



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Rio de Janeiro

**INSTITUTO FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

*Campus* **VOLTA REDONDA**

**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**CLAUDILENE FONSECA MEDEIROS**

**NÚMEROS RACIONAIS: DIFICULDADES DE  
APRENDIZAGEM E SUA RELAÇÃO COM A  
INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA**

**VOLTA REDONDA  
JANEIRO DE 2018**

**CLAUDILENE FONSECA MEDEIROS**

**NÚMEROS RACIONAIS: DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM E SUA  
RELAÇÃO COM A INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Roberta Fonseca dos Prazeres  
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

VOLTA REDONDA  
JANEIRO DE 2018

Medeiros, Claudilene Fonseca.

M489n      Números racionais: dificuldades de aprendizagem e sua relação com a  
introdução à Álgebra / Claudilene Fonseca Medeiros, 2018.

44f. : il. color.

Orientadora: Profª Msc. Roberta Fonseca dos Prazeres

Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), campus Volta Redonda, 2018

1. Álgebra .2. Proposta de Wu. 3. Números racionais. I. Instituto  
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro. II. Prazeres, Roberta  
Fonseca dos. III. Título

CDU: 512

**Claudilene Fonseca Medeiros**

**Números racionais: dificuldades de aprendizagem e sua  
relação com a introdução à álgebra**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
ao corpo docente de Matemática como parte  
dos requisitos necessários para a obtenção  
do grau de Licenciado em Matemática pelo  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tec-  
nologia do Rio de Janeiro.

Volta Redonda, 08 de janeiro de 2018.

*Roberta Fonseca dos Prazeres.*

**Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres**  
(orientadora)  
Instituto Federal do Rio de Janeiro

*Giovana da Silva Cardoso*

**Ma. Giovana da Silva Cardoso**  
Instituto Federal do Rio de Janeiro

*José Ricardo Ferreira de Almeida*

**Me. José Ricardo Ferreira de Almeida**  
Instituto Federal do Rio de Janeiro

*Magno Luiz Ferreira*

**Me. Magno Luiz Ferreira**  
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Volta Redonda - RJ  
2018

---

# Agradecimentos

A Deus, Senhor da minha vida, que até aqui me ajudou e me proporcionou essa conquista.

Ao meu amado esposo Marcos por todo apoio e incentivo.

A minha querida orientadora professora Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres pela paciência, compreensão, incentivo e valiosa contribuição para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, sogros, irmãos, cunhados, sobrinhos e demais familiares e amigos pelo incentivo e compreensão.

# Resumo

As dificuldades dos alunos com o conjunto dos números racionais são relatadas em diversas pesquisas. Tais problemas estão relacionados, por exemplo, com as várias interpretações da representação fracionária desses números e com a forma com que esse tópico é ensinado. Na maior parte das vezes, o aluno aprende muitas técnicas de manipulação aritmética sem que ocorra a apreensão dos conceitos. No Brasil, o estudo dos números racionais se inicia no segundo ciclo do ensino fundamental, retornando posteriormente no terceiro e quarto ciclos, quando acontece a expansão desse conceito e sua aplicação na álgebra elementar. Portanto, se o aprendizado dos racionais não for adequado, trará uma consequência para o estudo da álgebra. Esse trabalho, de caráter bibliográfico, trata sobre esse assunto, e tem como objetivo apresentar pesquisas que mostram a relação entre esses conteúdos. Para isso utilizou-se principalmente os estudos do professor Wu, da Universidade da Califórnia, que apresenta uma proposta de ensino de racionais que visa facilitar a passagem para a álgebra. Diante da importância desse tema e da pequena quantidade de publicações no Brasil sobre a questão, acredita-se que esta pesquisa possa ajudar os professores no conhecimento de uma nova abordagem sobre esse assunto levando, assim, a uma melhor aprendizagem da álgebra.

**Palavras-chave:** Números racionais; Proposta de Wu; Álgebra.

# Abstract

The difficulties of students with the set of rational numbers are reported in several studies. Such problems are related, for example, to the various interpretations of the fractional representation of these numbers and to the way of this content is taught. In many cases, the student learns many techniques of arithmetic manipulation without apprehending the concepts. In Brazil, the study of rational numbers begins in the second cycle of elementary education, returning in the third and the fourth cycles, when the concept is expanded and its application in elementary algebra is done. Therefore, if the study the rationals is not appropriate learned, it will have a consequence for the study of algebra. This bibliographical work deals with this subject and aims to present researches that shows, then, the relationship between the algebra and the teaching of rational numbers. For this proposal was mainly used the Professor Wu' studies, of the University of California, who presents a rational teaching proposal that aims to facilitate the passage to the algebra. Given the importance of this topic and the small number of publications in Brazil about this question, it is believed that this research can help teachers in the knowledge of a new approach of this subject, leading then to a better learning of algebra.

**Keywords:** Rational numbers; Wu's proposal; Algebra.

---

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1 – NÚMEROS RACIONAIS: UM POUCO DE HISTÓRIA</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1 ORIGEM DAS FRAÇÕES . . . . .	11
1.2 AS FRAÇÕES NO ANTIGO EGITO . . . . .	12
1.3 SISTEMA DE NUMERAÇÃO NA ANTIGA BABILÔNIA . . . . .	13
1.4 FRAÇÕES DECIMAIS . . . . .	14
1.5 IMPORTÂNCIA DE SE TRATAR DA HISTÓRIA DOS RACIONAIS . . . . .	15
<b>2 – NÚMEROS RACIONAIS: DIFERENTES SIGNIFICADOS</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 RACIONAIS E SUAS INTERPRETAÇÕES . . . . .	18
<b>3 – DIFICULDADES COM NÚMEROS RACIONAIS</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1 OS NÚMEROS RACIONAIS E AS FRAÇÕES . . . . .	25
3.2 DIFICULDADES DOS PROFESSORES . . . . .	26
<b>4 – NÚMEROS RACIONAIS E A INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1 ESTUDOS SOBRE A RELAÇÃO ENTRE FRAÇÕES E ÁLGEBRA . . . . .	31
4.2 A FRAÇÃO NA RETA NUMÉRICA E SUA RELAÇÃO COM A ÁLGEBRA . . . . .	33
4.3 RESULTADOS NO BRASIL . . . . .	36
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	<b>41</b>



---

## Introdução

Os números racionais constituem um objeto de investigação de muitas pesquisas dentro do ensino de matemática. No entanto, apesar da quantidade, percebe-se que pouca evolução é observada no conhecimento dos alunos. Essa afirmação pode ser ratificada ao longo das disciplinas de estágio, realizadas durante o curso de licenciatura. Por isso, continua havendo a necessidade de contínuos estudos nessa área, investigando maneiras que auxiliem o aluno a alcançar esse entendimento.

Tal fato é relevante porque o conhecimento sobre números racionais parece impactar diretamente a apreensão e o desenvolvimento de diversos outros conceitos matemáticos como, por exemplo, os algébricos. Partindo dessa premissa, no presente trabalho pretende-se responder a questão se há, de fato, relação entre o conceito de números racionais e a compreensão da álgebra.

Portanto, objetiva-se trazer à luz a correspondência entre os temas, apresentando-se pesquisas que comprovam essa ligação e uma proposta de ensino de racionais que favoreça a transição entre a aritmética e a álgebra. Mais especificamente, pretende-se mostrar um breve histórico do surgimento dos números racionais e as dificuldades mais comuns relacionadas ao seu ensino. Esses problemas se devem, principalmente, às diferentes interpretações relacionadas à representação desses números e à falta de entendimento dos professores sobre o assunto que, conseqüentemente, afeta os estudantes.

Para responder à pergunta proposta por esse trabalho realizou-se uma pesquisa bibliográfica, partindo-se de diversas dissertações, teses e artigos que tratam sobre o ensino de racionais. A partir dessa investigação inicial, verificou-se os autores citados com maior recorrência, tanto em estudos nacionais quanto em internacionais.

Cita-se, por exemplo, as pesquisas de Kieren sobre os subconstrutos relacionados aos números racionais e Lamon, da Universidade Marquette (Estados Unidos), que possui livros publicados na área. São utilizados também trabalhos do grupo de pesquisa *Rational Number Project*, da Universidade de Minnesota, representado por autores como Behr, Lesh e Post. Além disso, cita-se as teses de Silva (2007) e Moreira (2004).

Verifica-se, no entanto, uma falta de trabalhos que abordem a relação entre o ensino de números racionais e a introdução à álgebra. Para esse estudo, utilizou-se as pesquisas do professor Wu, da Universidade da Califórnia e a tese de Sant'Anna (2008), que se baseia nas pesquisas do referido professor.

No primeiro capítulo, apresenta-se uma breve exposição sobre a história dos números racionais. A partir das informações aí dispostas, pode-se afirmar que o conceito de números racionais surgiu de necessidades ligadas à medição. Além disso, houve um longo processo para que se chegasse às representações atuais.

No capítulo seguinte, são apresentadas as diferentes acepções ligadas ao conceito de racionais, que constituem um tópico importante para que se possa entender as dificuldades ligadas ao processo de ensino e aprendizagem desses números. Essas dificuldades são discutidas ao longo do terceiro capítulo.

No último capítulo, a partir dos problemas apontados no capítulo precedente, relaciona-se o ensino de racionais com a introdução aos conceitos algébricos. Além disso, apresenta-se uma proposta que pretende auxiliar na passagem da aritmética para a álgebra, por meio do ensino de frações na reta numérica. Essa sugestão parte dos trabalhos de Wu, verificando-se uma relação entre essa construção do conceito com a própria história dos números racionais, abordada no primeiro capítulo.

---

## Números racionais: um pouco de história

No presente capítulo será apresentada um pouco da história dos números racionais. Para isso, utiliza-se como base o trabalho de Roque e Carvalho (2012), que fornece um panorama geral sobre o surgimento do conceito de número, e Cajori (1909), ao tratar-se do conceito de frações decimais.

A origem dos números se refere a épocas muito remotas. Tal afirmação se deve ao fato de que a ideia de número é tão antiga que talvez seja contemporânea à formação da linguagem. Os primeiros registros comprovados relacionados aos números são datados de, aproximadamente, 4000 a.E.C.<sup>1</sup>, em uma região conhecida como Baixa Mesopotâmia. Há ainda evidências que apontam para processos relacionados a contagens anteriores a esse estágio, como é o caso do osso de Ishango (Fig. 1), na África, que é datado entre 20000 a.E.C. e 10000 a. E.C.



Figura 1 – Osso de Ishango

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 1).

