Instituto Federal do Rio de Janeiro

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

Larissa de Almeida Reis

UM RETRATO DO ENSINO DE ÁLGEBRA NAS DÉCADAS DE 30 E 40 ATRAVÉS DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Volta Redonda

2019

Larissa de Almeida Reis

UM RETRATO DO ENSINO DE ÁLGEBRA NAS DÉCADAS DE 30 E 40 ATRAVÉS DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Me. Magno Luiz Ferreira
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2019

Reis, Larissa de Almeida
R375r Um retrato do ensino de álgebra nas décadas de 30 e 40 através da análise de livros didáticos /Larissa de Almeida Reis. - - RJ: Volta Redonda, 2019.
109 p.: il.

Orientador: Profº. M.e Magno Luiz Ferreira

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2019.

1.Álgebra. 2. Livros Didáticos 3. Reforma – Francisco Campos 4. Reforma – Gustavo Capanema.I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Ferreira, Magno Luiz III.Título

CDU 51(075)

Larissa de Almeida Reis

UM RETRATO DO ENSINO DE ÁLGEBRA NAS DÉCADAS DE 30 E 40 ATRAVÉS DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 26 de Junho de 2019.

Banca Examinadora

Me. Magno Luiz Ferreira
Orientador/IFRJ

Dr. Pedro Carlos Pereira
DEMAT/UFFRJ

Dra. Marcia Amira Freitas do Amaral
IFRJ

Ma. Poicy Pimentel Ferreira
IFRJ

Scanned by CamScanner

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus que tornou possível a realização desta jornada de graduação especialmente a produção deste trabalho de Conclusão De Curso. Agradeço também a minha família e namorado pelo total apoio e incentivo desde a escolha do curso até a finalização do mesmo. Por fim, agradeço ao meu orientador, professor Magno Luiz pela atenção e todo aprendizado para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é estabelecer um retrato sobre o ensino de álgebra anterior ao ensino superior nas décadas de 30 e 40 através de uma análise de livros didáticos. O ensino de matemática, em particular o de álgebra, apresenta relação com questões sócio-políticas. Ou seja, as práticas e temas a serem ensinados são, entre outros fatores, influenciados por demandas de instituições governamentais e sociais de cada época, o que se reflete na produção de material didático. Assim, entendemos que olhar para o ensino de álgebra nos períodos das reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema permite melhor compreensão do papel de práticas algébricas no Ensino de Matemática. Desta forma, um retrato sobre as práticas algébricas do período pode proporcionar reflexões sobre a natureza das práticas atuais. Buscamos estabelecer características gerais do pensamento algébrico de modo a possibilitar uma análise de livros didáticos publicados nas décadas de 30 e 40. Por fim, apresentamos práticas comuns e incomuns no período das reformas e com estas se relacionam com as demandas sócio políticas. Desta forma, esperamos contribuir para uma compreensão melhor sobre o processo de evolução do ensino de álgebra no Brasil.
Palavras-chave: Ensino, álgebra, Reforma Francisco Campos, reforma Gustavo Capanema, livros didáticos.

ABSTRACT

The objective of this course completion work is to establish a picture on the teaching of algebra prior to higher education in the 1930s and 1940s through a textbook analysis. The teaching of mathematics, in particular that of algebra, is related to socio-political issues. That is, the practices and themes to be taught are, among other factors, influenced by the demands of governmental and social institutions of each era, which is reflected in the production of didactic material. Thus, we understand that looking at the teaching of algebra in the periods of reforms Francisco Campos and Gustavo Capanema allows a better understanding of the role of algebraic practices in Mathematics Teaching. In this way, a picture of the algebraic practices of the period can provide insights into the nature of current practices. We seek to establish general characteristics of algebraic thinking in order to allow an analysis of didactic books published in the 1930s and 1940s. Finally, we present common and unusual practices during the period of the reforms and with these they are related to the socio-political demands. In this way, we hope to contribute to a better understanding of the evolution process of algebra teaching in Brazil.

