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma melhor compreensão da evolução do conceito. Esta proposta está muito relacionada a etnomatemática. Já que cada vez mais são revelados estágios de desenvolvimento matemático em diferentes grupos culturais, que apresentam semelhanças aos estágios de desenvolvimento histórico de diversos conceitos.

Com a evolução da tecnologia, o uso de computadores passou a ser feito para diversos tipos de atividades. Sendo essa ferramenta muito útil no ensino-aprendizagem de matemática, principalmente em tecnologias de comunicação e interação. Entre os principais softwares utilizados podemos citar o GeoGebra e o MatLab. Sendo o MatLab um software de alta performance que trabalha com funções matemáticas, equações diferencias ordinárias, equações diferencias parciais, estatística, processamento de imagens, processamento de sinais e finanças, e o GeoGebra um software que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Usado em diversos níveis de ensino (NASCIMENTO, 2012).

Quanto ao uso de materiais concretos e jogos matemáticos, alguns professores acreditam não haver aprendizado sem ação. Afirmando que antes de apresentar uma tecnologia aos alunos, primeiro deve-se introduzir uma situação problema concreta que os leve a refletir, agir e experimentar, mergulhando assim na abstração (FIORENTINI apud AZEVEDO, 1990).

Para Bassanezi, “a modelagem matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do real”. Porém, o professor não deve apoiar sua metodologia por completo em um jogo ou algum material concreto. Estes devem servir apenas como apoio ao ensino, como uma introdução ao assunto, de maneira lúdica.

Numa visão mais pedagógica, entende-se como Modelagem Matemática uma concepção na qual diferentes grupos de alunos selecionam um tema ou problema a ser investigado. Desenvolvem então tal investigação que muitas vezes envolve aspectos matemáticos relacionados com o tema. Sendo então, a modelagem, uma maneira do aluno utilizar seus conhecimentos adquiridos fazendo com que os conceitos trabalhados tenham um maior significado. E ainda, tornando-se mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários (HERMINIO; BORBA, 2010).

Na Modelagem Matemática, um grupo de alunos pode determinar qual o assunto que será trabalhado. Assim, por conta disso, há maior interesse do grupo, há maior interação no processo de ensino e de aprendizagem e demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação.

Segundo BURAK (2004), na sala de aula, a Modelagem Matemática é desenvolvida em cinco etapas:

- escolha do tema;
- pesquisa exploratória;
- levantamento dos problemas;
- resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema;
- análise crítica da(s) solução(es).

Nessa linha, este trabalho visa adaptar um projeto sobre modelagem matemática para ensino médio, elaborado e já aplicado pelo professor Humberto Bortolossi em conjunto com a Secretaria da Educação do Estado da Bahia. Isso com o objetivo de analisar a absorção de conteúdo e a receptividade dos alunos através desse método de ensino, e ainda se os recursos são suficientes para ilustrar o problema.

Assim, este trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, será feita uma síntese a respeito das justificativas para Ensino Significativo de Matemática de acordo com PCN e BNCC;
- No capítulo 2, definiremos, veremos objetivos e algumas considerações sobre Modelagem Matemática;
- E o capítulo 3 contém: o plano de trabalho adaptado do projeto denominado EM-Ação elaborado pelo professor Bortolossi, perfil da turma em que a adaptação foi aplicada, resultados e conclusão sobre a adaptação.

Capítulo 1: Justificativas para Ensino Significativo de Matemática de acordo com PCN e BNCC

1.1 Justificativas para ensino significativo de Matemática de acordo com o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais).

DE CASTRO (2004) diz que, em 1998, foram estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Resolução Câmara de Educação Básica(CEB)/CNE Nº03/98). Assim, as expectativas quanto às habilidades básicas a serem desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Física, Química e Matemática no Ensino Médio, foram baseadas nessas diretrizes e definidas no documento intitulado Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Os PCN afirmam ser seu objetivo apresentar uma proposta para o Ensino Médio que efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho. Assim, as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos serão instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade.

Diz ainda que, os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Isto é particularmente verdadeiro para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.

Mais especificamente, para um aprendizado dos alunos e dos professores e seu contínuo aperfeiçoamento o PCN considera necessário:

> *Tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. A partir disso, é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver conhecimentos de alcance mais universal. (PCN, 1997)*

Nesse sentido, o aprendizado não deve ser focado apenas no uso pelos alunos de materiais instrucionais, nem às aulas expositivas com discursos professorais.

De acordo com BARBOSA (2014), na Educação Matemática, existe a necessidade de serem incluídas mais situações com referências na realidade. Afirma também que, com isso, surgirão mais possibilidades dos alunos questionarem-se sobre o papel da matemática na sociedade, o que talvez não ocorra tão naturalmente em outros ambientes de aprendizagem.

Como exemplo de uma situação de contextualização podemos citar os estudos de finanças. DA CRUZ (2013) afirma ser evidente nos PCN a preocupação do MEC em relação ao desenvolvimento de competências dos alunos do Ensino Médio, de aspectos da formação econômico-financeira. Porém, não há uma menção clara e direta sobre a Educação Financeira. Diz ainda ser papel da escola dar ao aluno condições para se inserir na sociedade.

Por conseguinte, os PCN dizem ainda que:

> *No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea (...), em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado. (PCN, 1997)*

As competências e habilidades explicitadas a seguir são destacadas nos PCN e conferem unidade ao ensino das diferentes disciplinas da área de *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Assim, orientam o trabalho integrado dos professores dessa área e possibilitam a articulação de seus esforços com os professores das outras duas áreas.

- **Representação e comunicação** (desenvolver a capacidade de comunicação);
- **Investigação e compreensão** (desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender);
- **Contextualização sócio-cultural** (compreender e utilizar a ciência, como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático).

Estritamente, as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática são:

1.1.1 Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática;
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta;
- Produzir textos matemáticos adequados;
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação;
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

1.1.2 Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc;.

- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

1.1.3 Contextualização sócio-cultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

1.2 A Base Nacional Comum Curricular e o ensino de Matemática

Em seu artigo, PINTO (2017), coteja sobre as duas primeiras versões da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), elaboradas antes de sua versão definitiva. A primeira versão foi colocada para debate em outubro de 2015 e a segunda, em abril de 2016. O Ministério da Educação anunciou tais versões solicitando a contribuição à discussão pública na forma de pareceres críticos sobre tais preliminares da BNCC.

Quanto a área de Matemática e Suas Tecnologias, os professores e cidadãos que analisaram essas primeiras versões, focaram a análise nos conteúdos de ensino que compõem o eixo “Álgebra e Funções”, por constituírem de conteúdos muito identificados com o currículo do Ensino Médio, além de serem temáticas muito relevantes para a formação matemática dos jovens, nesta etapa da escolarização.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular), em sua primeira versão, afirma-se como:

> *A BNC é constituída pelos conhecimentos fundamentais aos quais todo/toda estudante brasileiro deve ter acesso para que seus direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento sejam assegurados. Esses conhecimentos devem constituir a base comum do currículo de todas as escolas brasileiras, embora não sejam, eles próprios, a totalidade do currículo, mas parte dele. Deve-se acrescer à parte comum, a diversificada, a ser construída em diálogo com a primeira e com a realidade de cada sistema educacional sobre as experiências e conhecimentos que devem ser oferecidos aos estudantes e às estudantes ao longo de seu processo de escolarização (BRASIL, 2015, p. 13).*

No dia três de abril de 2018, a versão definitiva da BNCC foi entregue ao CNE pelo ministro da Educação, Mendonça Filho. Porém, antes de sua versão definitiva, alguns autores já faziam análises sobre os textos preliminares lançados.

DA SILVA (2016) em seu artigo, diz que as redes de ensino de todo o Brasil foram solicitadas a se mobilizarem em função deste novo documento proposto pelo Ministério da Educação (BRASIL, 2015). Educadores de todas as regiões brasileiras, formações e campos de atuação, a pedido do Ministério da Educação (MEC), analisaram e opinaram sobre as prévias do documento. Constava no documento que as justificativas para tal empreendimento estariam, ancoradas no Plano Nacional de Educação 2014-2024 (BRASIL, 2014).

Sobre sua versão definitiva, a própria BNCC afirma-se como uma política de Estado construída de maneira democrática e colaborativa. Seu processo de construção, iniciado em 2015 e conduzido pelo MEC, Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed), União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) e CNE, teve participação da sociedade civil, de professores e de gestores. E sua versão final foi homologada em dezembro de 2017 pelo Ministro da Educação.

Como visto na seção anterior, o PCN coloca como umas das competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática a Contextualização Sócio-Cultural. Nessa linha, o BNCC coloca como foco no

Ensino médio a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Ainda afirma que:

> *Quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.(BNCC, 2018)*

Podemos ainda ver semelhanças com os aspectos mencionados no PCN, no seguinte trecho :

> *Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum.(BNCC, 2018)*

A fim de que esses propósitos se concretizem nessa área, o BNCC destaca que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Com esse objetivo, eles devem desenvolver suas próprias maneiras de **raciocinar**, **representar**, **argumentar** e **comunicar**.

- para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática;
- as competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio;

- após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar-se ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros;
- com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar.

Ainda foram definidos, um conjunto de pares de ideias fundamentais que produzem articulações entre os vários campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometría, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas) e que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático. Os pares de ideias fundamentais adotados são: **variação e constância**; **certeza e incerteza**; **movimento e posição**; **relações e inter-relações**.

- variação e constância envolve observar, imaginar, abstrair, discernir e reconhecer características comuns e diferentes ou o que mudou e o que permaneceu invariante, expressar e representar (ou descrever) padrões, generalizando-os. Reitera-se que, como essas ideias não são exclusivas da Matemática, podem gerar integração entre as áreas;
- certeza e incerteza é um par associado, na matemática escolar, ao estudo de fenômenos aleatórios, à obtenção de medidas no mundo físico, a estimativas, análises e inferências estatísticas e as argumentações e demonstrações algébricas ou geométricas;
- movimento e posição estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no

espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados. O uso de mapas, GPS e de outros recursos implica a observação e estudo desse par de ideias;

- relações e inter-relações estão presentes em muitas situações reais nas quais se aplica a Matemática. As relações estão presentes em problemas que envolvem a proporcionalidade entre duas ou mais grandezas, escalas, divisão em partes proporcionais etc. que tratam da interdependência entre grandezas. Dessas relações, evolui-se para a noção de função, uma noção integradora da Matemática. Os movimentos de figuras, como as reflexões em retas, rotações e translações, podem ser expressos por funções, em trabalhos no plano cartesiano, por exemplo;

Por fim, o BNCC diz que no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Seguem as competências a serem alcançadas relacionadas a cada uma das habilidades anteriormente citadas.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Figura 1: Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio de acordo com o BNCC.[1]

Apoiados nas justificativas acima citadas, no próximo capítulo definiremos e faremos algumas considerações sobre Modelagem Matemática, uma vez que, este será o tema em que nos apoiaremos para a aplicação de uma aula expositiva.

[1] Figura disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 7 de maio de 2018

Capítulo 2: Modelagem Matemática

2.1 Definições e Objetivos

De acordo com CHAVES e ESPÍRITO SANTO (2008), a Modelagem Matemática é uma das metodologias mais em evidência na atual Educação Matemática brasileira. Mesmo decorridos vinte anos de pesquisas nessa área, ainda há divergências. Principalmente no que diz respeito a sua concepção e a sua utilização em contexto escolar. A forma como é colocada em prática ou como são criadas e organizadas as atividades dessa natureza para a sala de aula, pode torná-la inviável para o contexto escolar. Um exemplo de quando isso ocorre é quando a Modelagem é associada, única e exclusivamente à modalidade de projetos. Os alunos são divididos em grupos, cada grupo elege um tema de seu interesse para ser investigado por meio da matemática. Tudo é feito sob a supervisão do professor.

Ainda de acordo com os autores anteriormente citados, a Modelagem Matemática, vista dessa maneira, pode levar os professores a pensarem que ela é indicada somente para certos eventos escolares, como Feira de Ciências ou Semana de Cultura. E também que a aplicação desse método de ensino pode atrapalhar o cumprimento do conteúdo exigido pela escola, ou ainda, que seria inviável para eles, com tantos alunos e turmas acompanharem os diversos projetos.

Já ALMEIDA E FERRUZI (2009), consideram a modelagem como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático. Assim, buscando uma solução para um problema cuja origem não está, de modo geral, na própria Matemática.

Nesse contexto, ALMEIDA E BRITO (2005), afirmam que, em diferentes níveis de escolaridade, as atividades de Modelagem Matemática tem-se mostrado bastante adequadas na prática de sala de aula. De acordo com a realização das atividades, a compreensão do aluno acerca da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas, vai se consolidando.