Muitos textos trazem que a criação dos números está relacionada à contagem de rebanhos. Porém, se esquecem de mencionar também a necessidade de registro da quantidade de mercadorias, fator fundamental para a organização das sociedades que estavam se desenvolvendo (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Segundo Schmandt-Besserat (1986), embora o surgimento da escrita esteja relacionado aos registros da civilização suméria, do quarto milênio a.E.C., as primeiras formas de escrita se relacionam, na realidade, aos processos de contagem. Foram encontrados em escavações objetos

---

<sup>1</sup> Antes da Era Comum.

de argila, denominados *tokens* (Fig. 2), apresentados em formatos diversos, como cilindros, cones e esferas. Esses objetos serviam para promover um controle sobre os artigos provenientes da agricultura, tomando formas mais complexas na medida em que os estados, dentro da concepção de mundo antigo, eram formados.

Os *tokens* eram instrumentos de contagem diferentes dos números usados atualmente. Isso porque para produtos distintos eram utilizados instrumentos distintos. Como exemplo, grãos poderiam ser contados por meio de esferas enquanto jarras de óleo com ovoides. Com o tempo, os *tokens* começaram a ser substituídos por sinais na argila.



Figura 2 – Exemplos de *tokens*

Fonte: Schmandt-Besserat (1986, p. 32).

Posteriormente, quantidades iguais passaram a representar objetos diferentes e é provável que as propriedades dos números começaram a ser estudadas em 3000 a.E.C., marcando o início da matemática abstrata.

## 1.1 Origem das frações

Ao se buscar uma origem para as frações, depara-se com a origem da geometria. Cajori (1909) cita o Livro II das Histórias de Heródoto, que afirma que:

Eles disseram também que este rei (Sesostris) dividiu a terra entre todos os egípcios de maneira a dar a cada pessoa um quadrilátero de tamanho igual e, de acordo com suas receitas, impôs uma taxa a ser cobrada anualmente. Mas para cada um cuja parte o rio diminuísse, tinha que ir até ele e notificar o que havia ocorrido; ele então enviava os capatazes, que tinham que medir em quanto a terra tinha diminuído, para que o proprietário pudesse pagar sobre aquilo que havia restado, em proporção à taxa imposta. Dessa maneira, parece, para mim, que a geometria foi originada [...] (CAJORI, 1909, p. 11, tradução nossa).

Logo, verifica-se que o conceito de frações está relacionado ao conceito de medida. De acordo com Caraça (1951, p. 29), medir "consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie". Ao se escolher uma unidade padrão para fazer essa medição, quando a comparação de grandezas não tinha como resultado um número inteiro, ocorria a necessidade de fracionar a unidade. E é nesse cenário que surgem os números racionais.

## 1.2 As frações no Antigo Egito

De acordo com Cajori (1909), informações significativas sobre a forma como os egípcios utilizavam as frações são encontradas no papiro de Ahmes ou papiro de Rhind (cerca de 1650 a.E.C.). Eles possuíam uma forma de trabalhar com as frações muito diferente das atuais.

Provavelmente foi por volta de 3000 a.E.C. que os egípcios desenvolveram seu sistema de numeração decimal. Na Fig. 3 verifica-se a representação de alguns números, sendo que os números de 1 a 9 eram representados por barras verticais.

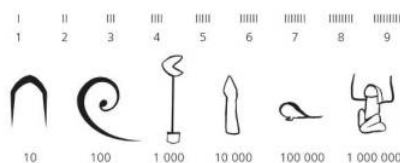


Figura 3 – Representação dos números no sistema egípcio

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 25).

Havia grande complexidade, no entanto, ao se tratar de fração. Normalmente eles evitavam fazer mudanças concomitantes no numerador e denominador. Os babilônios e os romanos, ao trabalharem com frações, conservavam os denominadores constantes. Os babilônios trabalhavam com denominadores iguais a 60 enquanto os romanos com denominadores iguais a 12. Em contrapartida, os egípcios e gregos conservavam os numeradores constantes e trabalhavam com denominadores variáveis.

O termo fração, no papiro de Ahmes, era adotado em um sentido limitado. Isso porque aplicava-se somente às frações unitárias, ou seja, às frações cujo numerador era 1. Primeiro eles escreviam o denominador, sobre o qual colocavam uma elipse.

A fração  $\frac{2}{3}$ , embora tenha numerador diferente de 1, também possuía representação no sistema egípcio e, às vezes usavam um símbolo especial para representar a fração  $\frac{1}{2}$ . Na Fig. 4 verifica-se como eram representadas algumas frações pelos egípcios.

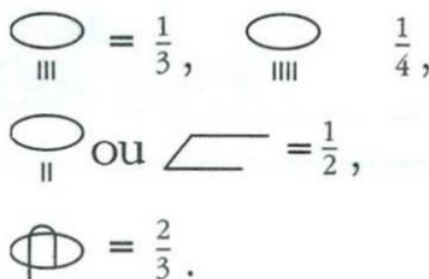


Figura 4 – Representação de algumas frações no sistema egípcio

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 27).

Embora a elipse ocupe um lugar que, nas atuais notações de frações, corresponda ao numerador, que indica quantas partes toma-se do inteiro, ela não tem esse mesmo sentido nas

representações egípcias. Isso ocorre pois ela tem um sentido ordinal e não cardinal, indicando uma distribuição dividida em  $m$  partes iguais em que é tomada a  $m$ -ésima parte.

Além disso, eles somavam dois ou mais valores fracionários para expressar aqueles que não pudessem ser representados por uma fração unitária. Como exemplo, a fração  $\frac{2}{5}$  era expressa como  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ .

Para solucionar a primeira dificuldade verificada, que consistia em representar qualquer valor fracionário como a soma de frações unitárias, foi utilizada uma tabela, fornecida no papiro, em que todas as frações da forma  $\frac{2}{2n+1}$ , onde  $n$  constitui todos os números sucessivamente até 49, são desdobradas em soma de frações unitárias. Desta forma,  $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$  e  $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$ .

Não se sabe por quem, nem como, essa tabela foi criada. O mais provável é que tenha sido criada em épocas diferentes através da experimentação. Uma fração com numerador superior a dois pode ser escrita como fração unitária desde que na tabela exista outra fração com o mesmo denominador dela, bastando para isso usar a tabela mais de uma vez.

Por exemplo, a divisão de 5 por 21 pode ser realizada da seguinte forma. Sabe-se que  $5 = 1 + 2 + 2$ . Na tabela temos  $\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ . Então, pode-se escrever  $\frac{5}{21} = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{1}{21} + \left(\frac{2}{14} + \frac{2}{42}\right) = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ .

Foi visto que os egípcios possuíam um sistema de símbolos para frações unitárias, que representavam partes de um todo. No entanto, não havia uma aritmética comum para os números inteiros não negativos e frações. Esse fato é ratificado no Papiro de Ahmes, que mostra que os egípcios não assumiam que a comutatividade era válida para esses elementos, visto que no Problema 61 há uma tabela com o cálculo de um terço de dois terços e dois terços de um terço (PARK; FLORES; HOHENSEE, 2016).

A seguir, coloca-se como as frações eram vistas no sistema de numeração empregado na Babilônia.

### 1.3 Sistema de numeração na antiga Babilônia

Entre 2000 e 1600 a.E.C., os babilônios, que habitavam a Mesopotâmia, utilizavam um sistema de numeração sexagesimal, ou seja, de base 60.

┐	1	π	2	ππ	3	▽	4
≡	5	≡≡	6	▽▽	7	≡▽	8
≡≡	9	<	10	<π	11	<ππ	12
<ππ	13	<▽	14	<≡	15	<≡≡	16
<▽▽	17	<≡≡	18	<≡≡≡	19	<<	20
<<<	30	<<	40	<<	50	┐	60

Figura 5 – Símbolos para os números no sistema de numeração dos babilônios

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 8).

O sistema dos antigos babilônios era aditivo até o número 59 (usando aí a base 10) e depois usava-se o mesmo símbolo de 1 para o número 60. Para diferenciar as potências de 60 e o número 1, deveria ser feito um estudo de cada problema. Números decimais como 3,601 e 7,200 eram escritos da mesma forma, sendo que em algumas ocasiões um espaço era deixado para sinalizar uma coluna vazia (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Para efetuar cálculos com esses números, os babilônios usavam tabletas. Como exemplo didático que mostra a maneira de realizar essas operações (não as retratando exatamente, no entanto), tem-se um problema de adição extraído de Roque e Carvalho (2012, p. 13), na Fig. 6.

1; 30, 27; 50 + 0; 29, 38; 13 = 2; 0, 6; 3.

Temos, montando o algoritmo de maneira exatamente igual à nossa:

$60^1$	$60^0$	$60^{-1}$	$60^{-2}$
1	1	1	
1	30	27	50
0	29	38	13
2	00	06	03

Figura 6 – Adição no sistema dos babilônios

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 13).

Os cálculos que envolviam divisões levavam ao uso de tabletas com inversos multiplicativos, o que atualmente denota-se por  $\frac{1}{n}$ . Dessa forma, a divisão de  $m$  por  $n$  era feita por meio da multiplicação de  $m$  pelo inverso multiplicativo de  $n$ . Ou seja, em linguagem moderna, tem-se  $m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ .

Nos casos em que o inverso de um número  $n$  não possuísse uma representação finita, os resultados da divisão de  $m$  por  $n$  eram registrados em tabletas.

Em outras civilizações também há o registro de tratados matemáticos sobre frações. Na China pode-se citar o *Nove capítulos da arte matemática*, do século III, e *Ganita Sara Sangraha*, do matemático indiano Mahavira (séc. IX), que trata de frações.

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, em sua obra, *Liber Abaci*, introduziu os símbolos indo-arábicos na Europa e ajudou a promover o traço horizontal (que provavelmente eram utilizados pelos árabes) na representação das frações, que ainda hoje é utilizado (STEWART, 2014).

A representação dos racionais por meio de frações, na prática, não é muito utilizada. Na maior parte das vezes são utilizadas aproximações por meio de decimais. Para chegar à essa representação, deve-se estudar o trabalho de Simon Stevin (1548 - 1620), durante o século XVI.

## 1.4 Frações decimais

O processo de entendimento das frações como números não aconteceu de forma linear nem natural. Como visto, os gregos pensavam em termos de relações entre números inteiros

não negativos, uma ideia precursora do atual conceito de frações. Foi somente muitos anos depois, por volta do século XIII, que a razão entre números inteiros foi vista, de fato, como um número, mesmo nos casos em que o quociente não era um número inteiro (PARK; FLORES; HOHENSEE, 2016).