Key words: Teaching, algebra, Francisco Campos Reform, Gustavo Capanema reform, textbooks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Capa livro de Matemática: Contexto e Aplicações 39
Figura 2 – Apresentação conjunto dos números inteiros 40
Figura 3 – Apresentação conjunto dos números naturais 41
Figura 4 – Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ 42
Figura 5 – Apresentação das operações de conjuntos numéricos 43
Figura 6 – História das funções 44
Figura 7 – Continuação História das funções 45
Figura 8 – Noção de função por meio de conjuntos 46
Figura 9 – Disposição de conteúdos unidade 1 47
Figura 10 – Disposição de conteúdos unidade 2 48
Figura 11 – Disposição de conteúdos unidade 3 49
Figura 12 – Disposição de conteúdos unidade 4 50
Figura 13 – Contextualização da função afim 51
Figura 14 – Definição de função quadrática 52
Figura 15 – Situações que aparecem função quadrática 53
Figura 16 – Contextualização da função exponencial 54
Figura 17 – Mais contextualização da função exponencial 55
Figura 18 – Contextualização da função logaritmica 56
Figura 19 – Exercícios e exercícios resolvidos 57
Figura 20 – Aplicações de exercícios para Exame Nacional do Ensino Médio 58
Figura 21 – Folha de rosto do livro Pontos de Álgebra 60
Figura 22 – Capítulo de variáveis e funções, Ponto de Álgebra 62
Figura 23 – Apresentação binômio de Newton 64
Figura 24 – Definições de arranjos, permutações e combinações 65
Figura 25 – Teorema e demonstração de análise combinatória 66
Figura 26 – Definição de série 68
Figura 27 – Seção para notação de função 69
Figura 28 – índice do livro pontos de álgebra 70
Figura 29 – aplicação de derivadas 71
Figura 30 – Definição de continuidade e descontinuidade 72
Figura 31 – Exemplo de continuidade e descontinuidade 73
Figura 32 – Regras para diferenciar uma função 74
Figura 33 – continuação Regras para diferenciar uma função 75
Figura 34 – Capítulo VII, 1ª página 76
Figura 35 – Capítulo VII, 2ª página 77
Figura 36 – Capítulo VII, 3ª página 78

Figura 37 – Capítulo VII, 4ª página 79
Figura 38 – Capítulo VII, 5ª página 80
Figura 39 – Capítulo VII, 6ª página 81
Figura 40 – Capítulo VII, 7ª página 82
Figura 41 – Capítulo VII, 8ª página 83
Figura 42 – Exercícios de diferenciação 85
Figura 43 – Continuação Exercícios de diferenciaçã 86
Figura 44 – Algumas definições de derivadas 87
Figura 45 – Folha de rosto do livro Mathemática 88
Figura 46 – Apresentação de subdivisões conteudistas para os cursos clássicos-científicos 89
Figura 47 – Progressões aritméticas 90
Figura 48 – Exercícios resolvidos 91
Figura 49 – Generalizações das progressões aritméticas 92
Figura 50 – Teorema e demonstração de Progressão geométrica 93
Figura 51 – Símbolos e demonstrações da progressão geométrica 94
Figura 52 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 1ª parte 95
Figura 53 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 2ª parte 96
Figura 54 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 3ª parte 97
Figura 55 – Disposição de conteúdos, 1ª parte 99
Figura 56 – Disposição de conteúdos, 2ª parte 100
Figura 57 – Exercícios resolvidos de progressão geométrica 101
Figura 58 – Exercícios de progressão geométrica 102

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO 1
1.1 HIPÓTESES 1
1.2 OBJETIVOS 2
1.2.1 Objetivo Geral 2
1.2.2 Objetivos Específicos 2
1.3 JUSTIFICATIVA 2