Podemos verificar então, que existem diferentes conceitos e formas de pensar a Modelagem Matemática e como esta acontece. Segundo BARBOSA (2004), a modelagem, em sua história, foi influenciada pelos pesquisadores da Matemática Aplicada. Porém, não podemos resumi-la somente a essa perspectiva. Sua afirmação a seguir nos faz pensar que ela vai muito além da aplicação.

> *Muitas vezes, Modelagem é conceituada, em termos genéricos, como a aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento, o que, a meu ver, é uma limitação teórica. Dessa forma, Modelagem é um grande "guarda-chuva", onde cabe quase tudo. Com isso, não quero dizer que exista a necessidade de se ter fronteiras claras, mas de se ter maior clareza sobre o que chamamos de Modelagem (BARBOSA, 2004, p 1-2).*

BARBOSA ainda afirma que, o propósito da Modelagem Matemática é mostrar como e quando podemos usá-la para problematizar questões sociais ou situações-problema sobre os quais se queira buscar solução ou apenas sanar dúvidas e curiosidades. E, levando em consideração seus benefícios à Educação Matemática, para inserir a Modelagem Matemática no currículo, "em geral, são apresentados cinco argumentos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática".

Para BASSANEZI (2009), a modelagem matemática pode despertar nos alunos maior interesse; ampliar seu conhecimento; auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir. Ainda de acordo com BASSANEZI (2009, p. 20), o modelo matemático "consiste em ter uma linguagem concisa que expresse nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidade [...]". Por isso, trabalhar com modelagem matemática não é trivial e exige que o professor esteja preparado e tenha conhecimento matemático bem estruturado. Para se chegar a um modelo matemático, muitos esforços são necessários, dependendo de sua complexidade que pode aumentar de acordo com a ousadia do professor/pesquisador.

Vistas algumas definições do que é Modelagem Matemática sob o ponto de vista de alguns autores, veremos, a seguir, algumas considerações sobre Modelagem Matemática, alguns Modelos Matemáticos e usos da Modelagem Matemática.

2.2 Considerações sobre Modelagem Matemática

Em seu artigo de 2009, BIEMBENGUT cita dois nomes como os principais precursores brasileiros no uso da Modelagem Matemática: Aristides C. Barreto e Rodney C. Bassanezi.

Ainda afirma que, pelo que tem-se em registro, Barreto foi o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira e também, o primeiro a representar o Brasil em congressos internacionais apresentando seus trabalhos sobre o tema. Também teve muitos de seus trabalhos divulgados em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos. E Bassanezi, através dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou foi um dos maiores disseminadores da modelagem.

> *- Aristides Camargos Barreto tomou conhecimento sobre modelagem matemática quando cursou engenharia na década de 1960. A idéia de usar a modelagem em Educação Matemática começou na metade dos anos 1970, na PUC/Rio, ao passar a atuar como professor nesta Instituição. Na PUC/Rio, Barreto sempre procurava utilizar-se de modelos matemáticos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos da Matemática Elementar e Prática de Ensino da Licenciatura em Matemática e de Cálculo Avançado para engenheiros em programas de Pós- Graduação. Junto com estudantes, elaborou vários modelos em áreas específicas como Lingüística, Ecologia, Biologia.(BIEMBENGUT,2009)*
> *- Rodney Carlos Bassanezi, que já conhecia modelagem por meio da Matemática Aplicada, na década de 1980, ao coordenar um Curso para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral (CDI) de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, com duração de uma semana, vê uma oportunidade de introduzir a proposta de Barreto. Assim, em primeiro momento, após 'bate-papo' com os participantes, propôs a eles que se reunissem por 2h e apresentassem um problema que envolvesse CDI. Duas horas depois, a maioria dos problemas propostos era igual aos que se apresentavam nos livros texto. Esse momento foi crucial para Bassanezi propor a modelagem matemática na resolução de problemas de biologia aplicados ao CDI – bio-matemática.(BIEMBENGUT,2009)*

BARBOSA (2001) diz entender Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, situações realísticas de outras áreas por meio da matemática. Estas situações são constituídas como integrantes de outras disciplinas ou do dia-dia.

Considera ainda, que o ambiente de aprendizagem da Modelagem configura-se através de três níveis:

Nível 1. Trata-se da "problematização" de algum episódio "real". A uma dada situação, associam-se problemas. A partir das informações qualitativas e quantitativas apresentadas no texto da situação, o aluno desenvolve a investigação do problema proposto.

Nível 2. O professor apresenta um problema aplicado, mas os dados são coletados pelos próprios alunos durante o processo de investigação.

Nível 3. A partir de um tema gerador, os alunos coletam informações qualitativas e quantitativas, formulam e solucionam problemas.

Ainda de acordo com BARBOSA, à medida que se vai percorrendo do nível 1 para o 3, aumenta-se o "grau de abertura", assim, espera-se que os alunos assumam gradativamente a condução das atividades. Tornando-se assim, independentes na construção de modelos e das possíveis soluções para os problemas.

BASSANEZI (2009), em seu livro intitulado Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, faz considerações quanto a matematização das ciências. Ele afirma que a Física, a Astrofísica e a Química estão hoje amplamente matematizadas em seus aspectos teóricos. As ciências biológicas foram ficando cada vez mais matematizadas apoiadas nos paradigmas da Física.

Porém, não se pode dizer que a modelagem matemática nas ciências sociais tenha conseguido tamanho efeito quando comparado ao nas outras ciências. Mesmo que, possamos ver a modelagem na simples interpretação de dados estatísticos, por exemplo, para direcionar estratégias de ação nos meios comerciais e políticos, e ainda, na Economia que utiliza um forte aparato matemático para estabelecer as teorias da concorrência, dos ciclos e do equilíbrio do mercado, a matematização das ciências naturais (como Física, Astrofísica e Química) e das biológicas é muito mais intensa quando comparada à das outras ciências.

2.3 Modelos Matemáticos

BUENO (2011) diz que, em termos gerais, o modelo é o resultado ou produto de atividade de sua construção, a modelagem. Atualmente, na comunidade de Educação Matemática, há mais discussões a respeito da concepção da modelagem matemática do que sobre o que é o modelo matemático.

Em contra-partida, SILVEIRA (2007), em sua defesa de dissertação, afirma que já em 1996, o prof. Dario Fiorentini já apresentava um estudo intitulado "Estudo de algumas tentativas pioneiras de pesquisa sobre o uso da Modelagem Matemática no ensino", no VIII Congresso Internacional de Educação Matemática, que aconteceu em Sevilha, na Espanha. Este trabalho discutia justamente o uso da modelagem e dos modelos matemáticos no ensino de matemática. Sendo que, ainda em sua dissertação, SILVEIRA apresenta resumos de teses e dissertações que versam sobre a modelagem na educação matemática de 1976 a 2005, como dissertações de Celso Braga Wilmer (1976), Jorge Enrique Pardo Sánchez (1979) e Maria Cândida Muller (1986).

BASSANEZI (2009) pondera sobre a ambiguidade do termo *modelo* e afirma que tal termo pode assumir diferentes significados nas mais diversas situações. Porém, quando discute-se modelagem cabe considerar apenas *modelo* como a representação de um sistema. Por fim, considera dois tipos de modelos:

> 1. *Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado.*
> 2. *Um modelo teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (BASSANEZI, 2009).*

E por fim, define Modelo Matemático como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto a ser estudado.

BASSANEZI (2009) ainda diz que modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos e classificados conforme o tipo de matemática utilizada. Os modelos podem ser: Linear ou não-linear, Estático ou Dinâmico, Educacional ou Aplicativo, e Estocástico ou Determinístico.

Define Linear ou Não-Linear conforme as características de suas equações básicas.

SAMPAIO (2002), em consenso com Bassanezi, afirma que modelos estáticos escrevem o fenômeno em determinado momento ou instante, enquanto que nos dinâmicos os parâmetros podem variar no tempo.

BASSANEZI (2009) afirma ainda que o modelo Educacional é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. E um modelos é Estocástico ou Determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações.

2.3 Modelagem Matemática

BICUDO e KLÜBER (2011) salientam que pesquisadores e professores da área de Educação Matemática tem dado grande atenção a utilização da Modelagem Matemática como método de ensino. Este interesse apresenta justificativas variadas como, científicas, de cunho epistemológico e ontológico (entende-se ontologia como reflexão a respeito do sentido abrangente do ser, como aquilo que torna possível as múltiplas existências). Entretanto, de acordo a história da Modelagem Matemática, os enfoques dados pelos professores ao utilizá-la como método de investigação, modificaram-se ao longo do tempo e, muitas vezes, os resultados dessas investigações não atingem os objetivos pretendidos em contextos educativos.

Já DINIZ (2007), ressalta a Modelagem como um fator que proporciona aos estudantes um olhar crítico da questão investigada. Afirma ainda que, o principal argumento para a presença da Modelagem nas aulas de Matemática é de que a Modelagem deve ser proposta como um ambiente criador de condições para que os alunos possam pensar sobre o papel da Matemática na sociedade. Com este propósito, o tema gerador da discussão do trabalho de Modelagem deve ser relevante para os alunos, pois o fato de desejar saber mais e entender determinado tema do seu cotidiano desperta a atenção deles e a curiosidade em conhecer ou aprender mais sobre tal tema.

Segundo BASSANEZI (2009), "a Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática." Classifica ainda, modelagem como "um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos.", e define modelo matemático por "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".

Ainda o autor citado anteriormente, em sua obra "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática", estabelece uma sequência de etapas a serem seguidas no processo de modelar uma situação ou problema real:

1. *Experimentação- É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Entretanto, a contribuição de um matemático nesta fase, muitas vezes, pode ser fundamental e direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos. (...)*
2. *Abstração- É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:*
   a. *Seleção das variáveis (...)*
   b. *Problematização ou formulação aos problema teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando; (...)*
   c. *Formulação de hipóteses;*
   d. *Simplificação;*

3. *Resolução- O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente – e como num dicionário, a linguagem matemática admite "sinônimos" que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural. (...)*
4. *Validação – É o processo de aceitação ou não do modelo proposto – Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – O grau de aproximação desejado destas previsões será p fator preponderante para sua validação.*
5. *Modificação - Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações*

e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem ás previsões corretas e definitivas.

A seguir um fluxograma sobre como se fazer modelagem matemática retirado do livro **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática** de Rodney Bassanezi.

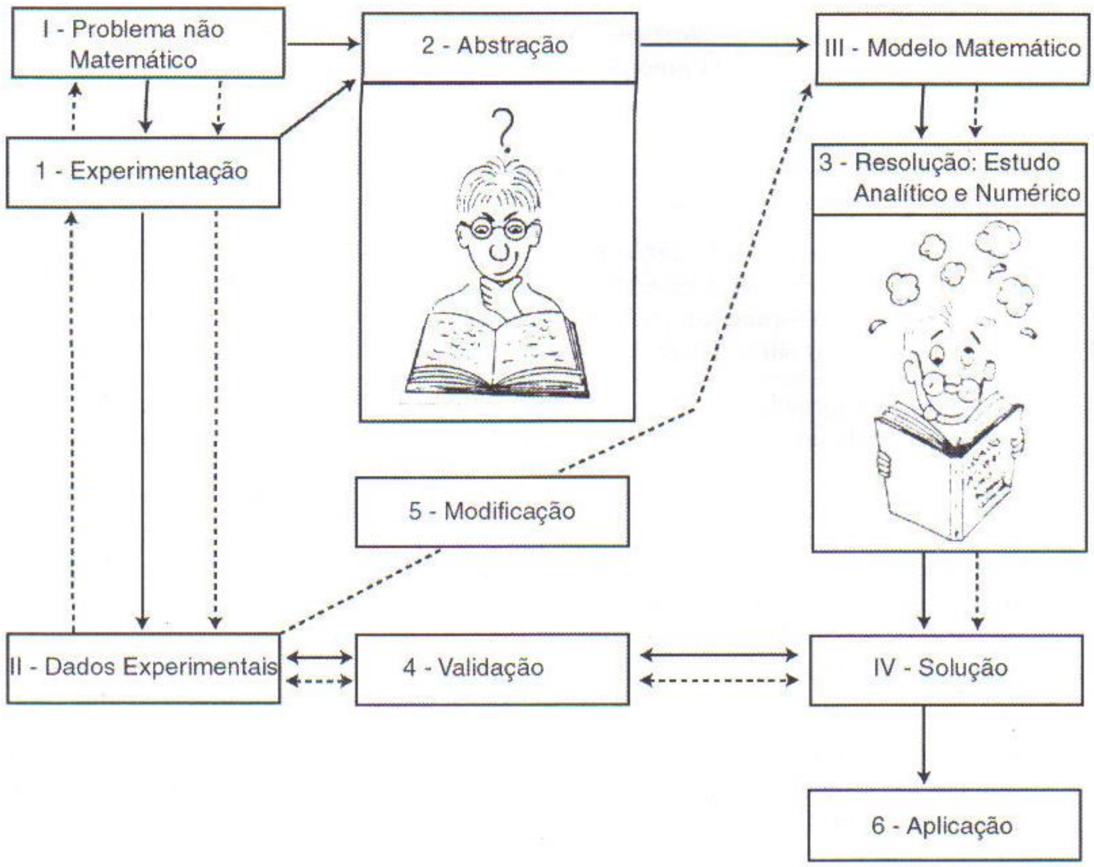


Figura 2: Fluxograma sobre como se fazer modelagem matemática.[2]

Fundamentados em todo o embasamento teórico obtido até aqui, principalmente neste capítulo, o capítulo a seguir contém a adaptação do material do aluno do projeto EM-Ação de Matemática da Secretaria da Educação do Estado da Bahia. Contém ainda o questionário aplicado aos alunos ao fim da aula, juntamente com a análise dos dados obtidos e nossas conclusões.