Apesar do fato de que quantidades fracionárias já existissem em muitas culturas antigas, demorou muitos séculos para que os matemáticos aceitassem as frações como números e utilizassem, para operá-las, a mesma aritmética dos números inteiros.

O primeiro tratamento sistemático das frações decimais foi realizado por Stevin, um homem que trabalhou nas mais variadas áreas da ciência. Tendo sido ministro das Finanças na Holanda, se deparou com a necessidade de muitos cálculos contábeis. Ao estudar a notação indo-arábica transmitida por Fibonacci e os sistemas sexagesimais babilônicos, encontrou um sistema que combinou os dois, o sistema decimal (STEWART, 2014).

Em seu *La Disme* (1585), ele destaca os benefícios de frações decimais, bem como da divisão decimal em sistemas de pesos e medidas. Stevin empregou as novas frações "a todas as operações aritméticas usuais". Ele precisava de uma notação apropriada no lugar da casa decimal, então ele usou um código. Para cada lugar na fração foi anexado um termo correspondente. Dessa forma, o número 5.912, usando sua notação, seria escrito como na Fig. 7.

$$\begin{array}{r} 0123 \\ 5912 \end{array} \quad \text{ou} \quad 5\textcircled{0}9\textcircled{1}1\textcircled{2}2\textcircled{3}$$

Figura 7 – Notação de Stevin

Fonte: Cajori (1909, p. 186).

Embora trabalhosos, esses termos são importantes pois através deles originou-se uma significativa modificação. Stevin também criou a maneira como são designadas as potências e introduziu expoentes fracionários em álgebra. Nicole Oresme (1320-1382) já havia feito isso bem antes, apesar de não ter sido notado. As inovações de Stevin também não foram rapidamente admiradas nem utilizadas de imediato porém, ao contrário do que ocorreu a Oresme, elas se mantiveram como um domínio estável (CAJORI, 1909).

## 1.5 Importância de se tratar da história dos racionais

Da mesma forma que a evolução histórica da noção de número e o desenvolvimento do conhecimento matemático, grande parte do ensino de matemática está relacionado à ampliação dos conjuntos numéricos. A justificativa para que o ensino seja organizado e desenvolvido na perspectiva da extensão da noção de número e dos conjuntos numéricos é o surgimento de novos problemas e situações às quais não são possíveis de se resolver utilizando-se os conjuntos numéricos até então conhecidos.



A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>2</sup>, cuja terceira versão foi entregue em abril de 2017 ao Conselho Nacional de Educação (CNE), se refere à educação infantil e ao ensino fundamental, sendo que as discussões sobre o ensino médio se encontram em processo. Sobre os números racionais, a BNCC afirma que:

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. [...] Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. **Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária** (BRASIL, 2017, p. 224-225, grifo nosso).

A breve contextualização histórica exposta no presente capítulo mostra que o desenvolvimento dos números racionais deriva de um lento processo. A exposição dessa história pode ser parte importante no desenvolvimento das habilidades dos alunos, sendo que essa se encaixa dentro da proposta apresentada pela BNCC. Isso porque o aluno pode verificar, dentro de uma perspectiva histórica, como se desenvolveu a noção de número e como o conjunto dos números foi se expandindo. Ademais ela se encaixa dentro da proposta apresentada por Wu, a ser tratada no quarto capítulo.

---

<sup>2</sup> A BNCC será uma orientação para questões consideradas importantes no processo de ensino e aprendizagem de escolas públicas e privadas brasileiras. Ela foi aprovada no dia 15/12/2017 mas o documento homologado ainda não está disponível.

---

## Números racionais: diferentes significados

Como verificado no capítulo anterior, o desenvolvimento do conceito de racionais como números demorou muitos séculos. Esse é um fator que pode ajudar a entender a dificuldade dos estudantes em relação a esse conteúdo. Além disso, leva à necessidade de se considerar também o conhecimento do professor sobre como ensinar frações, entendendo-as como parte de um sistema numérico.

Neste capítulo serão utilizados como referências principais os trabalhos de Lamon (2007), além de Behr e Post (1992). A justificativa para essa escolha é que esses autores têm muitas pesquisas que envolvem o ensino de frações. Além disso, utiliza-se também a tese de doutorado de Silva (2007), que possui um capítulo dedicado ao estudo da representação fracionária do número racional, e o trabalho de Noura (2009), que trata sobre o entendimento do conceito de fração.

O fato do uso de pesquisas datadas da década de 90 pode ser justificado por Lamon (2007). Segundo a autora, a quantidade de trabalhos sobre número racionais é maior em datas anteriores a 1992 pois esse é um domínio de pesquisa que, apesar de fundamental, é muito difícil. Um dos fatores apontados pela autora é que os professores não estão preparados para ensinarem conteúdos diferentes do "parte-todo".

Segundo Behr e Post (1992), para que ocorra um entendimento sobre números racionais (razões, frações, decimais, números na reta numérica, partes de um todo), o aluno deve ter uma boa apreensão das quatro operações com números inteiros e sobre os conceitos de medida. Todavia, no que tange ao processo de contagem, há uma mudança de pensamento que causa dificuldade nos estudantes. Essa mudança está relacionada ao fato de, por exemplo, não existir um "número racional sucessor".

Além disso, os alunos aprendem muitas técnicas de manipulação matemática, ao nível de memorização, não entendendo os conceitos intrínsecos relacionados a elas. Segundo Noura (2009), quando os alunos chegam ao estudo das frações, eles já possuem um conhecimento

considerável adquirido informalmente sobre números inteiros e frações. Cabe ao professor auxiliar o aluno a desenvolver uma compreensão de número racional, ver as conexões entre símbolos de frações, desenvolver a habilidade verbal e entender as representações simbólicas. É preciso que o professor leve em conta os conhecimentos intuitivos ou socialmente adquiridos de número pelo aluno, além de verificar como sua aprendizagem é influenciada pela origem cultural e linguística.

Ainda de acordo com Noura (2009), um dos principais desafios no ensino da matemática é o de conceito de frações, razão e proporção. Uma das causas desse problema é a dificuldade de contextualização desses conceitos. O professor deve ajudar o aluno a fazer a relação do seu aprendizado construído com o seu aprendizado instruído. É muito importante que o aluno seja apresentado aos conceitos fundamentais de fração nos anos iniciais para que seu entendimento de frações se amplie e transforme.

O aluno, no princípio de seus anos escolares, poderá desenvolver o seu entendimento de números racionais através do estudo com modelos contínuos e discretos como grupos de objetos, linhas de números e regiões. Os alunos também conseguem ampliar a compreensão de números racionais, entender o tamanho de uma fração e determinar resoluções satisfatórias para questões de adição de frações por meio de recursos visuais.

## 2.1 Racionais e suas interpretações

Os números racionais podem ser vistos com significados diferentes. Há um consenso, entre os educadores matemáticos, de que os estudos de Kieren (1976) iniciaram uma discussão, que ainda hoje perdura, sobre as várias interpretações relacionadas ao número racional.

De acordo com Kieren (1976), para uma maior apreensão sobre o conceito de número racional, são necessárias experiências com suas muitas interpretações. Contudo, a maior parte dos materiais escolares simplesmente tratavam (e ainda tratam) os números racionais apenas como uma ferramenta de cálculo. Dessa forma, essas diversas interpretações não chegavam (e ainda não chegam) aos alunos.

Pode-se ilustrar, com modelos simples, a diferença entre essas acepções. Na relação parte-todo, a fração  $\frac{3}{4}$  descreve 3 partes de 4 divisões de igual tamanho. Uma outra interpretação, a quociente, é que essa fração denota, por exemplo, a divisão de três pedaços de torta entre quatro crianças. Como razão, poderia se referir ao número de 3 carros verdes a cada 4 brancos.

Já como medida, se relaciona à situação em que a fração  $\frac{3}{4}$  é usada para determinar uma distância. Vista como operador, se refere a uma operação que reduz ou aumenta o tamanho de uma outra quantidade. Como exemplo, reduzir uma página a  $\frac{3}{4}$  de seu tamanho original (MOSS, 2005).

Um número grande de pesquisadores procuraram enumerar possíveis interpretações para as frações. Apesar de haver uma variedade de situações em que os números racionais são

empregados, os critérios utilizados para as classificações deles muitas vezes não são claros (NUNES et al., 2009).

Silva (2007) coloca em sua tese, apoiada nos trabalhos de Vergnaud (1982) em Teoria dos Campos Conceituais (que procura compreender de que maneira a construção dos conhecimentos matemáticos é realizada) e em pesquisas de Nunes et al. (2004), cinco significados para o número racional. São eles: parte-todo, quociente, medida (ou razão), operador e localização fracionária na reta numérica.

### **Números racionais como parte-todo:**

A interpretação para esse significado envolve a divisão de uma quantidade contínua ou de um conjunto discreto de objetos em  $m$  partes iguais, onde cada parte corresponde a  $\frac{1}{m}$ . Em relação a quantidades contínuas, tem-se problemas relacionados geralmente a comprimentos, áreas ou volumes. No caso de quantidades discretas, trabalha-se com quantidades que envolvam mais de um objeto, como uma dúzia de ovos ou dez biscoitos.

Um exemplo de exercício que trata desse significado é: Daniel vai se atrasar para o jantar. A mãe dele preparou uma pizza. Dividiu-a em 4 partes iguais e guardou uma delas para Daniel. Qual é a fração que representa a parte destinada ao Daniel?



Figura 8 – Divisão da pizza em quatro partes iguais

Fonte: Dividindo em partes iguais<sup>3</sup>.

Essa interpretação dos racionais é introduzida desde os primeiros anos de escola e pode ser utilizada para mostrar relações entre frações. Dentro de uma perspectiva parte-todo, é fácil verificar que o racional  $\frac{3}{4}$  é igual a soma de  $\frac{1}{4}$  com  $\frac{1}{4}$  com  $\frac{1}{4}$ . Essa associação entre frações unitárias e não unitárias também é útil na transição para frações com numerador maior que o denominador. Como exemplo, a fração  $\frac{5}{4}$  é a soma  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ , ou seja, um inteiro mais  $\frac{1}{4}$ .

De acordo com Behr e Post (1992), dentro dessa acepção também podem ser trabalhados os conceitos de relação de equivalência e operações dos números racionais. A multiplicação desses números pode ser feita por meio da obtenção de parte de uma parte. Já a demonstração de equivalência pode ser feita com o uso de materiais manipulativos. Por meio da Fig. 9, por exemplo, é possível verificar que  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ .

<sup>3</sup> Disponível em: <<http://escolakids.uol.com.br/dividindo-em-partes-iguais.htm>>. Acesso em: 16 nov. 2017.

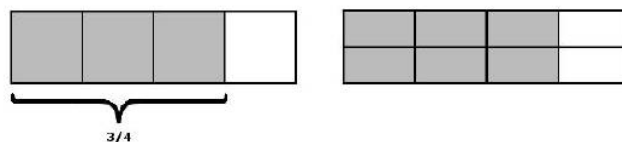


Figura 9 – Uso de material manipulativo para mostrar igualdade entre frações

Fonte: Behr e Post (1992).

### Números racionais como quociente, como medida (ou razão) e como operador multiplicativo:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), de 1998, em relação ao ensino fundamental, afirmam que "O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador" (Brasil, 1998, p. 66).

Na interpretação parte-todo, o símbolo  $\frac{x}{y}$  se refere a uma parte  $x$  de uma unidade dividida em  $y$  partes. Na interpretação quociente, o  $\frac{x}{y}$  é usado para se referir à operação de divisão. Como exemplo pode-se citar o seguinte problema:

Cinco folhas sulfites foram divididas igualmente a três alunos pela professora para que eles construam pequenos blocos de anotações. Qual foi a quantidade de papel que cada aluno recebeu? (BIANCHINI, 2006, p. 159)

A resolução pode ser feita dando a cada aluno uma folha, sendo que as duas folhas restantes podem ser divididas em três partes e repartidas pelos alunos como mostrado na Fig. 10. Cada aluno fica, então, com 1 folha inteira e mais  $\frac{2}{3}$  de folha, que pode ser escrito como  $1\frac{2}{3}$  de folha, um número misto. Essa ação também pode ser indicada pela divisão  $5 : 3$ .

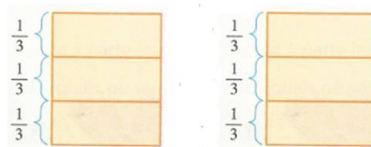


Figura 10 – Divisão de uma folha em três partes iguais

Fonte: Bianchini (2006, p. 159).

Sobre o significado medida (ou razão), os PCNs afirmam que:

Uma terceira situação, diferente das anteriores [parte-todo, quociente], é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo "2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes" (BRASIL, 1997, p. 68, grifo nosso).

Em relação à aceção operador, tem-se o exemplo:

Em uma omelete, Cássia gastou  $\frac{2}{3}$  de 12 ovos. Quantos ovos Cássia usou? (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 175)

Esse significado de fração, segundo os PCNs, deve ser trabalho apenas no segundo ciclo do ensino fundamental. Sobre as interpretações parte-todo, quociente e razão no primeiro ciclo do ensino fundamental, tem-se que:

A essas três interpretações, bastante interessantes de serem exploradas neste ciclo, acrescenta-se mais uma, que será trabalhada nos ciclos posteriores. Trata-se do significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo "que número devo multiplicar por 3 para obter 2" (BRASIL, 1997, p. 68).

Segundo Silva (2007), apesar dessa recomendação dos PCNs, o que se verifica na prática é que muitos professores das séries iniciais se valem de exercícios envolvendo o significado operador. Por isso, a autora enfatiza a importância de se investigar o porquê dessa aceção ser tão priorizada.

### **Números racionais como localização da representação fracionária na reta numérica:**

Um número racional pode ser visto como um ponto da reta numérica, como ilustrado na Fig. 11.

Exemplo:

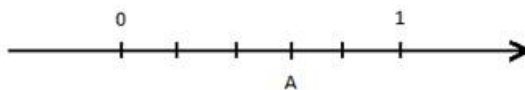


Figura 11 – Representação da fração  $\frac{3}{5}$  na reta numérica

Fonte: Ilustração própria.

O segmento compreendido entre os pontos 0 e 1 foi dividido em cinco partes iguais. O ponto A, portanto, representa nesta reta a fração  $\frac{3}{5}$ .

Há pesquisas, no entanto, como as de Llinares e Sánchez (1996) e Canova (2006), que mostram que alguns professores não sabem localizar um número racional na reta numérica. Como a maioria das ideias para representação de uma fração, essa é trabalhada como algo novo, desassociado da ideia de fração como parte de uma unidade. Porém, possíveis junções são assinaladas por alguns autores:

A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova ideia, pois também se trata da divisão de uma unidade em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar o ponto na reta. (Vasconcelos; Belfort, 2006, p. 47)

Siegler et al. (2010) indicam que os alunos devem entender que é possível obter frações expandindo o sistema numérico a partir dos números inteiros. As retas numéricas são inseridas,

assim, como uma ferramenta importante de representação para ensinar não só esse, mas também outros significados de fração. De acordo com a recomendação 2:

Ajudar os alunos a reconhecerem que as frações são números e que eles expandem o sistema de números além dos números inteiros. Use linhas numéricas como uma ferramenta de representação central no ensino desse e de outros conceitos de fração desde as primeiras séries.

- Use atividades de medição e retas numéricas para ajudar os alunos a entenderem que as frações são números, com todas as propriedades que os números compartilham.
- Fornecer oportunidades para que os alunos localizem e comparem as frações nas linhas numéricas.
- Use linhas numéricas para melhorar a compreensão dos alunos sobre frações equivalentes, densidade de fração (o conceito de que há um número infinito de frações entre quaisquer duas frações) e frações negativas.
- Ajudar os alunos a entender que as frações podem ser representadas como frações comuns, decimais e porcentagens, e desenvolver a capacidade dos estudantes de transitarem entre essas formas (SIEGLER et al., 2010, p. 1, tradução nossa).

Há outras pesquisas que também defendem o uso da reta numérica, como pode ser verificado na passagem a seguir.

Uma maneira eficaz de garantir que os alunos compreendam que as frações são números com magnitudes é a utilização de retas numéricas durante a aula. Todas as frações podem ser representadas nas retas numéricas e estas ilustram que cada fração corresponde a uma determinada magnitude. (Fazio; Siegler, 2011, p.10)

Fazio e Siegler (2011) acreditam, portanto, no auxílio que o estudo dos números racionais na reta numérica pode trazer na compreensão de questões como a comparação e equivalência de frações.

O texto da BNCC, sobre os anos finais do ensino fundamental, afirma que:

Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, **com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica** (BRASIL, 2017, p. 225, grifo nosso).

Verifica-se, portanto, a importância de se tratar desse significado no que se refere à aprendizagem dos números racionais.

Pinto (2011) apresenta o modelo presente na Fig. 12 para caracterizar o sentido do número racional, contemplando a diversidade e complexidade envolvidas com esse conceito. Portanto, verifica-se que o reconhecimento dos diferentes significados de fração é um ponto importante para a apreensão do sentido de número racional.

<b>SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Capacidades a desenvolver</b>
<i>Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto</i>	→ Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
<i>Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto</i>	→ Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua) → Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
<i>Familiaridade com diferentes representações de número racional</i>	→ Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto)
	→ Reconhece frações equivalentes
<i>Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais</i>	→ Representar números racionais na recta numérica → Comparar e ordena números racionais → Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais
<i>Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais</i>	→ Relacionar os símbolos com acções e conhecimentos informais. → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

Figura 12 – O sentido do número racional

Fonte: Pinto (2011, p. 112-113).

Ao longo do presente capítulo, foram enumeradas diferentes variações no que concerne ao significado do conceito de número racional. A exposição dessas diversas acepções ajudam na compreensão das dificuldades relacionadas ao estudo desse tópico. No próximo capítulo são relatados problemas advindos da complexidade desse conceito, principalmente no que se refere à falta de entendimento dos próprios professores.



---

## Dificuldades com números racionais

No capítulo precedente apresentou-se os vários significados ligados à representação fracionária dos números racionais. Esse é um dos fatores relacionados aos problemas dos alunos com esse conceito. No presente capítulo aborda-se outros fatores relacionados a essas dificuldades.

Segundo Guerreiro e Serrazina (2017, p.181), a pesquisa sobre a aprendizagem dos números racionais indica que os alunos não compreendem facilmente a rede de conceitos que envolve o estudo desses números. Então, do ponto de vista do desenvolvimento curricular, tal fato torna esse tópico desafiador.

De acordo com as autoras, para que aconteça uma verdadeira aprendizagem da matemática é preciso que haja assimilação conceitual. Essa assimilação conceitual está intimamente ligada com o sentido de número uma vez que este se refere ao entendimento geral a respeito dos números e das operações, igualmente à habilidade e inclinação para empregar esse entendimento de maneira flexível na elaboração de raciocínios matemáticos e de estratégias.

Existe uma mudança conceitual agregada ao estudo dos números racionais e é preciso lembrar que pode ocorrer um condicionamento dessa aprendizagem pelos conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos, tanto no sentido de limitar como de ajudar essa mudança. Uma parte da dificuldade em se trabalhar com esse conjunto numérico deve-se à variedade de sentidos (ou significados) que os números racionais podem estabelecer ou constituir em cada contexto tal como parte-todo, operador, quociente, medida e razão, fator esse exposto no capítulo precedente.

Algumas pesquisas têm revelado dificuldades relativas à aprendizagem das frações. Por exemplo, Nunes e Bryant (1997) assinalam uma grande inclinação por parte dos professores no intuito de trabalhar o conceito de número racional, em sua representação fracionária, empregando preferencialmente o sentido parte-todo.

Canova (2006) afirma que existe um vínculo inseparável dos conceitos dos professores com a própria aprendizagem e a sua interferência sobre o ensino e aprendizagem dos alunos. Da mesma forma que os alunos, os professores demonstram uma taxa superior de êxito em problemas que compreendem o significado parte-todo, e apresentam maior dificuldade nos que

compreendem o significado localização na reta real.

Damico (2007), em sua pesquisa sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino do conjunto dos racionais em duas universidades do ABC paulista, verificou a existência de uma grande desproporção entre a compreensão conceitual e processual. Notou-se que a apreensão processual prevalece e também a existência de um entendimento pedagógico abaixo do esperado relativo às formas de representação dos números racionais, que são regularmente ministrados no Ensino Fundamental.

Diversas pesquisas internacionais também têm como objeto de discussão a construção do conceito de número racional pelos alunos. Behr et al. (1992) cita a existência de uma unanimidade entre os pesquisadores de que em questões de ensino e aprendizagem, um obstáculo difícil a ser ultrapassado é a aprendizagem dos conceitos de números racionais.