2 – REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA 4
2.1 CONTEXTO HISTÓRICO EM QUE SE MOSTRA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO BRASIL 4
2.2 ALGUMAS DAS PREOCUPAÇÕES COM O ENSINO DA ÁLGEBRA DISCUTIDAS EM UM CONTEXTO GERAL 6
2.3 ALGUMAS PREOCUPAÇÕES RECORRENTES DAS REFORMAS FRANCISCO CAMPOS, GUSTAVO CAPANEMA E O PERÍODO VIGENTE 9

3 – O PERÍODO DAS DUAS REFORMAS: FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA 15
3.1 O ENSINO DE ÁLGEBRA NAS REFORMAS FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA 15
3.2 LEIS, CARTAS DE LEIS E LIVROS DIDÁTICOS DAS REFORMAS CITADAS 19

4 – CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA ATUALMENTE(1990-2019) 23
4.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA ATUALMENTE 23
4.2 LEIS, CARTAS DE LEIS E LIVROS DIDÁTICOS DA ATUALIDADE . 26

5 – METODOLOGIA 31
5.1 A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA 31
5.2 A PESQUISA DOCUMENTAL 33
5.3 AS ETAPAS DA PESQUISA 34

6 – ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS 38
6.1 OBRA REFERENTE AO ENSINO ATUAL 38
6.2 OBRA REFERENTE À REFORMA FRANCISCO CAMPOS 59
6.3 OBRA REFERENTE A REFORMA GUSTAVO CAPANEMA 88

CONSIDERAÇÕES FINAIS **104**

REFERÊNCIAS **106**

1 INTRODUÇÃO

O Ensino de Matemática gera bastante discussões de modo a torná-lo cada vez mais eficiente. Ao longo de cada período na história, o ensino de modo geral é adaptado a atender as necessidades políticas e sociais, fazendo com que o mesmo esteja sujeito ao estilo governamental da sociedade brasileira.

A Matemática, além disso ainda é pensada em como ser compreendida pelos discentes uma vez que a mesma é vista com complexidade tanto para quem ensina, quanto para quem aprende, em particular o ensino de álgebra que conta com generalizações, simbolismos e propriedades. Assim, ao longo do tempo o ensino de álgebra vem sofrendo alterações devido as necessidades políticas e sociais de cada época e discussões provenientes de preocupações para desvendar como ensinar a álgebra.

Este trabalho tem por finalidade mostrar um retrato do ensino da álgebra nos períodos das reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema que abrangeram as décadas de 1930 e 1940 mediante a um paralelo com o ensino de álgebra do período atual. Uma vez que se trata de um retrato histórico analisado sob o olhar do período em que vigora. . Queremos obter uma visão de como era o ensino de álgebra entre as décadas de 1930 e 1940, mediante a análise de livros didáticos. utilizando o contexto histórico para apresentar as necessidades políticas e sociais de cada período. Assim poderemos ter um indício de como se apresentou o ensino de álgebra e como o mesmo ainda é pensado, tendo em vista que os livros mostrarão as tendências de governo em sua linguagem e será verificado se as preocupações com o ensino algébrico estão sendo atendidas nas obras selecionadas.

Assim o trabalho visa uma reflexão através da história sobre o ensino de um dos elos da Matemática, a álgebra, a fim de podermos questionar nossa prática de ensino nas salas de aula e as mudanças que ocorrem na educação e no modo de refletirmos a prática docente.

1.1 Hipóteses

O ensino da álgebra é determinado por legislações e modelos políticos que interferem neste processo educacional além das diferentes concepções que aparecem ao longo do tempo sobre o que é e como ensinar matemática.