[2] Figura disponível em BASSANEZI, R. (2009). **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto.

.

Capítulo 3: Aplicação da Adaptação do Projeto EM-Ação

3.1 Introdução

Apoiados em todo o referencial teórico obtido até aqui, buscamos trabalhos realizados por professores da área de Ensino de Matemática que fizessem uso de Modelagem Matemática. Encontramos o Programa Ensino Médio EM Ação (EM-Ação), projeto da Secretaria da Educação do Estado da Bahia, cujo objetivo é articular conteúdos escolares com temáticas interessantes, em que a ciência é matriz importante para a compreensão das mesmas. O projeto contou com apoio ainda das seguintes Instituições Públicas do Ensino Superior – UNEB, UEFS, UESC, UFBA, UESB, IFBA, IFBaiano e UFRB que, em parceria com o Instituto Anísio Teixeira, conceberam e realizaram a produção do material pedagógico do projeto.

Em entrevista à equipe de jornalismo da Unidade de Comunicação do IAT (Instituto Anísio Teixeira), a coordenadora geral do projeto, Ana Lúcia Paixão, revelou a proposta do projeto:

> *O Programa Ensino Médio em Ação - EM-Ação, tem como proposta principal fortalecer o ensino e a aprendizagem dos conteúdos curriculares da Base Nacional Comum do Ensino Médio. Para isso, conta com uma equipe de Articuladores Regionais, Articuladores de Área e professores, das diversas localidades, além de toda a equipe administrativa e pedagógica que atua no Instituto Anísio Teixeira. Seu foco é o estudante, cujo direito de aprender deve ser garantido; o professor como o mediador de todo o processo e, a unidade escolar como espaço de formação de cidadãos. (PAIXÃO, 2012)*

Quanto ao funcionamento do programa, há três vertentes: formação de professores, suporte pedagógico aos estudantes (caracteriza-se pelo suporte pedagógico dado aos estudantes no contraturno, na própria unidade escolar) e produção de material didático.

O professor responsável pelo material pedagógico da área de Matemática e suas tecnologias, foi o professor Humberto José Bortolossi, graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, Mestrado em Matemática pelo IMPA e Doutorado em Matemática pela PUC-Rio.

O caderno de Matemática e suas tecnologias, em princípio, busca explorar as ideias básicas que compõem a Análise de Fourier, usada no estudo de sinais: funções que trazem consigo informações sobre o comportamento ou a natureza de um fenômeno que varia com o tempo ou com o espaço. Sons são exemplos de fenômenos que geram sinais: ondas sonoras produzem variações de pressão cujos valores mudam com o tempo.

Como ondas são fenômenos periódicos e a ideia básica da Análise de Fourier é: sinais periódicos podem ser aproximados por somas de funções trigonométricas da forma $y = A\,sen(Bx + C)$, com A, B e C constantes, é justamente esse princípio que é investigado no caderno preparado pelo professor Bortolossi. São propostos experimentos sonoros a fim de que se verifique como os parâmetros A, B e C afetam o gráfico da função $y = A\,sen(Bx + C)$ e as propriedades do som correspondente e, também, como somas de funções desse tipo podem ser usadas para representar sons mais complexos.

Assim, na seção seguinte será apresentado o plano de trabalho preparado pela autora deste trabalho baseado no caderno de Matemática e suas tecnologias do projeto EM-Ação e aplicado na turma 133 do curso de Automação Industrial do IFRJ (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia), Campus Volta Reonda, no dia 6 de junho de 2018.

3.2 Plano de trabalho adaptado a partir do material do Projeto EM-Ação

Tema: Modelagem matemática de ondas sonoras com funções trigonométricas

Problema: É possível representar sons (notas musicais) matematicamente?

Objetivos: Compreender o conceito de ondas dado pela Física; compreender quais são as principais características das ondas; compreender quais são as propriedades das ondas sonoras determinadas pela amplitude, frequência e período; modelar gráficos de sons (notas musicais) com funções trigonométricas; e reproduzir, utilizando o Software GeoGebra, sons a partir das funções trigonométricas utilizadas como modelo.

Destinatário: Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Tempo: 2 aulas de 50 minutos cada.

Recursos: lousa, caneta/giz, computador com saída de áudio e Datashow.

Pré-requisitos: É importante (1) que o aluno saiba as diferenças e semelhanças entre seno de um ângulo (trigonometria no triângulo retângulo) e seno de um número real (funções trigonométricas); (2) que ele saiba como são os gráficos das funções $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$, para valores de x em radianos; (3) que ele saiba que as funções $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$, para valores de x em radianos, são periódicas de período 2π.

Este Plano de Trabalho foi adaptado a partir do material do Projeto EM-Ação que faz parte do tema gerador “Saberes e Trabalho” que busca, entre outros objetivos, evidenciar e explorar as conexões entre “Funções Trigonométricas” e “Saberes e Profissões”. Tal trabalho foi produzido pela Secretaria da Educação do Estado da Bahia em colaboração com Instituições Públicas do Ensino Superior – UNEB, UEFS, UESC, UFBA, UESB, IFBA, IFBaiano e UFRB que, em parceria com o Instituto Anísio Teixeira, conceberam e realizaram a produção do material do projeto.

O material do projeto pode ser encontrado no endereço: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2012.2/iat/em-acao-som-aluno.pdf>.

Introdução:

Serão apresentados sinais sonoros como fenômenos periódicos, isto é, como sons podem ser obtidos através da superposição de sons senoidais mais simples determinados por funções trigonométricas da forma $y = A\, sen(B\, x + C)$, com $A, B\ e\ C$ constantes. A escolha de ondas sonoras é proposital: com elas, o aluno poderá realizar e verificar vários experimentos físicos e computacionais e, assim, perceber visualmente e auditivamente a modelagem de ondas sonoras com funções trigonométricas.

A partir de exemplos de fenômenos ondulatórios verificaremos que há vários fenômenos periódicos que podem representar por uma equação de onda periódica, como microondas (quando o microondas é ligado são liberadas ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo); raio (quando ocorre a descarga elétrica na terra, a onda da descarga vai com a sua amplitude máxima nos dois eixos x e y e quando ocorre a descarga completa a onda diminui até chegar a zero); e o som (o som é uma onda mecânica que não se propaga no vácuo. Ao ligar um aparelho eletrônico essa onda terá uma amplitude dependendo da potência do aparelho eletrônico e ao desligar o aparelho, não haverá mais ondas).

Vistos comportamentos e características do som, será feita uma discussão sobre ondas sonoras: é possível descrevê-las Matematicamente como função? Que tipo de função? Como? Quais são suas principais características? Como fazer essa representação? Cada uma dessas perguntas será respondida com o professor associando o gráfico que representa o comportamento da onda sonora a função trigonométrica, que é uma função periódica. Veremos os gráficos que representam a onda devido a uma nota musical. E também, quais são suas características e como as alterações nessas características influenciam no comportamento da onda.

Para isso, espera-se que os alunos já saibam trabalhar com as funções seno e cosseno (calcular seno e cosseno da soma e subtração de dois valores e comportamento dessas funções no gráfico). Assim, será possível trabalharmos diretamente com ondas sonoras modeladas pelas funções do tipo $y = A\,\mathrm{sen}(Bx + C)$ ou $y = A\cos(Bx + C)$. Determinando o que representam cada uma das constantes, A e B , e como elas interferem no comportamento do gráfico dessas funções. O professor irá utilizar imagens de gráficos de funções desse tipo construídos no GeoGebra. Esta ferramenta é de grande auxílio oferecendo gráficos precisos e de rápida construção. Logo, a visualização e a compreensão dos gráficos será facilitada.

Trabalharemos ainda no software GeoGebra, plotando gráficos de algumas funções trigonométricas e verificando, através do comando TocarSom, que é possível fazer o software reproduzir o som correspondente a função dada.

É ainda importante destacar que, a proposta apresentada não pretende substituir o livro didático. Mas sim auxiliá-lo apresentando de maneira lúdica e instrutiva, a fim de prender a atenção do aluno.

Aula 1

Primeiro momento:

O professor deve começar a aula falando que, antes de trabalharmos com a Matemática, veremos um pouquinho de Física.

Para contextualizar o assunto, vale perguntar aos alunos se eles sabem como funcionam os transmissores de rádio. Caso algum aluno diga que sim, o professor deve pedir que o aluno explique como funcionam. Caso ninguém saiba, deve ser feita outra pergunta: vocês acham que os transmissores de rádio, os relâmpagos e um microondas funcionam da mesma maneira? Ou são coisas completamente diferentes? Mas sim, funcionam da mesma maneira. Esses três fenômenos, além de diversos outros fenômenos, são fenômenos ondulatórios.

Os fenômenos ondulatórios podem ser entendidos como sendo uma perturbação que pode ou não se propagar infinitamente em um meio qualquer. E, de forma geral, essas perturbações ocorrem de maneira periódica.

Por exemplo:

Figura 3: Ondas propagadas na água devido a interferência [3].

[3] Figura disponível em <http://blogluzevida.blogspot.com.br/2013/05/tsunami-de-amor.html>. Acesso em 21 de abril de 2018

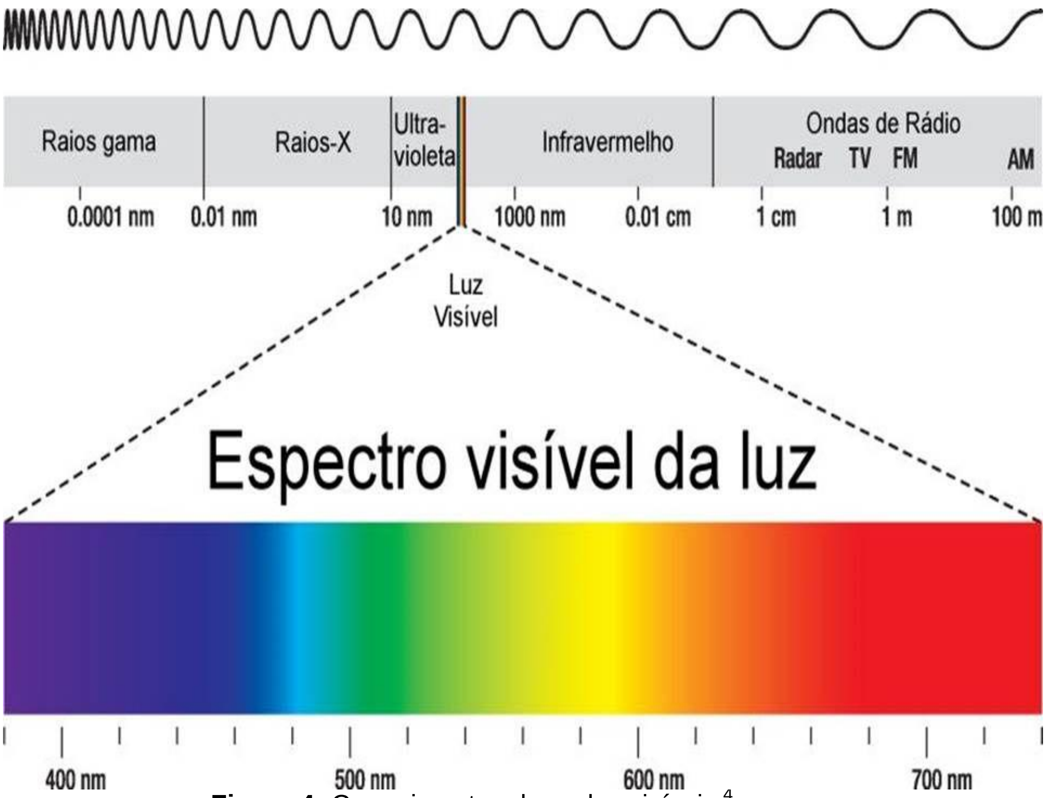


Figura 4: Comprimentos de ondas visíveis [4].

Os sinais transmitidos por canais de rádio, as descargas elétricas que ocorrem durante as chuvas (relâmpagos) e os aparelhos eletrodomésticos de microondas, ocorrem por conta de ondas eletromagnéticas. E as ondas eletromagnéticas são pulsos energéticos capazes de se propagar no vácuo. Elas são criadas a partir da interação entre um campo elétrico e um campo magnético.