De acordo com Silva (2007), de modo geral a escola inicia o trabalho com frações no 2º ciclo do ensino fundamental, retomando frequentemente nas duas séries seguintes, e depois eventualmente em todos os anos do ensino fundamental e médio. Apesar disso, pesquisas desenvolvidas no Brasil apontam que os alunos possuem um domínio insuficiente desse conceito. O que é comprovado por avaliações externas, como as realizadas desde 1990 pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), onde se constata que o Brasil não tem progredido muito nessa questão.

Segundo Fazio e Siegler (2011), o contato com os números racionais mostra aos alunos que as propriedades que eles consideravam válidas para todos os números não são verdadeiras para esse conjunto. Por exemplo, a multiplicação de racionais nem sempre leva a um número maior que as parcelas utilizadas, assim como a divisão de dois racionais nem sempre tem como resultado um número menor que o dividendo. Soma-se a isso o fato de que é difícil para o aluno entender que existe um número infinito de frações entre duas frações.

Moreira (2004) cita ainda dificuldades com a representação decimal dos racionais. Alguns alunos tendem a avaliar um número decimal como dois naturais separados por uma vírgula. Devido a essa interpretação, eles consideram o número 4,90 maior que o números 4,9, ou o número 0,8 menor que o número 0,75. Essa visão do decimal acarreta ainda o problema de entender que entre 10,849 e 10,850 há algum número.

### 3.1 Os números racionais e as frações

Segundo Lamon (2007), os alunos, em experiências diárias, são confrontados com a palavra "fração" no sentido de "qualquer pedaço pequeno". Quando chegam à sala de aula, no entanto, ao se depararem com a fração  $\frac{4}{3}$ , por exemplo, que se refere a mais de uma unidade, a interpretação "um pedaço pequeno" não se aplica.

De acordo com a autora, os múltiplos usos da palavra são um problema. Algumas pessoas utilizam a palavra "fração" se remetendo somente à interpretação "parte-todo". Além disso,

muitas vezes as palavras "fração" e "número racional" são aplicadas de forma indistinta.

Lamon (2007) afirma que esses termos não são sinônimos, sendo que as frações, que são os números da forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros não negativos, com  $b \neq 0$ , formam um subconjunto dos racionais. Ela destaca a importância de que os alunos entendam que todos os números racionais podem ser escritos na forma de fração, mas que nem todos os números escritos em forma de fração são números racionais. Como exemplo, o número  $\frac{\pi}{2}$ , que é um número irracional escrito na forma de fração. Além disso, outro fato relevante é que um número racional pode ser representado por mais de uma fração.

## 3.2 Dificuldades dos professores

Nesta seção cita-se algumas pesquisas, realizadas com professores e com licenciandos, que comprovam que o conhecimento do professor sobre o conceito de número racional deve ser um assunto a ser investigado com atenção. Isso porque se o professor não tem um conhecimento construído sobre o conceito a ser ensinado, essa lacuna será passada a seus alunos. Dessa forma, o ciclo de concepções equivocadas não é interrompido.

É comum que o assunto números racionais seja subestimado ao longo dos cursos de Licenciatura, apesar de ser um tópico que abrange relações muito intrincadas. Conforme afirma Moreira (2004), em sua tese de doutorado:

Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser, também, submetida a fortes questionamentos. Ao longo de todo o processo de formação na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da matemática escolar (MOREIRA, 2004, p. 94)

Segundo Moreira (2004), os sistemas numéricos não são abordados de forma suficiente e adequada nos cursos de Licenciatura visto que, muitas vezes, não são consideradas as concepções que os licenciandos trazem de seu ensino prévio. Além disso, não são discutidos os problemas que os alunos têm, na escola básica, sobre a aquisição desses conceitos.

Moreira (2004) apresenta também uma pesquisa realizada com alunos do curso de licenciatura em matemática da UFMG, sendo 44 deles matriculados em disciplinas do primeiro período e 25 matriculados em disciplinas do último período. Foi aplicado um questionário com cinco perguntas, sendo que a segunda pergunta era a seguinte:

Imagine a seguinte situação. Depois de algumas aulas sobre as operações com os números racionais numa sala de quinta série do ensino fundamental, um aluno faz a seguinte pergunta: professor, por que para somar frações a gente tem que reduzir ao mesmo denominador e somar os numeradores (mantendo o denominador), mas, para multiplicar, a gente pode simplesmente multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador? Que resposta você lhe daria? (MOREIRA, 2004, p. 141).

Entre os alunos iniciantes, nenhum apresentou resposta satisfatória para a questão. Analisando entre os formandos, apenas quatro forneceram explicações para as duas operações. O autor afirma que, considerando o caso da adição de frações:

No caso da soma, a extensão do significado da operação (dos naturais para os racionais positivos) é clara o suficiente para que a discussão se restrinja a uma explicação do por que se deve reduzir ao mesmo denominador. Assim, a questão que está posta no caso da soma  $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$  é, essencialmente, a escolha de uma "sub-unidade" (por exemplo,  $\frac{1}{bd}$ ) em termos da qual se possa expressar com um número inteiro ( $ad + bc$ ) aquilo que representa a "junção" das duas partes  $\left(\frac{a}{b} e \frac{c}{d}\right)$  de algo considerado como o "todo" (MOREIRA, 2004, p. 147-148).

Quando considera-se a multiplicação, o caso envolve complicações maiores. A multiplicação de frações não pode ser vista de maneira tão clara como uma extensão da multiplicação de naturais, ou seja, como a soma de parcelas iguais.

Um dos alunos deu a seguinte explicação para a multiplicação de frações:

Já na multiplicação não é necessário [reduzir ao mesmo denominador, esclarecimento nosso] uma vez que estamos apenas multiplicando aquela quantidade por um número, ou seja, quanto é  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{4}$  de pizza, então eu quero saber quantas vezes  $\frac{1}{4}$  de pizza cabem em  $\frac{2}{3}$ , por isso pode-se multiplicar numerador e denominador (estudante do último período) (MOREIRA, 2004, p. 150).

O autor pontua que essa exposição do aluno, que apresentou uma confusão sobre a multiplicação de racionais, vai de encontro aos resultados alcançados por Ma (1999). Nessa pesquisa a autora, que entrevistou professores das séries iniciais dos Estados Unidos e da China, mostrou que dez, dentre 23 professores americanos, confundiram a divisão por  $\frac{1}{2}$  com a divisão por 2. Seis deles confundiram ainda a multiplicação por  $\frac{1}{2}$  com a divisão por  $\frac{1}{2}$ .

Os 12 formandos que deram como resposta, por exemplo, a ideia de que  $\frac{2}{3} \times \frac{a}{b}$  representa calcular quanto vale duas terças partes de  $\frac{a}{b}$ , foram novamente entrevistados. Segundo esses alunos, suas experiências na escola colocaram o produto dos racionais como uma regra, sem mais informações adicionais.

Com base nessa informação, Moreira (2004) consultou seis livros didáticos utilizados como referência na então quinta série do ensino fundamental. Segundo o autor, nenhum dos livros apresentava uma discussão satisfatória sobre o assunto. De fato, a questão da multiplicação dos números racionais se resume a uma tradução de que a expressão  $x$  partes de  $y$  significa, em linguagem matemática,  $x \times y$ .

O autor sugere que, para que a multiplicação de racionais tenha significado para o aluno, é importante que haja o uso das diferentes interpretações desses números (vistas no capítulo anterior). Por meio desses subconstrutos, podem surgir comparações com as operações com números naturais, conjunto esse mais familiar aos alunos.

O trabalho de Campos, Magina e Nunes (2006) apresenta uma entrevista com 70 professores, não especialistas em matemática, atuantes nos dois primeiros ciclos do ensino fundamental no estado de São Paulo. As autoras concluíram que a maior parte dos professores apresenta problemas conceituais referentes a frações. Além disso, esses professores apresentaram estratégias limitadas para o ensino do conceito.

Na mesma pesquisa, os professores entrevistados afirmaram que o ensino de frações impróprias e de multiplicação e divisão de frações, por exemplo, são difíceis de serem ensinados visto que não fazem parte do cotidiano do aluno. De acordo com as autoras, os professores não entendem que todos esses conceitos podem ter significado para o aluno.

Na verdade, o que as autoras inferem é que essa afirmação por parte desses professores está ligada ao fato de que os mesmos não possuem a compreensão sobre o assunto a ser ensinado. Considerando-se que o primeiro contato com os racionais em sala de aula se dá justamente nesse período, não é de se admirar que os alunos também apresentem dificuldades ao longo de seu estudo. Ressalta-se, assim, a importância de uma boa formação dos professores que lecionam nos primeiros anos do ensino fundamental.

Cardoso e Mamede (2015) conduziram uma pesquisa com 30 professores do 1º ciclo de escolas públicas no distrito de Braga, em Portugal. Na Fig. 13 apresenta-se exemplos de questões que foram respondidas por esses professores.

Na questão sobre o conceito de fração, somente 10% dos professores responderam que uma fração representa a divisão entre dois números inteiros, sendo que o denominador deve ser diferente de zero. Aproximadamente 63% disseram que uma fração representa uma divisão e para os demais a fração está relacionada a uma parte de um todo.

Sobre a questão de quantos racionais existem entre 0 e 1:

[...] cerca de 37% dos professores respondeu corretamente à questão; 10% dos professores afirmou que não existe nenhuma fração entre 0 e 1 "porque é impossível dividir o zero"; cerca de 47% dos afirmou que "existe um número finito de frações entre 0 e 1"; 10% afirmou que "existe apenas a fração  $\frac{1}{1}$ " e 3.3% acredita que "existe apenas uma fração:  $\frac{1}{0}$ "; 10% dos professores afirmaram que existem dez frações (dois professores apresentaram as frações " $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ , ...,  $\frac{1}{10}$ " e um professor apresentou as frações " $\frac{0}{1}$ ,  $\frac{0}{2}$ , ...,  $\frac{0}{10}$ "). Quatro professores afirmaram que existem 9 frações, 2 dos professores consideraram que essas frações são " $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ...,  $\frac{1}{10}$ " e outros 2 professores consideraram que essas frações são "0.1, 0.2, ..., 0.9"; 6.7% dos professores disseram não saber responder à questão (CARDOSO; MAMEDE, 2015, p. 230-231)

Somente 20% dos professores disseram ser falsa a afirmação de que entre 0 e 1 existem 8 frações unitárias e 67% deles acreditam que todo número decimal pode ser escrito em forma de fração. Com relação às representações dos significados de fração, 93% dos professores acertaram a questão sobre parte-todo, mostrando que, de fato, essa é a acepção de fração que os professores mais dominam.