A utilização de modelos de ensino históricos das décadas de 1930 e 1940 permite a compreensão do processo de construção dos modelos de ensino de álgebra vistos atualmente. Esta compreensão pode ocorrer através da análise com base em materiais e técnicas de ensino constituído no processo de Ensino da Álgebra no Brasil.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Estabelecer, através da análise de livros didáticos, um perfil do Ensino de Álgebra no Brasil durante os períodos de reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar o contexto do ensino da Álgebra no Brasil;
- Descrever e caracterizar o papel da álgebra nas reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema;
- Selecionar livros didáticos, que abordem o conteúdo de álgebra, do período em questão;
- Apresentar, através da análise de livro didático, uma modelo de abordagem do ensino de álgebra nos períodos propostos;
- Analisar livros didáticos do período das reformas;
- Estabelecer um paralelo entre a abordagem de ensino da reforma Francisco Campos e Gustavo Capanema com a atualidade.

1.3 Justificativa

Inicialmente, destaco a identificação que apresento com álgebra e história. Este pensamento, faz-me refletir em questões, entre as quais, destacam-se: Como acontece o ensino na matemática? Com o que nos preocupar?

Ao longo de minha trajetória acadêmica, pude perceber que discussões sobre álgebra e seu ensino sempre enfrentam grandes dificuldades. Um exemplo disso, é o fato de alguns alunos não apresentam boa compreensão sobre o conceito de Variável. Além disso, no período de estágio foi possível observar que a maioria das preocupações dos professores com relação aos alunos se referem-se aos tópicos algébricos. Mas terá sido sempre assim?

A curiosidade no processo de ensino poderá dar respostas às muitas questões, por exemplo, o porquê de a álgebra ser tão interessante para uns e tão complexo para outros. Destaco que a área de ensino sempre me chamou atenção uma vez que pretendo atuar em todos os anos de ensino permitidos pela graduação em licenciatura em matemática. Desta forma, acredito que o estudo sobre a história dos processos de Ensino de Matemática pode nos dar uma perspectiva mais solida sobre o papel do professor no contexto político que orbita a álgebra.

Socialmente, vale refletir sobre o papel do ensino de álgebra no processo de desenvolvimento do ensino de Matemática. É muito comum vermos professores preocupados com o ensino da Matemática de maneira geral, mas pouco se reflete sobre o ensino de álgebra em si. Seria muito interessante, para conhecimento profissional dos professores, que os mesmos pudessem refletir sobre este tema. Esta modalidade, isto é, ramificação da Matemática que é estudada a muito tempo e ensinada ao longo da História do Ensino dispõe-se de um processo de constituição. A álgebra que foi instituída nos períodos citados, diverge-se da vigente.

Profissionalmente, é importante para conhecimento geral do professor, o processo de ensino de uma vertente importante e abrangente acerca do seu conteúdo. A História da Matemática trás perguntas e respostas a paradigmas impostos no ensino da mesma, como: "A matemática é chata"ou "A matemática é difícil"ou ainda, "Por que motivo as coisas são ou foram ensinadas de certo modo". Assim, o tema proposto é de grande valia uma vez que leva aos interessados conhecimentos na área de ensino e reflexões construtivas.

2 REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

2.1 Contexto histórico em que se mostra o ensino de Álgebra no Brasil

A álgebra se apresenta como uma ramificação da matemática que, em suma, generaliza a aritmética, apresenta variáveis para representar os números, além de fórmulas, problemas e grandezas representadas por símbolos. Já o ensino da mesma foi por muito tempo dado através de reproduções de forma tradicional. Abaixo, uma reflexão sobre o ensino algébrico:

> [...] desde 1799, momento em que a álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até início da década de 1960, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, em que tudo era essencial. A matemática escolar, como já mencionado, era apresentada dividida em compartimentos estanques. (ARAÚJO p.1 apud SORTISSO, 2011, p.1)

Estes autores apresentam dentre outras, uma visão antiga propagada no século XIX sobre um ensino mais repetitivo baseado na aquisição de técnicas, sem necessariamente se preocupar com um contexto.