Segundo momento:

Neste segundo momento, será apresentado um experimento denominado "O Experimento da Vela e do Alto-Falante". Trata-se do seguinte:

[4] Figura disponível em <https://br.pinterest.com/pin/494129390340355917/?lp=true >. Acesso em 21 de abril de 2018.

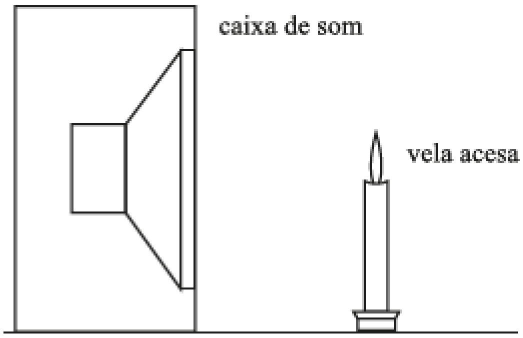


Figura 5: Esquema para o experimento da vela e do alto-falante[5] .

Em um ambiente sem correntes de ar, uma vela acesa é colocada em frente a um alto-falante que, então, reproduz um som grave com volume e altura constantes (Figura 5).

Em Física, o som é uma onda mecânica longitudinal que é percebida pelos nossos ouvidos e interpretada pelo nosso cérebro. Trata-se de uma onda, pois o som é um fenômeno associado ao transporte de energia através de vibrações; mecânica, pois as vibrações ocorrem em partículas em um meio material (as moléculas do ar ou de uma parede vibram para transmitir o som); longitudinal, pois a direção de transporte é paralela à direção de vibração.

Feito tal experimento, o professor, a fim de chamar mais ainda a atenção do aluno, pode destacar e exibir como curiosidade uma o episódio 76 do programa de TV a cabo, MythBusters (Caçadores de Mitos). No programa de divulgação científica, é comprovado o fato de que uma voz amplificada ser capaz de apagar a chama de uma vela e geradores de sons poderem apagar chamas de propano.

Serão vistas então, algumas características das ondas de acordo com a Física:

A **Amplitude** da onda equivale à propriedade do som de ser forte ou fraco, ou seja, a intensidade.

O **Período** é o tempo compreendido entre estados iguais de vibração (tempo que existe entre duas ondas seguidas).

Já se sabe que, a cada $2\pi\ rad$, os valores da função seno (e também a cosseno) se repetem. A cada vez que a função adquire todos os seus valores possíveis e volta a seu valor inicial, chamamos de **Período.**

[5] Figura disponível em <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2012.2/iat/em-acao-som-aluno.pdf >. Acesso em 21 de abril de 2018.

Uma medida de frequência de onda é o Hz (Hertz), sendo que $1Hz$ equivale a percorrer um ciclo (ou período) por segundo.

Terceiro momento:

Etapa 1: Notas Musicais

O professor irá explicar que:

São conhecidas sete notas musicais: Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si. Dizemos que, tocadas sobre o mesmo tom, as notas Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si Do formam uma oitava. Se subimos uma oitava, isto é, por exemplo, tocar num teclado, as teclas seguidas:

Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si Dó Ré Mi Fa Sol Lá Si Dó

Estaremos tocando uma oitava e sua oitava acima, que é mais aguda.

Sabemos ainda, que cada nota musical pode ser identificada por sua frequência. Vamos observar a Tabela 1, que identifica as frequências (Hz) da oitava central de um piano para uma escala bem temperada em 12 semitons.

Tabela 1: Frequência em Hz das 12 notas musicais da oitava central de um piano para uma escala bem temperada.

Dó	Dó# Ré♭	Ré	Ré# Mi♭	Mi	Fá	Fá# Sol♭	Sol	Sol# Lá♭	Lá	Lá# Si♭	Si
261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	440,00	466,16	493,88

Para obter as frequências de uma oitava acima, basta duplicar as frequências da Tabela 1. Para obter as frequências de uma oitava abaixo, basta dividir as frequências da tabela por 2.

Figura 6: Dois Dós consecutivos no teclado estão no meio de uma oitava [6].

[6] Figura disponível em <https://www.colegioweb.com.br/acustica/qualidades-fisiologicas-do-som.html>. Acesso em 21 de abril de 2018.

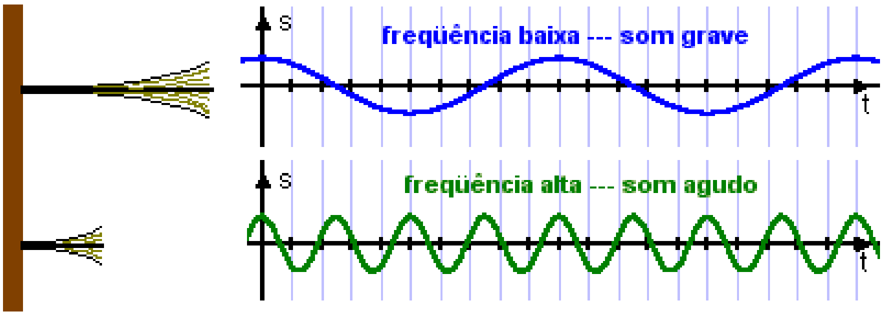


Figura 7: Se aumentarmos a frequência das vibrações, correlativamente, constata-se que o som emitido se torna mais e mais agudo [7].

Vejamos os gráficos de algumas notas.

Começaremos trabalhando com a nota Dó. Sabemos que, a nota Dó é emitida com a frequência de $261{,}63Hz$. E tal nota pode ser representada pelo gráfico a seguir:

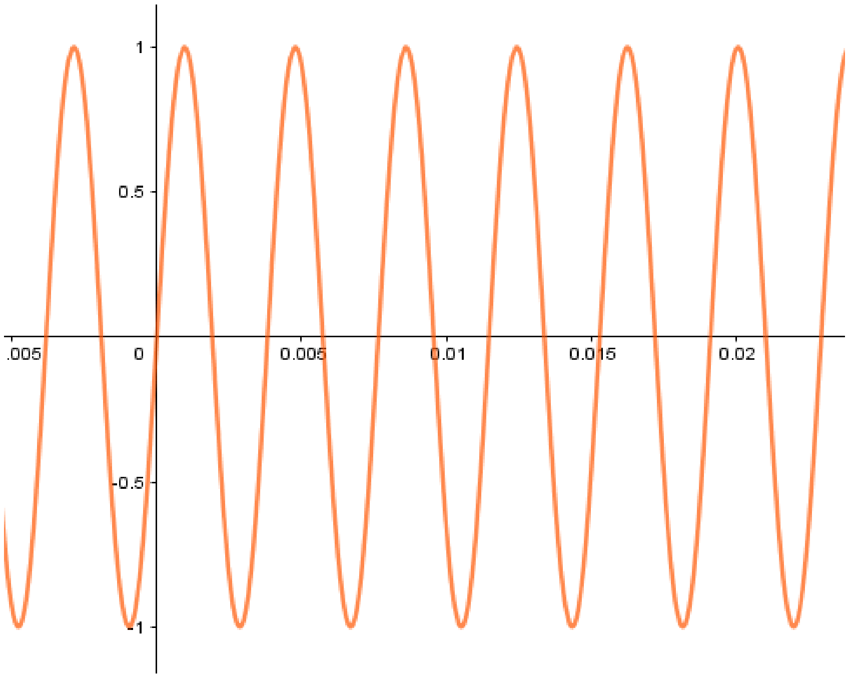


Figura 8: Representação das ondas sonoras da nota Dó com frequência de $\mathbf{261,63}\boldsymbol{Hz}$. [8]

Vamos chamar o gráfico de gráfico de Dó1.

---

[7] Figura disponível em <https://www.algosobre.com.br/fisica/acustica.html>. Acesso em 21 de abril de 2018.

[8] Figura feita pela autora no software GeoGebra.

O gráfico teve que ser colocado em escala eixoX:eixoY igual a 1:100, pois, por conta da frequência dessa nota musical ser muita alta, só assim é possível visualizar o comportamento periódico da frequência dessa nota.

De acordo com o que foi visto, se construirmos o gráfico com uma frequência duas vezes maior, vamos obter o gráfico da nota Dó uma oitava acima da nota anterior.

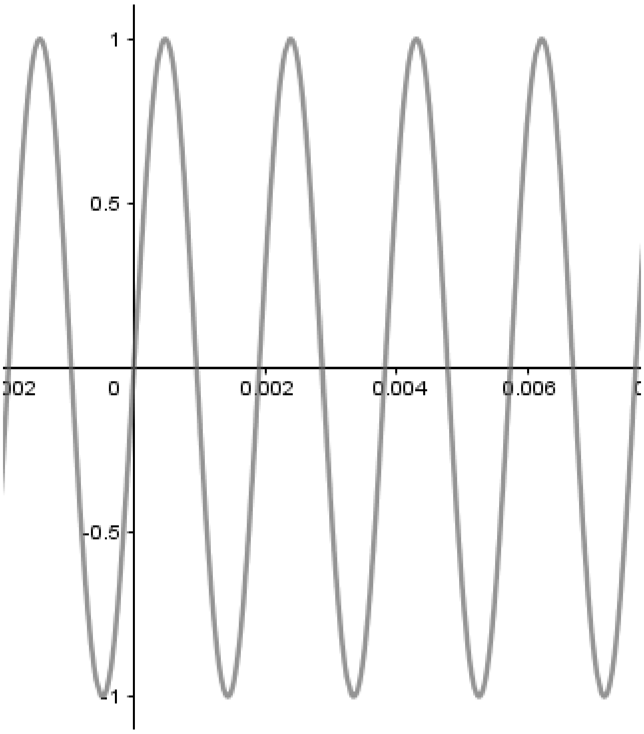


Figura 9: Representação das ondas sonoras da nota Dó com frequência de $523{,}26\text{Hz}$ [9]

Vamos chamar este gráfico de gráfico de Dó2.

A escala do gráfico eixoX:eixoY foi ajustada para 1:200, pela mesma justificativa dada anteriormente.

Aqui o professor deve perguntar aos alunos o que se pode concluir da comparação dos dois gráficos. Espera-se que eles sejam capazes de observar que, no mesmo intervalo do eixo X, enquanto o gráfico de Dó1 compreende apenas um ciclo (um comprimento de onda), o gráfico de Dó2 compreende 2 ciclos.

Para verificar esta sentença, pode-se observar os dois gráficos na mesma construção:

[9] Figura feita pela autora no software GeoGebra.

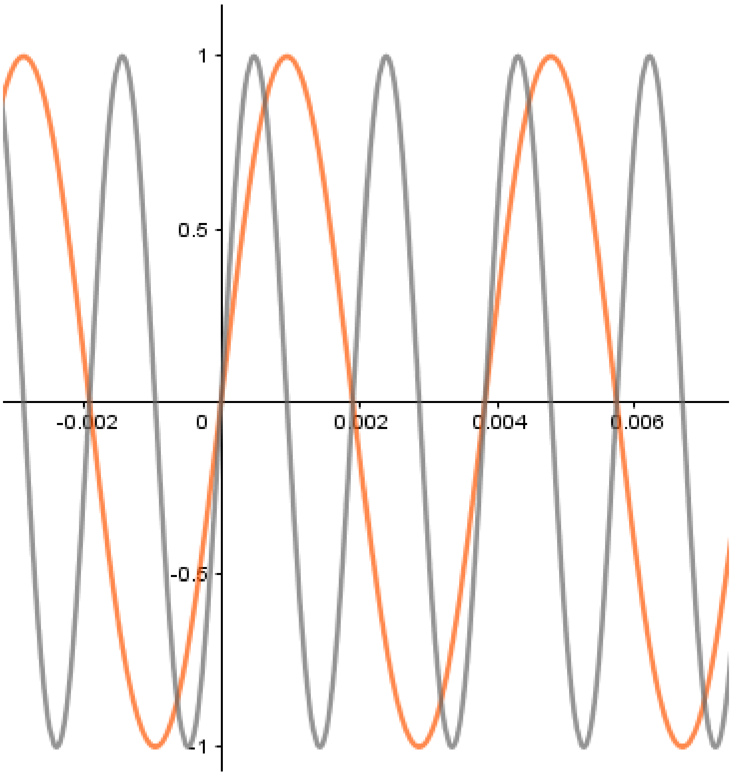


Figura 10: Representação das ondas sonoras das notas Dó1 e Dó2. [10]

Finalizando esta parte, o professor pode mostrar ainda como seria o gráfico da nota Dó3, que teria a frequência de $1046{,}5108Hz$. Gráfico da nota Dó uma oitava a mais acima.

Já construindo tal gráfico junto com o gráfico de Dó1, obtemos:

[10] Figura feita pela autora no software GeoGebra.