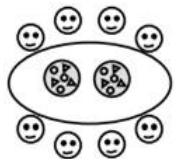
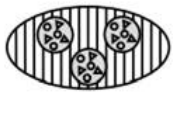
	Questões
	Como definiria o conceito de fração?
	Quantas frações existem entre 0 e 1?
Fração – conceito de propriedades	<p>Verdadeiro ou Falso?</p> <p>a) Numa fração o numerador é sempre 1.                      b) Entre 0 e 1 existem 8 frações unitárias.                      c) Todo o número decimal pode ser escrito como uma fração.                      d) Numa fração o numerador é sempre menor do que o denominador.</p>
	Que figura(s) pode(m) representar a fração $\frac{2}{3}$ ?
	<p>a)  b)  c)  d) Outra</p>
	Que figura(s) pode(m) representar a fração $\frac{2}{3}$ ?
	<p>a)  b) </p> <p>c)  d) Outra: _____</p>
Significados de fração	<p>Um grupo de amigos foi a uma pizzeria e distribui-se por 2 mesas. Todos os amigos comeram a mesma quantidade de piza. Quantos amigos comeram na mesa da toalha de riscas?</p> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; gap: 20px;">   </div>

Figura 13 – Exemplos de questões aplicadas aos professores

Fonte: Cardoso e Mamede (2015, p. 230).

Apesar dos resultados satisfatórios ao se considerar a representação das frações, tal fato não foi retratado quando o significado apareceu em problemas. Ou seja, o conhecimento da representação parte-todo não é traduzido em um domínio sobre o conceito em questão. As autoras concluem, diante dos resultados da pesquisa, que:

Face às dificuldades manifestadas pelos professores relativamente ao conceito de fração e às exigências das alterações recentes ao currículo para o 1.º ciclo, afigura-se premente a promoção de formação que vise colmatar estas dificuldades. Tal deverá não só debruçar-se sobre as fragilidades no conhecimento matemático dos professores, mas também atender às necessidades dos professores relativamente às estratégias educativas que reflitam as orientações curriculares em vigor. Caso contrário, pode desde já antever-se uma continuidade de práticas de ensino que não são reflexo do que é preconizado no currículo, dado não haver por parte dos professores conhecimento matemático nem didático suficientemente sólidos para ensinar frações corretamente aos alunos do 1º ciclo do ensino básico (CARDOSO; MAMEDE, 2015, p. 233).

Logo, verificou-se ao longo desse capítulo que há inúmeros trabalhos que versam sobre as lacunas conceituais que os professores possuem frente ao conceito de números racionais. O problema se torna mais sério quando avalia-se como esse conceito pode afetar o progresso dos alunos no desenvolvimento do pensamento matemático. Esse é o assunto a ser tratado no próximo capítulo.

---

# Números racionais e a introdução à álgebra

No capítulo precedente foram expostas algumas dificuldades relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem de racionais. No presente capítulo procura-se relacionar esses problemas ao aprendizado da álgebra.

Para essa exposição, foram utilizados trabalhos do professor Wu, professor Emérito na Universidade da Califórnia, em Berkeley, que possui muitos trabalhos relacionados ao ensino de frações e também ao ensino da álgebra. No Brasil não há muitas pesquisas que dissertem sobre o assunto. Porém, encontra-se o trabalho de Sant'Anna, que realizou sua tese baseada em Wu, apresentada na última seção deste capítulo.

## 4.1 Estudos sobre a relação entre frações e álgebra

Alguns autores realizaram trabalhos sobre a relação entre frações e álgebra. Siegler et al (2012) analisaram pesquisas realizadas no Reino Unido e nos Estados Unidos. Os testes foram aplicados a estudantes com idade entre 10 a 12 anos e, posteriormente, de 15 a 17 anos. Eles concluíram que existe uma forte correlação entre o conhecimento sobre frações e o conhecimento algébrico. Os resultados também sugeriram que uma melhora no ensino de frações acarreta melhoras substanciais no entendimento de matemática avançada.

A não compreensão de conceitos relacionados à divisão também foi notado. Uma questão aplicada aos alunos entre 15 a 17 anos foi a seguinte: um garoto quer viajar em um avião que percorre um trajeto a 400 milhas por hora, com o intuito de visitar sua avó, que vive a 1400 milhas. Somente 56% dos estudantes indicaram corretamente o tempo de voo. Os autores afirmam que um entendimento pobre sobre magnitude de uma fração pode levar os estudantes a desistirem da apreensão do sentido dos objetos matemáticos, acarretando em alunos que baseiam seus estudos em memorização.

Além disso, um dos fatores apontados é o entendimento limitado dos professores sobre



os conceitos envolvidos com fração e divisão, fato esse já comentado no capítulo precedente. Os autores citam que há diversos estudos que apontam que a maioria dos professores de escolas elementares dos Estados Unidos não são capazes de explicar o porquê do algoritmo "inverta e multiplique" ser o procedimento aplicado na divisão de frações .

Foi possível inferir, a partir do trabalho anteriormente citado, que os conhecimentos em frações adquiridos pelos alunos aos 10 anos foram fatores que influenciaram a apreensão dos conceitos algébricos, obtidos aos 16 anos. Segundo afirma DeWolf, Bassok e Holyoak (2015), apesar dessa pesquisa mostrar uma ligação entre o entendimento do conceito de frações e a performance em álgebra, essa relação ainda deve ser mais fortemente estabelecida, pois está sendo estudada há pouco tempo.

Booth, Newton e Twiss-Garrity (2013), também citando a pesquisa de Siegler et al (2012), afirmam que as ligações precisas entre frações e álgebra ainda são desconhecidas. Uma delas se refere ao fato de que as frações são utilizadas na resolução de várias equações. No entanto, as autoras afirmam que esse argumento não pode fornecer um entendimento completo sobre as conexões existentes.

As autoras afirmam ainda que um importante fator a ser considerado é o de magnitude. O entendimento sobre os tamanhos relativos dos números é importante no ensino e no aprendizado da aritmética e também na matemática em geral. A noção de magnitude desempenha um importante papel no conceito de frações equivalentes e proporcionalidade e, dessa forma, no ensino de álgebra. As autoras, para ilustrar tal fato, citam o seguinte exemplo: "Todas as representações fracionárias de  $\frac{1}{3}$  irão se encaixar na equação  $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ , que é equivalente à equação  $y = 3x$ " (Booth; Newton; Twiss-Garrity, 2013, p. 111).

DeWolf, Bassok e Holyoak (2015), baseados no trabalho citado no parágrafo anterior, realizaram uma pesquisa com 65 alunos de duas escolas norte-americanas, procurando verificar como o conceito de frações e de decimais podem influenciar a performance em álgebra. Em uma das tarefas realizadas pelos alunos, eles deveriam identificar com uma marca o lugar onde são localizadas certas frações e decimais em uma reta numérica. Além disso, havia exercícios envolvendo equivalência de frações e questões de multiplicação e divisão.

Algumas questões de álgebra envolviam a resolução de equações e outras avaliavam também o entendimento de propriedades de equações algébricas. Como, por exemplo, verificar se o aluno considera que  $4x - 3$  é equivalente a  $3 - 4x$ . Os autores concluíram que o entendimento do posicionamento de decimais na reta e das relações entre frações (o conhecimento de frações equivalentes e questões envolvendo divisão entre frações, por exemplo) são fatores relacionados à performance em álgebra.

Como conclusão, os autores sugerem que os educadores devem esclarecer a importância de se utilizar a reta numérica para que os alunos compreendam as relações entre as magnitudes. Além disso, os pesquisadores ratificam também a relevância da representação dos decimais na reta. A partir desses fatos, os professores podem focar nas conexões entre frações e expressões algébricas, traçando paralelos entre os assuntos.

## 4.2 A fração na reta numérica e sua relação com a álgebra

Segundo Behr e Post (1992), é nos últimos anos do primeiro ciclo do ensino fundamental que o conceito de racional começa a receber um tratamento sistemático e substancial. Além disso, quando esse conceito é expandido, ele começa a ser aplicado na álgebra elementar. Por isso, muitas dificuldades em álgebra podem estar relacionadas ao entendimento incompleto de racionais.

Os problemas referentes à passagem da álgebra para a aritmética são estudados por Wu. Segundo Wu (2001), não importa como o pensamento algébrico é introduzido, os problemas de aprendizado irão continuar a menos que o ensino de frações e decimais seja modificado. Se o estudo de frações for feito de maneira satisfatória então a passagem para a álgebra será feita de maneira mais suave.

A álgebra é tida como uma generalização da aritmética. Essa generalidade referente à álgebra vai além dos cálculos com números, envolvendo propriedades comuns a um certo conjunto de números. Um ponto importante levantado por Wu (2001) é a manipulação simbólica, que serve para expressar a generalidade e abstração algébricas.

Os estudantes precisam ver a álgebra introdutória como uma extensão natural de tudo que eles aprenderam sobre números racionais. Em outras palavras, álgebra introdutória é uma aritmética generalizada. Essa é a razão pela qual precisamos ensinar melhor números racionais. [...] Atualmente, existe um esforço em colocar "pensamento algébrico" em todas as séries. Se eu entendo esse termo corretamente, isso significa procurar padrões e trabalhar com manipulações e tecnologia. A intenção é louvável, mas esse tipo de pensamento algébrico não é suficiente para promover o entendimento de álgebra de uma perspectiva matemática; ele deve ir além, em uma direção de fazer o uso dos símbolos e cálculos com eles se for natural fazê-los. Eu sugiro, por exemplo, que da próxima vez que você vá ensinar as séries iniciais, em vez de escrever  $15 + \underline{\quad} = 22$ , tente, no lugar, "encontre um número  $x$  tal que  $15 + x = 22$ ". Quando ensinar a adição de frações, diga aos estudantes que a fórmula  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$  é válida para todas as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , e que essa é uma identidade em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são inteiros ( $bd \neq 0$ ). Esse é o tipo de pensamento algébrico que os estudantes precisam (WU, 2005, p.3, tradução nossa).

Retomando a fórmula da adição, o professor pode utilizar diferentes números e mostrar então que a fórmula é verdadeira para eles. Posteriormente, a demonstração da adição de frações pode vir a ser realizada, para números quaisquer dados. Na situação proposta por Wu (2001), o aluno vai construindo a abstração a partir de casos concretos, tendo ainda contato com cálculos envolvendo outros símbolos, que não os números.