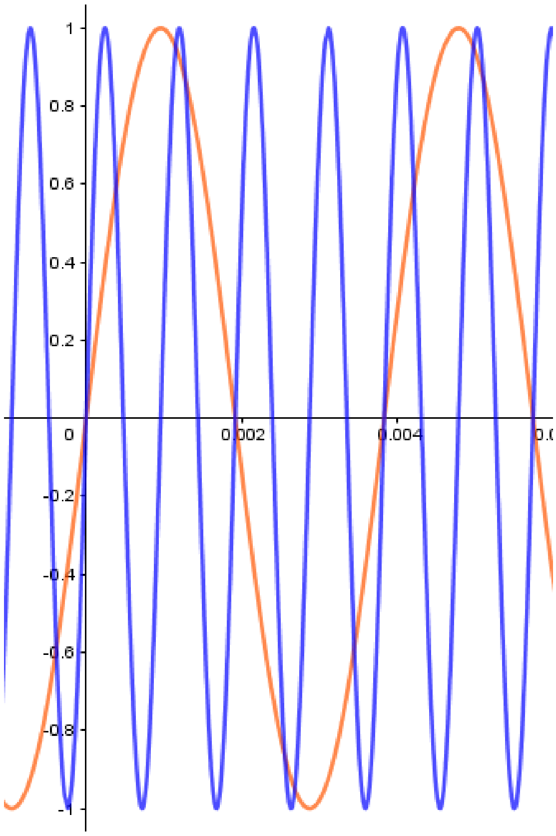


Figura 11: Representação das ondas sonoras das notas Dó1 e Dó3.[11]

A partir dos experimentos feitos até aqui e das visualizações dos gráficos que representam algumas notas, iremos conseguir concluir que tipo de função pode ser usado para aproximar o comportamento das ondas sonoras.

O professor pode questionar: é evidente o comportamento periódico dos gráficos que representam as notas musicais, e o que nós conhecemos que se comporta de maneira periódica? Espera-se que os alunos respondam que as funções seno e cosseno são periódicas. Logo, por conta disso, os cientistas conseguiram demonstrar que as notas musicais podem ser representadas matematicamente por funções periódicas como a função seno e a função cosseno.

Veremos a seguir então, os elementos básicos de uma onda que possa ser modelada por um função seno.

[11] Figura feita pela autora no software GeoGebra.

Aula 2

Primeiro momento:

Etapa 1: Elementos Básicos de Uma Onda Senoidal

A partir do modelo $y = A\,sen(bx + c)$, proposto pela turma sob orientação do professor, vamos analisar o que os parâmetros $A, b\ e\ c$ do modelo representam para uma onda, nesse caso para uma onda senoidal.

(a) O parâmetro A é denominado **amplitude** da onda. Ele determina o valor máximo $|A|$ e o valor mínimo $-|A|$ da função f.

(b) O parâmetro b está relacionado com a **frequência** da onda. De fato: observe que se $A = 1$, $b = 1$ e $c = 0$, então $y = sen(x)$ é uma função periódica de período $T = 2\pi$. Se considerarmos que x representa o tempo medido em segundos, então os valores de $y = sen(x)$ se repetem a cada 2π segundos, isto é, os valores de $y = sen(x)$ completam um ciclo a cada 2π segundos. Assim, a frequência associada é igual a $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\ \frac{ciclos}{segundo} = \frac{1}{2\pi}\ Hz$. Se $b = 2$, então os valores de $y = sen(2\,x)$ completam um ciclo a cada $T = \pi\ segundos$ e, portanto, a frequência associada é igual a $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}\ Hz$. Se $b = \frac{1}{2}$, então os valores de $y = sen\left(\frac{1}{2}\,x\right)$ completam um ciclo a cada $T = 4\,\pi\ segundos$ e, portanto, a frequência associada é igual a $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi}\ Hz$. Mais geralmente, os valores de $y = sen(b\,x)$ completam um ciclo a cada $T = \frac{2\pi}{b}\ segundos$ e, portanto, a frequência associada é igual a $F = \frac{1}{T} = \frac{b}{2\pi}\ Hz$. Em particular, se $b = 2\,\pi\,k$, então $T = \frac{1}{k}$ e $F = \frac{1}{T} = k\ Hz$.

(c) O parâmetro c está relacionado com a **fase** da onda. De fato: observe que se $A = 1$, $b = 1$ e $c = 0$, então os zeros da função $y = sen(x)$ são dados pelos números $k\,\pi$, com k um número inteiro. Se $c = 1$, então os zeros da função $y = sen(x + c)$ são dados pelos números $k\,\pi - 1$, com k um número inteiro. Se $c = -1$, então os zeros da função $y = sen(x + c)$ são dados pelos números $k\,\pi + 1$, com k um número inteiro. Mais geralmente, os zeros da função $f(x) = sen(x + c)$ são dados pelos números $k\,\pi - c$, com k um número inteiro. Mais ainda: o gráfico de f é obtido por uma translação horizontal do gráfico de $y = sen(x)$ de $|c|$ unidades para a esquerda se $c > 0$ e de $|c|$ unidades para a direita se $c < 0$.

Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no link “Software: elementos básicos de uma onda senoidal (parâmetro C)”. Nessa atividade, você poderá comparar os gráficos das funções $y = sen(x)$ e $y = f(x) = sen(x + c)$, onde o valor do parâmetro c pode ser modificado (para isso, clique e arraste a bolinha preta de nome c). Note que, nesse caso, $A = 1$ e $b = 1$. Perguntas: (1) Qual é a relação entre o gráfico da função f e o gráfico de $y = cos(x)$ se $c = \pi/2$? (2) Qual é a relação entre o gráfico da função f e o gráfico de $y = sen(x)$ se $c = \pi$?

Etapa 2:

Como funções trigonométricas estão relacionadas com ondas sonoras? O ponto-chave é observar que as funções trigonométricas podem ser usadas para modelar vibrações. Para perceber essa conexão, o professor irá acessar a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clicar no link “Software: vibrações de partículas e funções trigonométricas”. O programa simula, de forma alegórica, as vibrações de partículas.

(a) No aplicativo, existem dois controles que regulam as vibrações das partículas: “Amplitude” e “Frequência”. Clique e arraste as bolinhas pretas para mudar os valores desses parâmetros.

Descreva, no seu caderno, quais são os efeitos desses controles no movimento das partículas.

(b) No aplicativo, você pode acompanhar a evolução de uma frente de onda clicando no botão “Acompanhar Frente de Onda”. Se você ficar clicando repetida e rapidamente nesse botão, várias frentes de onda sucessivas serão desenhadas. Observe que uma frente de onda, depois de criada, leva um determinado tempo para “sair” pelo lado direito do aplicativo. Situação 1 (registre a resposta em seu caderno): os valores dos parâmetros “Frequência” e “Amplitude” alteram esse tempo? Situação 2 (registre a resposta em seu caderno): gere várias frentes de onda sucessivas e, durante um intervalo de tempo de 5 segundos, conte quantas frentes “saem” pelo lado direito do aplicativo. Esse número muda quando os valores dos parâmetros “Frequência” e “Amplitude” são alterados? Dê uma descrição!

c) Clique no botão “Reiniciar!”, que está acima da janela principal do aplicativo (para retorná- lo à sua confi guração inicial) e, então, clique no botão “Animar” para iniciar a animação.

É importante observar que, apesar das frentes de ondas se deslocarem sempre para o lado direito, o mesmo não ocorre com as partículas! De fato, elas ficam oscilando em torno da sua posição inicial. É exatamente aqui que ocorre a conexão com funções trigonométricas: elas são usadas para descrever os valores dos deslocamentos relativos da partícula com referência à sua posição inicial em função do tempo! Para visualizar esse fato, ative a opção “Visualizar movimento relativo de uma partícula”. Note que, quando a partícula está à direita de sua posição inicial, o deslocamento relativo é positivo e que, quando a partícula está à esquerda da posição inicial, o deslocamento relativo é negativo. Pergunta (registre a resposta em seu caderno): Como os valores dos parâmetros “Frequência” e “Amplitude” alteram o gráfico da função trigonométrica?

Neste ponto, já vimos que as representações dessas ondas podem ser feitas por funções de seno e cosseno, que são funções periódicas. Logo, a representação desses fenômenos num gráfico será periódica. Mas quais são as outras características das ondas?

Segundo momento:

A seguir, será visto um vídeo de cordas de um violão sendo tocadas em câmera lenta O vídeo encontra-se no link: <https://www.youtube.com/watch?v=DTZa7SRScDw&index=1&list=PLQnhAipp7HNi7SY5yCJiYdhmL4-tomPwW>.

O que vale destacar é que as duas cordas que estão sendo tocadas estão na mesma nota: Si. Mas uma está uma oitava acima da outra.

Aqui, o professor irá relembrar o que foi visto sobre o comportamento da representação gráfica de uma nota e a representação da mesma nota, uma oitava acima. Vistas no seguinte gráfico:

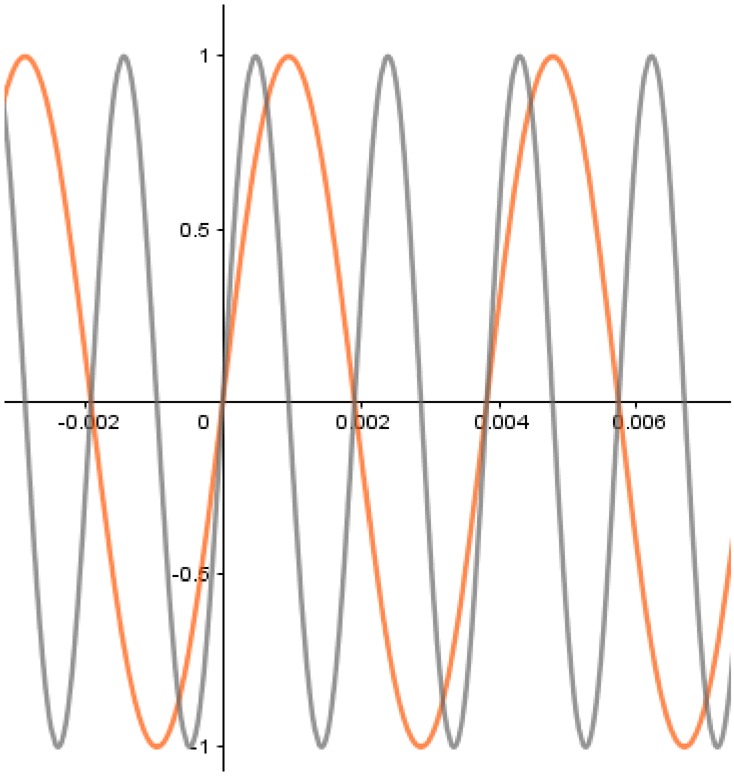


Figura 12: Representação das ondas sonoras das notas Dó1 e Dó2.(Figura 10)[12]

Voltando ao vídeo visto, sabendo que as duas cordas estão na mesma nota, porém em oitavas diferentes, o que podemos observar sobre as vibrações das cordas? Aqui, espera-se que os alunos observem que a corda debaixo está vibrando bem mais rápido que a de cima. Mais precisamente, algum deles pode perceber ainda que a corda debaixo vibra duas vezes mais rápido que a de cima. Isso acontece porque a **Frequência** (se medida em Hertz, como dito anteriormente, será o número de quantas ondas ocorrem em 1s), equivale à altura da nota. Mas essa altura não se trata do volume do som, e sim do tom e da nota em que a corda está sendo tocada. Sendo assim, se executássemos 261 pulsos em um segundo obteríamos a nota Dó.

Terceiro momento:

Vamos então, modelar algumas notas musicais com a função seno.

Começaremos com os sons das 7 notas musicais na escala de Dó modeladas com a mesma amplitude. Essas notas podem ser modeladas pelas seguintes funções:

[12] Figura feita pela autora no software GeoGebra.

Dó – $y = sen\,(2\pi 261{,}63x)$

Ré – $y = sen\,(2\pi 293{,}66x)$

Mi – $y = sen\,(2\pi 329{,}63x)$

Fá – $y = sen\,(2\pi 349{,}23x)$

Sol – $y = sen\,(2\pi 392{,}00x)$

Lá – $y = sen\,(2\pi 440{,}00x)$

Si – $y = sen\,(2\pi 493{,}88x)$

Também existem alguns sons não musicais que podem ser modelados dessa maneira. Como o som de uma moto, ou de um tiro. E, utilizando o GeoGebra, iremos emitir os sons dessas funções.

O software Geogebra é mundialmente conhecido como uma ótima ferramenta para o estudo de funções. Com ele é possível plotar diferentes gráficos no mesmo plano, analisando suas características e semelhanças. Nas funções trigonométricas em específico, é possível analisar com esse software a variação de parâmetros distintos, e como o gráfico destas funções se modifica no plano cartesiano.

Ainda assim, dispondo de recursos visuais para criar significado ao objeto ensinado, este conteúdo carece de uma contextualização mais específica para realizar o vínculo entre a teoria e sua utilização no cotidiano. Nesse sentido, usaremos um recurso pouco conhecido do software Geogebra: a execução de sons através do gráfico de funções. Isto é possível pois, além do software conter ferramentas prontas para Geometria e o estudo de funções, ele também possui comandos específicos que permitem aos usuários realizarem programações na construção de objetos de estudo.

Um destes comandos é o comando Tocar Som, que possui 6 variâncias em sua função principal, específicas para cada situação que o usuário deseja utilizá-lo. Para executar algumas funções, usaremos a função da seguinte maneira:

TocarSom[<Função>,<Valor mínimo>,<Valor máximo>]

Aqui o professor deve usar um computador com o Software mencionado, instalado e com um aparelho de áudio conectado ao computador para conseguirmos mostrar a função sendo executada.

Começaremos emitindo o som da nota Dó na frequência que utilizamos pra montar o primeiro gráfico, tocada no intervalo de tempo de 0 a 3 segundos.

Dó – TocarSom[sen(261.63*2*pi*x),0,3]

A seguir, vamos ver como seriam as outras notas:

Ré – TocarSom[sen(293.66*2*pi*x),0,3]

Mi – TocarSom[sen(329.63*2*pi*x),0,3]

Fá – TocarSom[sen(349.23*2*pi*x),0,3]

Sol – TocarSom[sen(392.00*2*pi*x),0,3]

Lá – TocarSom[sen(440.00*2*pi*x),0,3]

Si – TocarSom[sen(493.88*2*pi*x),0,3]

Por fim, como curiosidade, o professor pode mostrar mais alguns sons que podem ser modelados pela função seno.

Quarto momento:

O professor apresentará como curiosidade, mais alguns sons que também podem ser modelados por funções trigonométricas e reproduzidos pelo GeoGebra. Como o som de uma moto e de um tiro.

As funções são para esses sons são as seguintes:

$f(x) = 20.sen(16x^2)$ que imita o som do motor de uma moto e

$g(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ que imita o som de um tiro.

Assim, utilizando o comando TocarSom, podemos emitir esses sons no GeoGebra, respectivamente, da seguinte maneira:

TocarSom[20.sen(16x²),0,8]

TocarSom[sen(1/x),0,6.28]

E, no GeoGebra, ainda é possível emitir acordes das seguintes formas:

TocarSom["Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi C4q+C5q G3i Cw+Ew+Gw",0]

TocarSom[“D5maji D5maji A4majhi C5maji C5maji G4majhi D5maji D5maji A4majhi C5maji C5maji G4majhi”,0]

TocarSom[“V0 Es+F#4s Es+F#4sRs Es+F#4s Rs Cs+F#4s Es+F#4s Rs Gs+B4s+G4s RsRsRs G4s RsRsRsRs Cs+E4s RsRs G4s+C4s RsRs E4s+C3s RsRs A4s+C4s Rs B4s+D4s Rs Bb4s+Db4s A4s+C4s Rs G4s+C4s Rs Es+G4s

Gs+B4s As+CsRs Fs+A4s Gs+B4s Rs Es+A4s Rs Cs+E4s Ds+F4s B4s+D4s RsRs Cs+E4s RsRs G4s+C4s RsRs E4s+C3s RsRs A4s+C4s Rs B4s+D4s Rs Bb4s+Db4s A4s+C4s Rs G4s+C4s Rs Es+G4s Gs+B4s As+CsRs Fs+A4s Gs+B4s Rs Es+A4s Rs Cs+E4s Ds+F4s B4s+D4s RsRsRsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s RsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs C6s+Fs+Gs Rs C6s+Fs+Gs C6s+Fs+GsRsRsRsRsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s RsRs Ebs+Ab4s RsRs Ds+F4s RsRs Cs+E4s RsRsRsRsRsRsRsRsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s RsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs C6s+Fs+Gs Rs C6s+Fs+Gs C6s+Fs+GsRsRsRsRsRsGs+EsGbs+EbsFs+Ds D#s+B4s RsEs+CsRs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s RsRs Ebs+Ab4s RsRs Ds+F4s RsRs Ch+E4h RsRsRsRsRsRsRs V1 D3s D3sRs D3s”, 1]

3.3 Registros e comentários sobre a aula

3.3.1 Perfil da turma

A aula foi efetuada na turma 133 do terceiro período do curso de Automação Industrial do IFRJ, Campus Volta Redonda, durante a aula do professor Jorge Luiz Rebelo dos Santos da disciplina Matemática. A turma é composta por 24 alunos com faixa etária entre 16 e 18 anos.

Como visto, foram estipulados como pré-requisitos para a aula alguns conhecimentos de trigonometria: (1) que o aluno saiba as diferenças e semelhanças entre seno de um ângulo (trigonometria no triângulo retângulo) e seno de um número real (funções trigonométricas); (2) saiba como são os gráficos das funções $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$, para valores de x em radianos; (3) saiba que as funções $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$, para valores de x em radianos, são periódicas de período 2π.

De acordo com o professor Jorge, tais conhecimentos já haviam sido verificados durante as aulas com o conteúdo de trigonometria durante o mês de maio. Possibilitando assim, que o plano de trabalho fosse aplicado sem preocupações quanto a ser necessário fazer revisão de conteúdo.

Devido a períodos de estágio feitos por esta autora em algumas turmas do IFRJ, esta autora e os alunos já eram conhecidos. Fato que fez com que a turma ficasse mais a vontade para eventuais brincadeiras e comentários durante a aula.

No geral a turma é agitada mas pareceram bastante interessados durante a aula, atendendo as expectativas esperadas.

3.3.2 Observações sobre a aula

Figura 13: Foto 1 da turma antes no início da aula. [13]

[13] Foto da turma tirada antes do início da aula.


Figura 14: Foto 2 da turma antes no início da aula.[14]

A proposta era de iniciar a aula falando sobre ondas, mais especificamente, sobre ondas emitidas por antenas de rádios, microondas e pelo som.

Quando questionados sobre como funcionavam estes mecanismos, os alunos pareceram bem instruídos, complementando a fala desta autora sobre as características desses fenômenos periódicos.

O momento do experimento denominado “O Experimento da Vela e do Alto-Falante”, foi bem descontraído. Foi pedido que os alunos se aproximassem da mesa do professor, onde seria feito o experimento. Alguns fizeram questão de registrar usando a câmera de seus smartphones e ficaram bem atentos e impressionados ao constatar o oscilação da chama da vela de acordo com o som grave que era emitida pela música no auto falante.

Após o experimento, as perguntas sugeridas no planos de trabalho foram feitas e respondidas apenas oralmente. O tempo curto para a exposição da aula impossibilitou que fossem feitas muitas atividades escritas.

Em seguida, foram exibidos alguns trechos do episódio nº 76 da série MythBusters (Caçadores de Mitos). E enquanto os trechos iam sendo exibidos, a autora ia comentando o que os apresentadores do programa estavam tentando fazer ou desmitificar. Algumas das situações eram: tentar apagar a chama de uma vela com os assovios de um cantor que imitava passarinhos,

[14] Foto 2 da turma tirada antes do início da aula.

tentar apagar a chama de uma vela com a voz de uma pessoa usando um amplificador, e entre outros. Enquanto esse trechos iam sendo mostrados os alunos perguntavam entre si “Será que isso é possível?...” ou faziam comentários como “Nossa, que legal!..”.

Vistos os vídeos, foi a hora de associar as características de uma onda (amplitude, período e frequência) a cada uma das propriedades do som (grave, agudo, tempo de execução e entre outros). Como os alunos já haviam feito algumas disciplinas de Física, já conheciam as características de uma onda. Mas associá-las diretamente a propriedades do som foi inovador para eles.

No terceiro momento, falamos sobre notas musicais. Quais são as sete notas, qual é a frequência (em *Hz*) de algumas notas, como é a divisão em oitavas e o que subir ou descer uma oitava se diferencia no tom de uma nota musical.

Foram mostrados ainda, gráficos da nota Dó: o primeiro tinha frequência de $261{,}63Hz$, o segundo, uma oitava acima, com frequência $523{,}26Hz$, e o terceiro gráfico da nota Dó com a frequência de $1046{,}5108Hz$; a fim de que os alunos comparassem os três gráficos, verificando que dobrando a frequência (ou subindo uma oitava) a amplitude da onda era reduzida a sua metade.

Ao fim desta etapa, foram mostrados ainda, gráficos das notas Dó (central do piano) junto com o Dó uma oitava acima, e também do Dó central com o gráfico de Dó duas oitavas acima. O objetivo era, feitos os experimentos e todas as análises sugeridas, os alunos seriam capazes de associar o comportamento periódico dos gráficos das notas aos gráficos das funções seno e cosseno, que também comportam-se de maneira periódica.

Por conta de um erro na ordem dos slides da aula, já havia sido comentado sobre o comportamento periódico das funções seno e cosseno. O que fez com que, quando questionados sobre possíveis maneiras de representar ou modelar as ondas sonoras, os alunos mencionassem rapidamente as funções seno e cosseno e deduzirem que talvez então, fosse possível modelar ondas de som com essas funções.

Em seguida, foi iniciada uma discussão sobre a forma geral de uma onda senoidal, modelada por funções do tipo $y = A\,sen(bx + c)$, e sobre seus elementos básicos. Isto é, o que cada um de seus coeficientes ($A,\ b\ e\ c$) determina.

Neste momento um descuido impediu que o desenvolvimento da aula fosse mais construtivo: nem o navegador de Internet do notebook usado pela autora, nem o computador do IFRJ, continham uma atualização necessária para visualização de uma ferramenta criada pelo professor Bortolossi, no GeoGebra, em que foi criada uma função senoidal juntamente com botões que alteravam os valores dos coeficientes da função. O uso dessa ferramenta possibilitaria ao aluno visualizar o que e como as alterações do valores dos coeficientes da função modificam no gráfico da mesma. A saída encontrada foi comentar com os alunos o que cada um dos coeficientes representava no gráfico.

No segundo momento da aula foi exibido um vídeo do YouTube que mostrava a vibração das cordas de um violão enquanto era tocado. Quando mencionado, os alunos mostraram já entender um pouco de teoria musical e até de quais são as notas de cada uma das cordas do violão, uma vez que a matriz curricular do curso Técnico de Automação Industrial contém aulas de Música. Logo, foi fácil chamar a atenção pro fato de que, quando a primeira corda do violão, que emite a nota Mi, era tocada juntamente com a sexta corda, que também emite a nota Mi mas uma oitava acima, era bem visível como a vibração da primeira corda era duas vezes maior do que a da segunda corda.

Seguindo a linha de raciocínio, no terceiro momento, já vistos os valores das frequências das notas da oitava central de um piano, o que cada um dos coeficientes representa no comportamento da função senoidal e também o que eles determinam em cada característica de uma onda sonora, já foi possível mostrar como seria então a função seno que modela cada uma das sete notas.

Foi então, utilizada o comando TocarSom do Software GeoGebra para emitir o som de cada uma dessas funções.

Ficou evidente que, emitir o som de uma nota musical num software criado para fins matemáticos foi algo satisfatório aos olhos dos alunos. E, modelados também por uma função senoidal, emitir o som de um tiro e do motor de uma moto, foi ainda mais impressionante.

A título de curiosidade e ainda utilizando a mesma função TocarSom, foram emitidas algumas vinhetas conhecidas, como a música do jogo Super

Mario e a “Música do Ayrton Senna”. Porém, essas músicas já não eram modeladas por uma função senoidal. Foram inseridas as notas que deveriam ser tocadas, no padrão (A=Lá, B=Si, C= Dó, D=Ré, E=Mi, F=Fá, G=Sol) e ainda utilizando a ‘linguagem musical’ do GeoGebra.

Figura 15: Foto 1 tirada durante a aula. [15]

Figura 16: Foto 2 tirada durante a aula. [16]

[15] Foto 1 da turma tirada durante a aula.
[16] Foto 2 da turma tirada durante a aula

3.3.3 Resultados

Com o objetivo de avaliar qualitativamente a aula, foi requisitado a cada um dos alunos que, individualmente, preenchessem o seguinte questionário:

Questionário

Dia 6 de junho de 2018 **Turma:_____________**

Não há necessidade de se identificar.
As questões deverão ser respondidas considerando uma escala de 0 a 5, em que 0 significa "Não" e 5 significa "Sim".

1. Você acredita que conseguiu fazer a devida associação entre ondas e matemática?

0-☐ 1-☐ 2-☐ 3-☐ 4-☐ 5-☐

2. Considera esta aula mais atrativa que a tradicional?

0-☐ 1-☐ 2-☐ 3-☐ 4-☐ 5-☐

3. Você acredita que os recursos foram suficientes para ilustrar o problema físico?

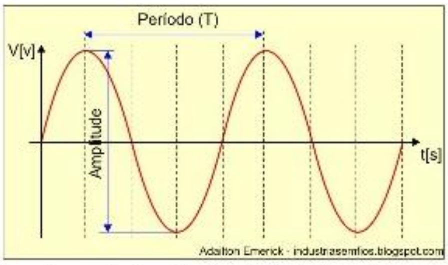
0-☐ 1-☐ 2-☐ 3-☐ 4-☐ 5-☐

4. De acordo com o que foi visto nesta aula, ordene as etapas do processo de modelagem matemática para obtenção do modelo para descrever notas musicais:

( )

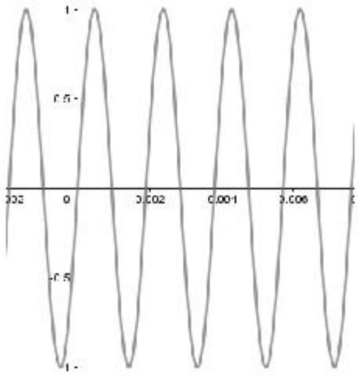
Reproduzir o som para verificar a validação da modelagem.