Dessa forma, a notação simbólica e o conceito de generalidade são introduzidos naturalmente, pois a igualdade é válida para todas as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ . Um outro exemplo se refere à afirmação:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se, e somente se,  $ad = bc$ , para quaisquer frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ . Com essa explicação, os alunos podem entender o significado da expressão "se, e somente se", além de aprenderem a

utilizar os símbolos de forma geral, entendendo também que duas frações serem iguais significa que representam o mesmo ponto na reta numérica.

Wu (2008) afirma, no entanto, que os livros didáticos minimizam o nível de abstração inerente ao conceito, sendo que o ensino de frações acaba se apoiando em analogias, metáforas e materiais manipulativos. Como exemplo o autor cita que se uma fração positiva é um pedaço de pizza, ficará difícil para o aluno entender como dividir um pedaço de pizza por outro, relacionando tal ação ao processo de "inverta e multiplique". Caso o aluno não compreenda como a operação é realizada, lhe é dito que há uma falta de apreensão conceitual, que os professores tentam atenuar com mais analogias.

Segundo Wu (2001), o aspecto computacional dos números é essencial para a aprendizagem da matemática. De acordo com o autor, o ensino de frações poderia ser realizado com o auxílio da reta numérica. Dessa forma, o nível de abstração iria lentamente aumentando até que o aluno compreendesse conceitos como divisão e multiplicação de frações.

Outra razão relevante ao se analisar o papel das frações no ensino de álgebra é sua aplicação no estudo de funções lineares. A inclinação de um gráfico que representa uma função linear é definida por uma fração. Além disso, a solução de um sistema de equações lineares fatalmente faz uso do mesmo conceito. Assim, o uso de frações em álgebra é inevitável.

Ou seja, além de envolver a questão da abstração e da generalidade, a solução de equações envolve a habilidade de resolver cálculos com frações. Por exemplo, considere a equação

$$\frac{1}{5}x + 7 = \frac{1}{3}x - 4.$$

Assume-se que exista alguma número  $x$  que satisfaça a equação e, assim, resolve-se a equação como qualquer outra expressão aritmética. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x + 7 = \frac{1}{3}x - 4 &\rightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 7 = -4 \rightarrow \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x = -11 \rightarrow \\ -\frac{2}{15}x = -11 &\rightarrow x = \left(-\frac{15}{2}\right) \times (-11) \rightarrow x = \frac{165}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, se um aluno não consegue realizar cálculos com frações, dificilmente terá sucesso em álgebra.

O conhecimento matemático, ao envolver conceitos abstratos, deve ser acompanhado por definições precisas. Para Wu (2008), tal fato deve guiar a prática dos professores, visto que o ensino fracassado de frações é eloquente o suficiente para ratificar tal afirmação.

Wu (2009) volta a afirmar que a primeira incursão do aluno em direção à abstração se dá na aprendizagem dos racionais. No entanto, o que ocorre é que tal fato é na maior parte das vezes ignorado, como se não houvesse nenhuma abstração envolvida com esse conceito.

Se os dedos podem servir como referência natural para os números inteiros não negativos, então a reta numérica pode ser utilizada como referência para as frações. O número racional

é, portanto, definido como um ponto na reta numérica, sem ambiguidades, e tal fato é verdadeiro para qualquer número. Essa definição vem de encontro à história dos números racionais, relacionados a medições, como visto no capítulo 1.

Para definir o que vem a ser uma fração, Wu (2009) toma um segmento de reta, de 0 a 1, dividido em 3 segmentos de igual tamanho (Fig. 14) e que tal processo deve ser realizado para todos os segmentos entre dois números inteiros não negativos consecutivos. O primeiro ponto de divisão do primeiro segmento é chamado de  $\frac{1}{3}$  e os demais pontos subsequentes são  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$ , e assim sucessivamente.

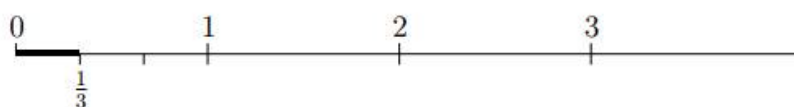


Figura 14 – Representação do número  $\frac{1}{3}$  na reta numérica.

Fonte: Wu (2014, p. 5).

A mesma ideia pode ser utilizada para um  $n$  inteiro positivo não nulo qualquer. Se são tomados os simétricos, em relação à 0, na reta numérica, tem-se as frações negativas da forma  $-\frac{m}{n}$ . Com essa explicação, é mais fácil o entendimento sobre frações equivalentes, que pode ser enunciado da seguinte forma: para quaisquer inteiros não negativos  $m, n, k$ , onde  $n$  e  $k$  são não nulos, tem-se a igualdade  $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$ . Portanto,  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{km}{kn}$  representam o mesmo ponto na reta numérica.

Como exemplo, Wu (2009) coloca  $m = 4, n = 3$  e  $k = 5$ , ilustrado na Fig. 15.

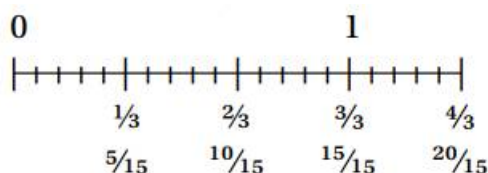


Figura 15 – Igualdade entre frações equivalentes.

Fonte: Wu (2009, p. 8).

As frações equivalentes podem ser utilizadas para explicar a adição de frações. Por exemplo, ao somar as frações  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{6}$ , podemos reescrevê-las como  $\frac{6}{24}$  e  $\frac{4}{24}$ . O segmento cujo comprimento é  $\frac{1}{4}$  é a junção de 6 segmentos de comprimento  $\frac{1}{24}$  e o segmento de comprimento  $\frac{1}{6}$  é a junção de 4 segmentos de comprimento  $\frac{1}{24}$ . Logo, a adição de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{6}$  consiste em somarmos  $6 + 4$  segmentos de tamanho  $\frac{1}{24}$ , cujo resultado é, então,  $\frac{10}{24}$ .

O mesmo processo pode ser aplicado aos números inteiros. Dessa forma, os alunos podem visualizar as frações como uma extensão dos números inteiros não negativos. Na preparação dos estudantes para uma matemática mais abstrata, que possibilite aos alunos responderem questões

como "por que  $\frac{5}{4} \div \frac{9}{4}$  é igual a  $\frac{5}{6} \times \frac{4}{9}$ , a definição de divisão de frações deve ser feita. Ou seja, eles devem ser capazes de responder o porquê do processo de "inverte e multiplique".

Na divisão de números inteiros, sendo  $m$ ,  $n$  e  $q$  números quaisquer, com  $n$  não nulo, segue que  $\frac{m}{n} = q$  se, e somente se,  $m = q \times n$ . Assumindo que a definição de multiplicação de fração já é conhecida, a definição de divisão de frações segue o mesmo caminho, sendo definida como: sendo  $M$  e  $N$  frações quaisquer, onde  $N$  é não nula, a divisão de  $M$  por  $N$ , denotada por  $\frac{M}{N}$ , é a fração  $Q$  de maneira que  $M = Q \times N$ .

No caso da divisão  $\frac{5}{6} \div \frac{9}{4}$ , por definição, o resultado deve ser um número  $Q$  tal que  $\frac{5}{6} = Q \times \frac{9}{4}$ . Usando as frações equivalentes e multiplicando ambos os lados da equação por  $\frac{4}{9}$ , obtém-se:

$$\frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{9}\right) = Q \times \frac{9}{4} \times \left(\frac{4}{9}\right) \Rightarrow \frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{9}\right) = Q \times \frac{9 \times 4}{4 \times 9} \Rightarrow \frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{9}\right) = Q \times 1 \Rightarrow \frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{9}\right) = Q.$$

Logo,  $\frac{5}{6} \div \frac{9}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{9}$  e, portanto, a regra do "inverte e multiplique" pode ser comprovada nesse caso particular. Tal verificação pode ser feita também para o caso geral e, dessa forma, mostra-se que a regra está sempre correta. Wu (2009) alerta para o fato de que o professor deve ter o conhecimento de que sempre é possível que essa divisão seja realizada, ou seja, sempre é possível dividir uma fração  $M$  qualquer por uma fração não nula  $N$ .

Daí vem a importância da matemática dita elementar. Por isso, os alunos devem ser pouco a pouco introduzidos a definições coerentes e precisas, de maneira a garantir a apreensão, por exemplo, da álgebra.

### 4.3 Resultados no Brasil

Na seção 4.1 foram relacionadas pesquisas que confirmam a relação entre a compreensão de números racionais (principalmente em sua representação fracionária) e a introdução à álgebra. No Brasil, as pesquisas que dissertam sobre essa ligação são da autora Sant'Anna, que tem como base os trabalhos de Wu, citado na seção anterior.

Em sua pesquisa, Sant'Anna (2008) implementou o ensino de frações partindo da representação do número na reta numérica. Essa pesquisa foi aplicada no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, para turmas de sétimo e oitavo anos, nos anos de 2006 e 2007.

Verificou-se que os estudantes apresentavam dificuldades ao reconhecerem frações como números. Todavia, após a definição do conceito, eles conseguiram alcançar resultados melhores. A autora procurou verificar se o desempenho dos alunos no campo algébrico seria favorecido por essa abordagem.

Nos testes aplicados em 2007, 28 alunos haviam sido avaliados em 2006 e 10 eram alunos novos. Ao final do ano de 2007, 50% dos alunos do primeiro grupo foram aprovados por

média (obtiveram média igual ou superior a 7) e apenas 1 aluno do segundo grupo foi aprovado. Algumas questões aplicadas na prova aplicada no terceiro semestre estão na Fig. 16.

Questão 1 (1,0p.)  
 a) Resolva o sistema abaixo:  

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$
  
 b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:  
 Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

Figura 16 – Questão da prova do terceiro trimestre.

Fonte: Sant’Anna (2008, p. 192).

Na Fig. 17, há a resposta de uma aluna que, em 2006, não conseguiu obter média para aprovação direta mas, em 2007, mostrou uma melhora em seu desempenho, conseguindo aprovação.