Reproduzir o resultado. ( )



( )

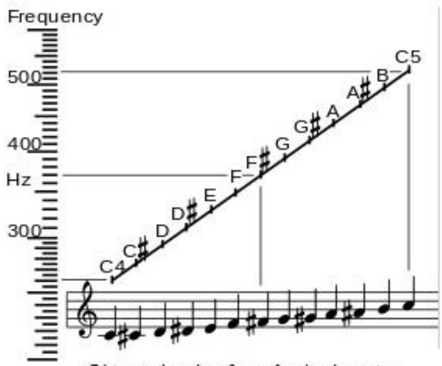
Obter valores de Amplitude e Período da onda sonora.



Montar o gráfico utilizando o Software GeoGebra.

( )

Fazer modificações, se necessário, para encontrar a solução procurada.



Obter valor das frequência da nota.

( )

Figura 17: Imagens com descrição para ordenação do processo de modelagem de ondas sonoras. [17]

OBS:

____

____

____

[17] Figura montada pela autora a fim de ordenar o processo de modelagem de ondas sonoras.

A seguinte tabela apresenta os totais de alunos que atribuíram tais notas a cada uma das questões:

Tabela 2: Tabelas com dados obtidos para análise dos resultados.

		Questão		
		Associação entre ondas e matemática	**Aula mais atrativa que tradicional**	**Recursos foram suficientes**
Nota	**0**	0	0	0
	1	0	0	0
	2	2	0	0
	3	3	2	0
	4	12	3	10
	5	7	19	14

Para uma melhor visualização das discrepâncias entre as notas obtidas em cada uma das perguntas, seguem três gráficos criados com os dados obtidos.

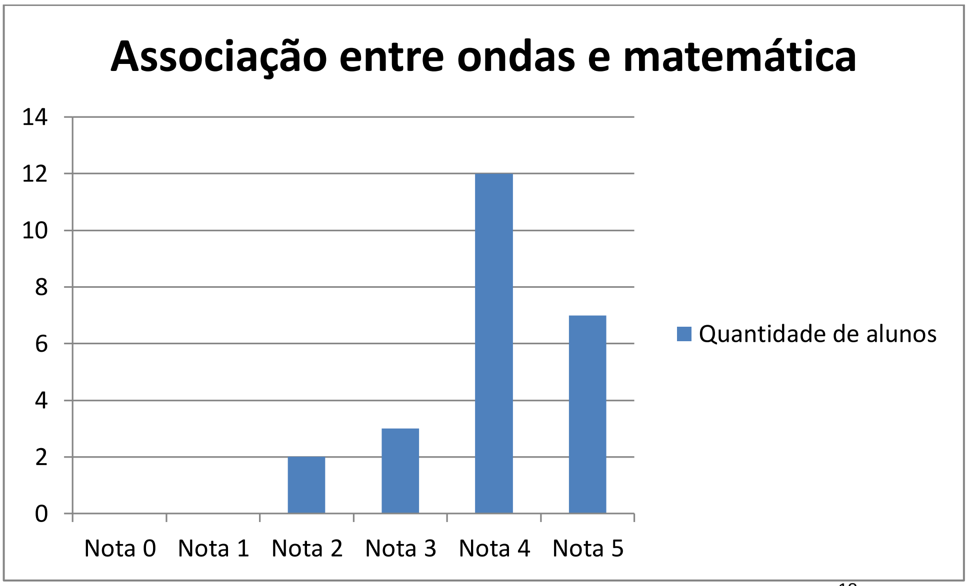


Figura 18: Gráfico com os dados obtidos sobre a questão 1. [18]

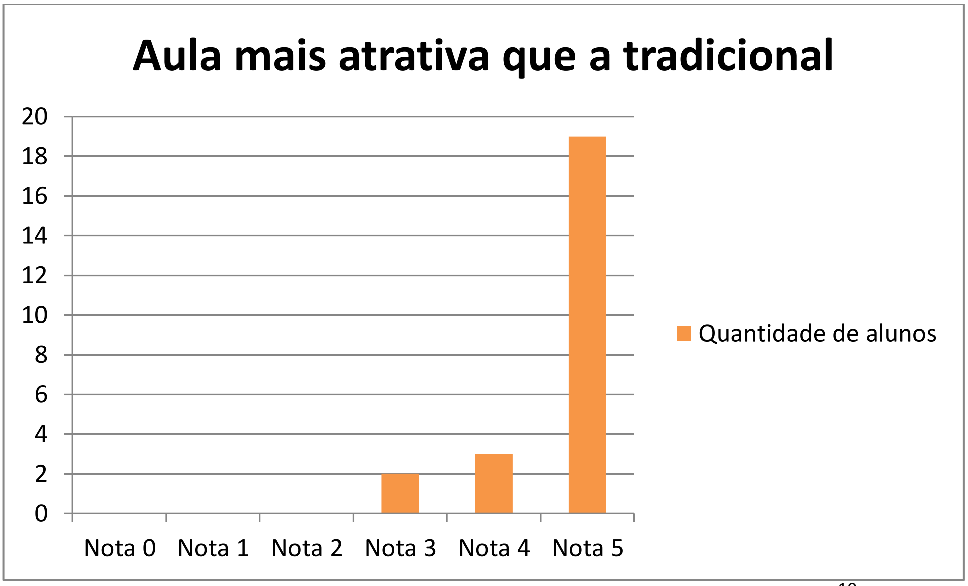


Figura 19: Gráfico com os dados obtidos sobre a questão 2. [19]

[18] Gráfico criado pela autora com os dados obtidos sobre a questão 1.
[19] Gráfico criado pela autora com os dados obtidos sobre a questão 2.

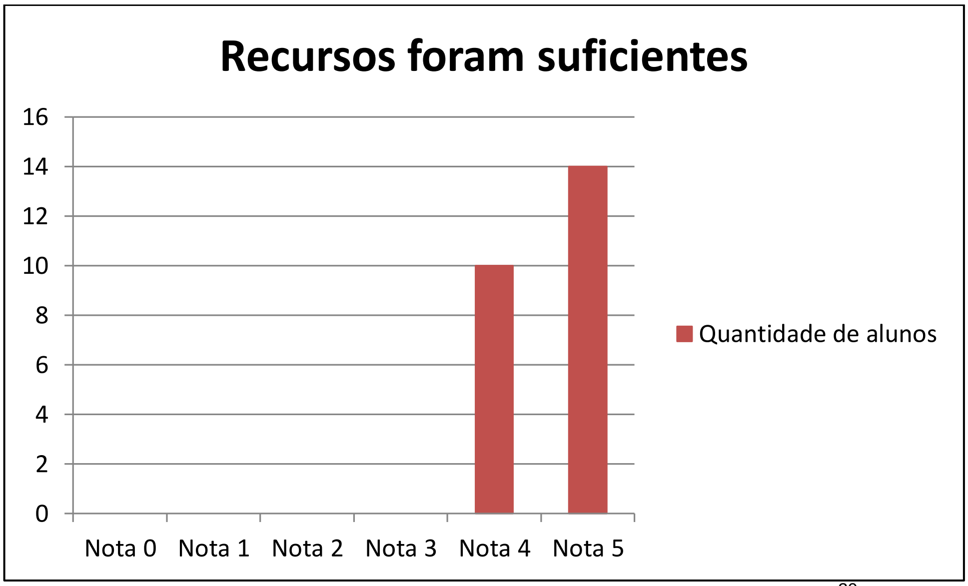


Figura 20: Gráfico com os dados obtidos sobre a questão 3. [20]

O Caderno do Professor para o material de Matemática do Projeto EM-Ação destaca como seus principais objetivos:

> *Este trabalho busca, entre outros objetivos, evidenciar e explorar as conexões entre "Funções Trigonométricas" (tema abordado no terceiro ano do Ensino Médio no Estado da Bahia) e "Saberes e Profissões" (tema gerador deste livro). Isso é feito tendo como elemento motivador um saber matemático que tem aplicações em várias áreas e profissões: o estudo de sinais através da Análise de Fourier. O material do Caderno do Aluno se concentra em sinais sonoros como fenômenos periódicos, isto é, em como sons complexos podem ser obtidos através da superposição de sons senoidais mais simples determinados por funções trigonométricas da forma y = A sen(B x + C), com A, B e C constantes. A escolha de ondas sonoras é proposital: com elas, o aluno poderá realizar vários experimentos computacionais e, assim, perceber visualmente e auditivamente o uso de funções trigonométricas no estudo de sons. (Caderno do Professor, Projeto EM-Ação, 2012)*

No plano de trabalho preparado pela autora deste TCC, não se explorou diretamente o estudo de sinais através da Análise de Fourier. Foi dada ênfase ao conceito de ondas sonoras e suas propriedades definidos pela Física. Isso com a intenção tornar a aula adequada ao nível e conhecimentos prévios dos alunos participantes desse estudo de caso. A análise dos dados obtidos com as respostas aos questionários mostra que:

[20] Gráfico criado pela autora com os dados obtidos sobre a questão 3.

- Quanto aos alunos terem conseguido fazer a devida associação entre ondas e matemática, 50% dos alunos deram nota 4 para essa questão, 29,16% nota 5, 12,5% nota 3 e 8,33% deram nota 2. Logo, podemos deduzir que 50% da turma acredita ter conseguido fazer a devida associação, mas não se sentem totalmente seguros para afirmar com certeza que entenderam totalmente o assunto. Enquanto a parte da turma que deu nota 2 pode significar que essa porcentagem da turma não conseguiu fazer as devidas associações. Porém, esse pequeno número não é tão alarmante, devido ao fato de que o assunto tratado não é de tão fácil compreensão. Logo, vem a ser normal que alguns alunos precisem ver o conteúdo em mais de uma aula para total compreensão;
- Quanto a aula ser mais atrativa do que a tradicional, 79,16% dos alunos deram nota 5 para este quesito. Apenas 8,33% dos alunos deu nota 3 e 12,5% deu nota 4. O que ainda classifica bem este tipo de aula quando comparada com a aula tradicional;
- Quanto aos fato dos recursos terem sido suficientes para compreensão do conteúdo, 58,33% deram nota 5, logo, afirmam com total convicção de que os recursos foram suficientes. Enquanto os outros 41,66% deram nota 4, o que mostra que esses 41,66% dos alunos ainda sentiram falta de mais recursos para explicar o conteúdo.

Por fim , o questionário pede ainda que de acordo com o que foi visto na aula, o aluno ordene as etapas do processo de modelagem matemática para obtenção do modelo para descrever notas musicais.

Baseados no fluxograma da Figura 2 e em todo o referencial teórico deste trabalho, consideramos que, a ordem esperada do processo de modelagem de ondas sonoras explicado na aula é a seguinte:

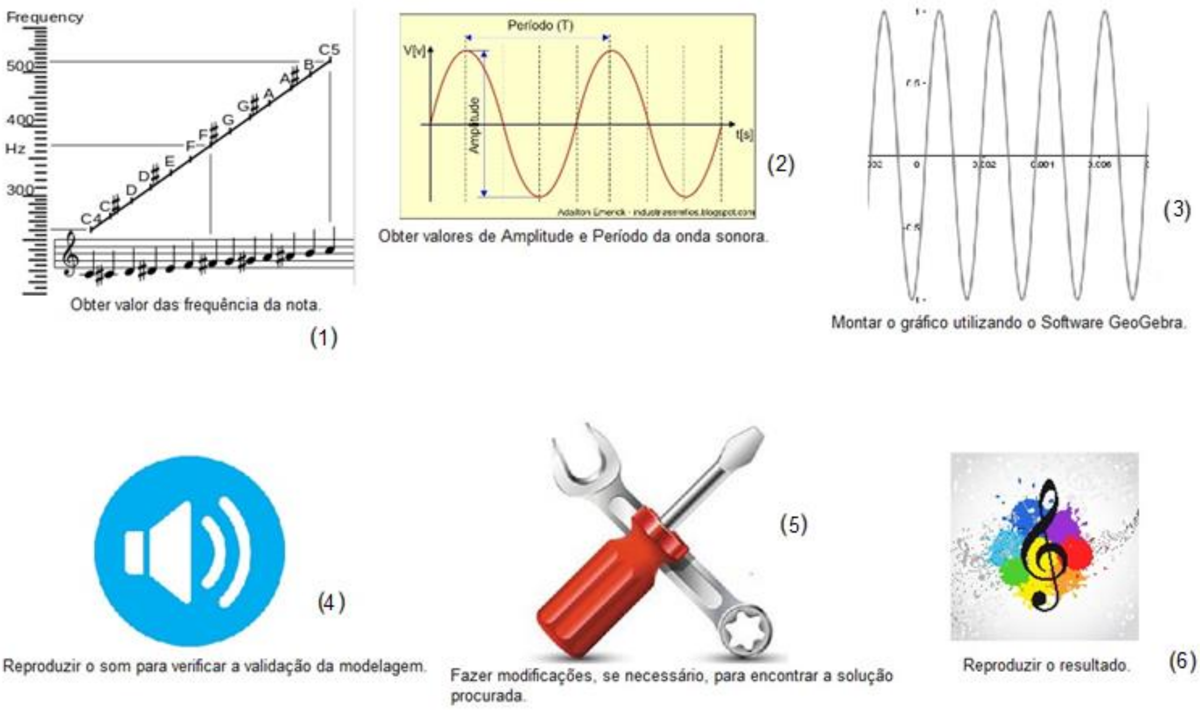


Figura 21: Ordenação esperada para modelagem de ondas sonoras. [21]

Vale ressaltar que, casos em que os alunos trocaram as figuras 1 e 2 (classificando “Obter valores de Amplitude e Período da onda sonora” como 1 e “Obter valor da frequência da nota” como 2), foram ainda considerados como ordenação esperada para modelagem de ondas sonoras. Já que, o importante para a ordenação ser considerada como modelagem é obter os valores de frequência, amplitude e período da onda antes de montar o gráfico no GeoGebra, independente da ordem em que esses valores são obtidos.

Consideramos ainda, baseados nos mesmos termos mencionados anteriormente, ordens em que as figuras estariam mostrando um processo de contextualização de trigonometria e não de modelagem de ondas sonoras. As ordens são:

[21] Resposta esperada da questão 5 do questionário dado aos alunos sobre a ordenação do processo de modelagem de ondas sonoras.

Ordenação 1:

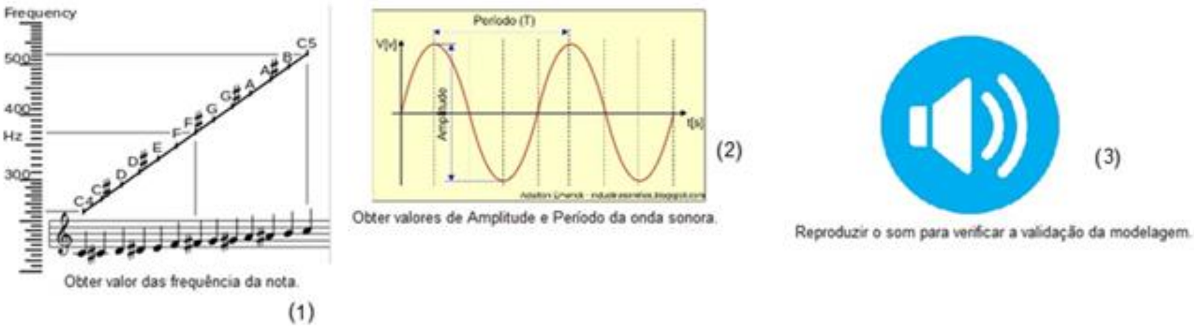


Figura 22: Ordenação 1 considerada como Contextualização de Trigonometria.[22]

Ordenação 2:

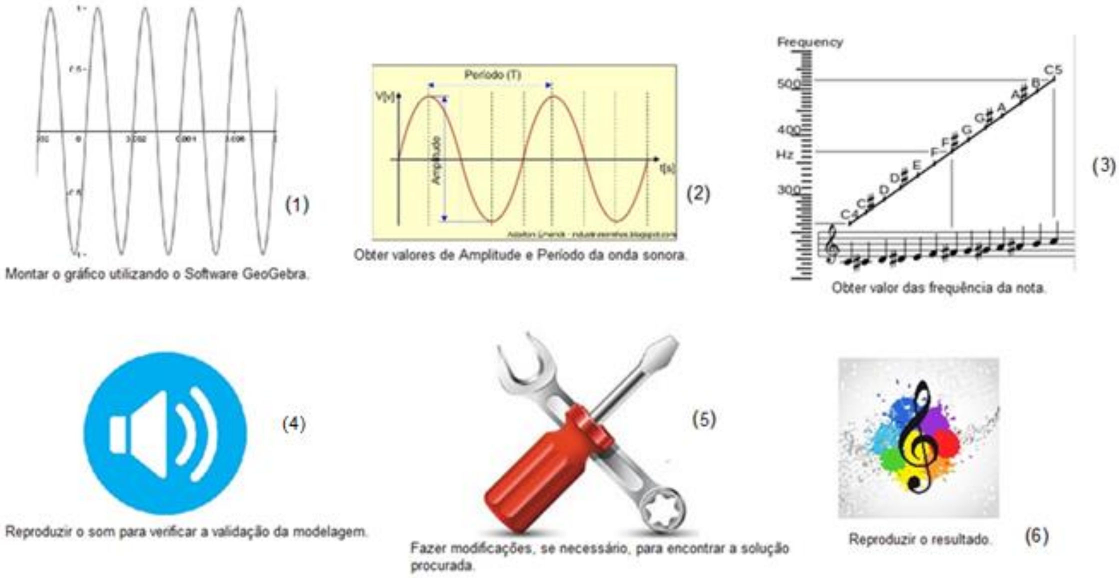


Figura 23: Ordenação 2 considerada como Contextualização de Trigonometria.[23]

Ordenação 3:

Figura 24: Ordenação 3 considerada como Contextualização de Trigonometria.[24]

[22] Figura feita pela autora deste TCC.
[23] Figura feita pela autora deste TCC.
[24] Figura feita pela autora deste TCC.

As justificativas para essas ordenações serem consideradas como Contextualização de Trigonometria são:

- **Ordenação 1:** Obtidos os valores da frequência, da amplitude e do período, ainda é necessária a construção do gráfico no GeoGebra para verificação do comportamento da onda e posterior reprodução do som para verificação da modelagem;
- **Ordenação 2:** Começar o processo pela montagem do gráfico no GeoGebra caracteriza uma Contextualização por conta de ser necessário já saber que a onda sonora será modelada pela função seno logo no início do processo;
- **Ordenação 3:** E ainda, conseguir reproduzir o som para verificar a validação da modelagem também caracteriza um processo de Contextualização pois já é preciso termos a função montada, com todos os seus coeficientes para tal reprodução. E, obviamente, isso só é possível, já se sabendo que trata-se de uma função senoidal modelando uma onda sonora;

Consideradas tais ordenações e analisando as respostas dos 24 alunos da turma 133 do curso de Automação Industrial, foi possível montarmos a seguinte tabela de dados:

Tabela 3: Tabela com os dados obtidos sobre a questão sobre ordenação do processo de modelagem de ondas sonoras.

	Modelagem	**Contextualização de Trigonometria**		
	Ordenação esperada	**Ordenação 1**	**Ordenação 2**	**Ordenação 3**
Quantidade de alunos	14	2	1	7

A partir dos dados da tabela podemos concluir que:

- Aproximadamente 58,33% da turma ordenou da forma esperada para caracterizar o processo de modelagem de ondas sonoras;
- E 41,66% dos alunos ordenaram o processo de forma a caracterizar um processo de Contextualização de Trigonometria;

3.4 Conclusões

Considerando as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos destacadas nos PCN citadas no capítulo 1 deste trabalho, e as atividades propostas pelo plano de trabalho também aqui contido, podemos concluir que a aula aplicada contém elementos que colaboram para o desenvolvimento de várias competências, como: ler, interpretar e utilizar representações matemáticas; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento e utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

No capítulo 1, vimos que o BNCC destaca que deve ser foco no Ensino Médio a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Isto é, propõe que se deve levar em conta as vivências cotidianas dos alunos devido às suas condições socioeconômicas, aos avanços tecnológicos e até às exigências do mercado de trabalho para o desenvolvimento de atividades coerentes ao contexto dos alunos. Outro fator evidente nas atividades desenvolvidas durante a aula dada por esta autora. Uma vez que música e diversos outros sons são tão presentes no cotidiano de crianças, adolescentes e adultos.

Podemos destacar que as atividades desenvolvidas durante a aula ajudam também a desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e de resolução de problemas. Fazendo com que os alunos desenvolvam suas próprias maneiras de raciocinar, representar, argumentar e comunicar, assim como sugerido também pelo BNCC.

Por fim, estabelecemos como objetivos do trabalho analisar a absorção de conteúdo e a receptividade dos alunos através desse método de ensino, e ainda se os recursos são suficientes para ilustrar o problema. Logo, pelos resultados obtidos através da análise dos questionários respondidos pelo alunos, conclui-se que:

- Obter 79,16% da turma classificando com a nota 4 ou 5 a questão sobre ter conseguido fazer a devida associação entre ondas e matemática mostra que o conteúdo foi bem absorvido. Fato comprovado ainda na análise das ordenações feitas pelos alunos sobre o processo de modelagem de ondas sonoras que mostra que 58,33% da turma 0-ordenou da forma esperada;
- 79,16% dos alunos deram nota 5 para o quesito da aula ser mais atrativa que a tradicional. Portanto, fica bem claro o quanto é de fato mais atrativa e agradável aos alunos uma aula que faça uso de recursos digitais, realize experimentos em sala de aula e traga vídeos que mostram aplicações do conteúdo estudado;
- Sobre os recursos utilizados terem sido suficientes para ilustrar o problema, 100% dos alunos deram nota entre 4 e 5. Logo, os recursos cumpriram bem sua função de referenciar o conteúdo, trazendo situações do cotidiano para integralizar o conteúdo matemático.

Portanto, no geral, podemos concluir que através da análise dos dados obtidos após a aplicação da aula os objetivos deste trabalho foram alcançados nos levando a conclusão de que a metodologia de ensino utilizada foi bem avaliada pelos alunos.

Referências

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, v. 1, p. 1-10, 2004.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

FIORENTINI, Dario et al. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, 1990.

HERMINIO, Maria Helena Garcia Barbosa; DE CARVALHO BORBA, Marcelo. A NOÇÃO DE INTERESSE EM PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 1, 2010.

NASCIMENTO, Eimard GA do. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. **XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN**, v. 8457, p. 2012.

SCHOENFELD, Alan H. **Mathematical problem solving. Elsevier**, 2014.

SILVA, Neivaldo. Ensino de matemática, ética e sociedade: A etnomatemática e a modelagem como possibilidades. Amazônia: **Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 1, p. 49-54, 2005.

______. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. Texto Preliminar do documento BNCC, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 7 de maio de 2018.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na Educação Científica.

ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n.2, p. 65-85, 2009.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BRASIL, L. D. B. Lei 9394/96. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, 2012.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais; PARA TODOS, Plano Decenal de Educação. Brasília, MEC. 1997.

DA CRUZ, Jó Adriano; DE FREITAS MADRUGA, Zulma Elizabete. **A educação financeira aplicada ao ensino médio sob uma perspectiva etnomatemática**. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática-2013. 2013.

DA SILVA, Mônica Ribeiro. **Currículo, ensino médio e BNCC-Um cenário de disputas**. Retratos da Escola, v. 9, n. 17, 2016.

DE CASTRO, Maria Helena Guimarães; TIEZZI, Sergio. **A reforma do ensino médio e a implantação do ENEM no Brasil**. Desafios, v. 65, n. 11, p. 46-115, 2004.

PINTO, Antonio Henrique. **A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar**. Boletim de Educação Matemática, v. 31, n. 59, p. 1045-1060, 2017.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – Minicurso GT 10 **– Modelagem Matemática**. Anais... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

BASSANEZI, R. (2009). **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07-32, 2009.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação**. Bolema, Rio Claro, n.15, p. 5-23, 2001.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; KLÜBER, Tiago Emanuel. **Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão**. Cadernos de Pesquisa, v. 41, n. 144, p. 904-927, 2011.

BUENO, Vilma Candida. **Concepções de modelagem matemática e subsídios para a educação matemática: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro**. 2011.

DE ALBUQUERQUE CHAVES, Maria Isaura; OLIVEIRA DO ESPÍRITO SANTO, Adilson. Modelagem Matemática: uma concepção e várias possibilidades. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 30, 2008.

DE ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.

DINIZ, Leandro do Nascimento. **O papel das tecnologias da informação e comunicação nos projetos de modelagem matemática**. 2007.

SAMPAIO I.B.M. **Modelos matemáticos na nutrição animal. Recife**, PE, 2002. I n: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ZOOTECNIA, 39., 2002, Recife, PE. Anais.Brasília: Sociedade Brasileira de Zootecnia, 2002. CD-ROM

SILVEIRA, Everaldo. **Modelagem matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações**. 2007.