Questão 1 - (1,0p.)  
 a) Resolva o sistema abaixo:  

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} x + 3y = 5 & (2) \\ 2x - y = -4 & (-1) \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} 7y = 14 \\ y = 2 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} x + 3(2) = 5 \\ x + 6 = 5 \\ x = 5 - 6 \\ x = -1 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} 2x - 2 = -4 \\ 2x = -4 + 2 \\ 2x = -2 \\ x = \frac{-2}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} -2 - z = -4 \\ -1 = 5 - 6 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} R: y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$
  
 b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:  
 Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?  

$$\begin{cases} y + x = 33 & (2) \\ 2y - x = 12 & (-1) \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} y + x = 33 \\ -2y + x = -12 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} y + x = 33 \\ -2y + x = -12 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} 3x = 54 \\ x = \frac{54}{3} \\ x = 18 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} y + 18 = 33 \\ y = 33 - 18 \\ y = 15 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} 18 + 15 = 33 \\ 30 - 18 = 12 \end{cases}$$
  

$$\begin{matrix} 2007 & 2006 & 06 & 05 & 23 \\ -12 & 20 & 12 & -7 & -12 \\ \hline & & & 26 & 21 \end{matrix}$$
  

$$R: \begin{cases} x = 18 \text{ (Meninos)} \\ y = 15 \text{ (Meninas)} \end{cases}$$

Figura 17 – Questão da prova do 3º trimestre resolvida.

Fonte: Sant’Anna (2008, p. 194).

Os resultados da pesquisa mostraram que o uso da reta numérica para representação da fração torna mais fácil identificar a unidade de referência. Além disso, os alunos novos apresentaram mais dificuldades em lidar com conceitos como o de frações equivalentes, por exemplo. Os dados obtidos mostram também que os alunos, de maneira geral, tiveram aproveitamento em álgebra superior aos que comumente são observados por outras turmas.

Dessa forma, a autora afirma que o conceito de fração, visto como medida de comprimento em uma reta, é um facilitador na passagem dos números inteiros para os racionais, o que permite que se trabalhe o princípio de generalidade. Então, a capacidade de abstração vai sendo desenvolvida pelo aluno o que acarreta, posteriormente, uma facilidade na passagem da aritmética para a álgebra.

De acordo com Sant'Anna (2008), o ensino de frações, como abordado nos trabalhos de Wu, é uma importante ferramenta a ser utilizada na familiarização do aluno com a representação simbólica. Ao inserir alguma letra em um exercício trabalhado dentro do campo aritmético, por exemplo, essa introdução à álgebra é feita de maneira sutil, sem que ocorra um salto repentino.

Verifica-se, portanto, que de fato a proposta de Wu pode ser uma boa opção para melhorar o ensino de frações e, conseqüentemente, a aprendizagem da álgebra. É claro que, conforme explicitado ao longo do capítulo, esse campo de pesquisas ainda está em aberto e não são conhecidas todas as relações entre o ensino de frações e a introdução à álgebra.

Assim, não há como propor uma solução única para o assunto em questão, pois ainda há muitas perguntas a serem respondidas. Mas o ensino de frações utilizando suas origens históricas, como medidas de segmentos de reta, pode ser uma forma de auxiliar os alunos no processo de abstração, tão necessário à álgebra.

---

## Considerações Finais

A motivação para esta pesquisa surgiu durante o estágio curricular, devido à constatação das dificuldades apresentadas pelos alunos com os números racionais. No estudo sobre a história dos números racionais, verificou-se que o desenvolvimento desse conceito passou por um longo processo, levando séculos para se chegar ao que hoje é ensinado. O conhecimento dessa história pode ser um importante aliado para que os problemas de aprendizagem sejam minimizados.

Devido ao fato de a representação fracionária de um número racional possuir vários sentidos ou significados, de acordo com o contexto trabalhado, tais como parte-todo, quociente e localização na reta numérica, esse conceito se torna de difícil entendimento para muitos estudantes. A falta de compreensão dos professores é outro fator crucial, visto que existe um vínculo inseparável dos conceitos deles e de seus alunos. Por isso, acredita-se que é necessário que haja uma melhora na formação inicial dos professores em relação ao ensino desse conjunto numérico.

Para que aconteça uma verdadeira aprendizagem da matemática, é preciso que haja assimilação conceitual. Essa assimilação conceitual está intimamente ligada com o sentido de número uma vez que esse se refere ao entendimento geral a respeito dos números e das operações, igualmente à habilidade e inclinação para empregar esse entendimento de maneira flexível na elaboração de raciocínios e estratégias matemáticas.

Existe uma mudança na passagem do estudo dos inteiros para os racionais, e é preciso lembrar que pode ocorrer um condicionamento dessa aprendizagem pelos conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos. Isso ocorre tanto no sentido de limitar como no de ajudar nessa passagem.

Os professores podem ajudar nesse processo desde as primeiras séries, levando os alunos a reconhecerem que as frações são números e que eles expandem o sistema numérico além dos inteiros. A utilização da reta numérica como ferramenta de representação central no ensino de racionais, conforme trabalhado por Wu, pode melhorar a compreensão dos alunos sobre, por exemplo, frações equivalentes e frações negativas.

Por meio do presente trabalho, foi possível verificar que existe uma forte relação entre o



conhecimento dos números racionais e o conhecimento algébrico. Se o estudo dos racionais for feito de maneira satisfatória, então a passagem para a álgebra será realizada de maneira mais suave. Isso porque a álgebra é uma generalização da aritmética e para expressar a generalidade e a abstração algébricas é necessário que haja habilidade com manipulação simbólica. No ensino dos números racionais, o professor pode, aos poucos, fazer a introdução à generalização, no intuito de preparar o aluno para essa habilidade.

Apesar de muitas pesquisas tratarem sobre o ensino de racionais, há ainda poucos estudos que se ocupem sobre como esse tópico afeta o desenvolvimento do aluno em conteúdos matemáticos ensinados posteriormente. Além disso, soluções efetivas para diminuir as dificuldades dos estudantes, que de fato sejam aplicadas, seja pelos professores em sala de aula ou em livros didáticos, ainda são escassas.

Verifica-se, assim, a necessidade de que as propostas saiam do papel para que os estudantes aprendam esse conceito, que por muitos é visto ainda como trivial. Tal fato irá afetar a compreensão de tópicos matemáticos mais avançados, ajudando a mudar a imagem de que a matemática se resume a uma sequência de fórmulas sem sentido.

---

## Bibliografia

1. ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. 6º ano. 3ª edição. São Paulo. Editora do Brasil, 2012.
2. BEHR, M. J.; POST, T. R. Teaching rational number and decimal concepts. **Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods**, v. 2, p. 201-248, 1992.
3. BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, p. 296-333, 1992.
4. BIANCHINI, E. **Matemática**. 6º ano. São Paulo: Moderna, 2006.
5. BONZANINI, L. C., and BASSOI, T. S. Os professores e o ensino de frações no 2º ciclo do ensino fundamental. In: BRANDT, CF., and MORETTI, MT., orgs. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa** [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, p. 145-159.
6. BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J.; TWISS-GARRITY, L. K. The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 118, p. 110-118, 2013.
7. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília-DF: MEC/SEF, 1997.
8. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries): matemática**. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.
9. BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017b. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ images/BNCCpublicacao.ppt](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.ppt)>. Acesso em: 01 jun. 2017.
10. CAJORI, F. **A History of Mathematics**. The Macmillan Company, 1909.

11. CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 125-136, 2006. Disponível em: <revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/545/433>. Acesso em: 10 fev. 2016.
12. CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2006.
13. CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.
14. CARDOSO, P.; MAMEDE, E. O conceito de fração— o conhecimento de professores do 1º ciclo. **Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación**, n. 06, p. 229-233, 2015.
15. DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. São Paulo: PUC/SP, 2007.
16. DEWOLF, M.; BASSOK, M.; HOLYOAK, K. J. From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. **Journal of experimental child psychology**, v. 133, p. 72-84, 2015.
17. FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. **Teaching fractions. Educational practices series**. Geneva: International Academy of Education-International Bureau of Education. v.22, 2011.
18. GUERREIRO, H. G.; SERRAZINA, M. L. A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão : Envolvendo um Processo de Modelação Emergente. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 181 - 201, 2017.
19. KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Ed.), **Number and measurement: papers from a research workshop**, p. 101-144. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.
20. LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria. **El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática**, p. 96-118, 1996.
21. MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: teachers's understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.
22. MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. 2004.

23. MOSS, J. Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. **How students learn: Mathematics in the classroom**, p. 121-162, 2005.
24. NOURA, K. Understanding Fractions: What Happens Between Kindergarten And The Army?. **Annual conference of the Mathematical Association of Victoria**. Austrália, 2009.
25. NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., EVANS, D., WADE, J.; BELL, D. Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. **Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences**. Paris, p. 28-31, 2004.
26. NUNES, T.; BRYANT, P.; WATSON, Anne. **Key understandings in mathematics learning**. London: Nuffield Foundation. 2009.
27. NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D.; WADE, J. Children's understanding of fractions. **Revista Contrapontos**, v. 8, n. 3, p. 509-517, 2009.
28. NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre, 1997.
29. PARK, J.; FLORES, A.; HOHENSEE, C. Fractions as Numbers and Extensions of the Number System: Developing Activities Based on Research. **Ohio Journal of School Mathematics**, 73, p. 13-21, 2016.
30. PINTO, H. **O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais**. 2011.
31. ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
32. SANT'ANNA, N. F. P. **Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra**. Tese (Doutorado em Educação). PUC, 2008.
33. SANTANNA, Neide FP; PALIS, Gilda de La Rocque; NEVES, Maria Aparecida C. Mamede. Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra Overcoming obstacles: from Arithmetic to Algebra. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 21, n. 39, p. 169-196, 2013.
34. SCHMANDT-BESSERAT, D. An Ancient Token System-The Precursor To Numerals And Writing. **Archaeology**, v. 39, n. 6, p. 32-39, 1986.
35. SIEGLER, R. S. et al. Early predictors of high school mathematics achievement. **Psychological science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

36. SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.** 2007. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC de São Paulo, São Paulo. 2007.
37. STEWART, I. **Em busca do infinito:** uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Zahar, 2014.
38. VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. p. 39-59, 1982.
39. WU, H. How to prepare students for algebra. **American Educator**, v. 25, n. 2, p. 10-17, 2001.
40. WU, H. Key mathematical ideas in grades 5–8. In: **Annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics.** Anaheim, 2005.
41. WU, H. The Critical Foundations of Algebra. **National Math Panel Report**, 2008.
42. WU, H. What’s sophisticated about elementary mathematics. **American Educator**, v. 33, n. 3, p. 4-14, 2009.
43. WU, H. **Fractions, Decimals, and Rational Numbers.** Berkeley, CA, 2008 (revisado em 2014). Disponível em: < [https://math.berkeley.edu/wu/NMP\\_fractions.pdf](https://math.berkeley.edu/wu/NMP_fractions.pdf)>. Acesso em: 10 out. 2016.