Outra característica do ensino de álgebra, no período anterior a reforma Francisco Campos, é a existência de características técnicas do processo de ensino (ARAUJO, 2009). Ou seja, os conteúdos algébricos eram reproduzidos de modo instrumental, com a finalidade de resolver equações e problemas. Além disso, existiam blocos de conteúdos que eram lançados por Euclides Roxo (1929) no qual os conteúdos matemáticos eram separados em: ensino de álgebra, ensino de geometria e ensino de aritmética. Alguns autores também apresentam a existência da separação da trigonometria. (Dassie 2008)

Segundo Sortisso (2011), a álgebra é apresentada corriqueiramente como uma disciplina mais procedimental, ou seja, sendo a mesma útil para resoluções de problemas e das equações que são apresentadas quando é introduzido o conteúdo de álgebra. Isto é, na maioria das vezes, não temos uma discussão sobre o que o estudante está aprendendo com aquele conteúdo algébrico. Um exemplo simples é que possuímos grande parte dos discentes que sabem resolver os Produtos Notáveis através das fórmulas definidas para o cálculo de cada um destes, mas sequer sabem que o mesmo conteúdo é associado ao cálculo de área de quadrados e retângulos, assim, o mesmo resultado pode ser entendido geometricamente. Além disso, a mesma autora também afirma que tradicionalmente, o ensino brasileiro de álgebra tem início no sétimo ano do ensino fundamental. Neste contexto, surge uma nova linguagem que tem como função apresentar o conceito de número de forma simbólica.

Ou seja, neste momento os alunos precisam lidar com uma mudança de perspectiva, do concreto para o abstrato, sobre a Matemática.

A partir destes fatos sobre o desenvolvimento da álgebra escolar, entendemos que o tipo de reprodução que era discutido e mostrado, no período anterior á 1960 onde se iniciou o Movimento da Matemática Moderna, apresentou uma singela melhora. De acordo com Gil (2008), o objetivo do ensino algébrico é fundamentar todos os campos existentes na escola na disciplina de Matemática. Além disso, Araújo (2009) indica que as contribuições desse importante Movimento da Matemática Moderna, influenciam na construção de um modelo de ensino de álgebra, que valoriza o rigor. Assim, começou a se preocupar e discutir sobre os chamados aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem que se apresentaria de forma mais organizada.

No entanto, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) recebeu diversas críticas e na década seguinte, entrou em declínio. Segundo Pinto (2005), um conhecido professor de Nova York, fez um livro no qual descrevia diversas críticas ao movimento. Kline, o professor, fomentou que houvera um exagero na forma dedutiva de abordar os conteúdos. Devido ao rigor apresentado pelo movimento, os conteúdos, em especial o algébrico era muito formal e com excessivo simbolismo. Outra crítica é a ênfase desnecessária que se deu à Teoria dos Conjuntos. Estes conceitos não deveriam ser apresentados nas séries básicas pois confundiriam os alunos e os mesmos continuariam sem o gosto pela Matemática. E em nenhum momento, é isso o que profissionais envolvidos na educação em especial na Matemática, buscam.

> Gil (2008) conclui que logo após o declínio do movimento matemático modernista, a álgebra perdeu considerável espaço uma vez que com seu grande destaque no Movimento da Matemática Moderna, a álgebra tornou se de certo modo confusa. Sendo assim, e desta vez então a geometria ganhou destaque e com isso a álgebra deixou de ser pensada enquanto ensino voltando ao caráter exclusivamente reprodutivo, ensinando com única finalidade de resolver problemas propostos da matemática. Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo - o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário à resolução de problemas e equações (MIGUEL, FIORENTINI E MIRIOM Apud, Gil 1992, p.51).

Atualmente, o ensino da álgebra vem ganhando abundante espaço uma vez que a mesma possui amplo destaque nas salas de aula, em especial nos livros didáticos. De acordo com Santos (2007), o ensino da álgebra vem ganhando cada vez mais destaque e melhorias, porém, ainda carecem de contexto. Aproximar a realidade ou contexto, com a álgebra, aprendida nas escolas, contribui no entendimento do aluno, tendo em vista

que assim, o mesmo poderá desenvolver habilidades e competência interagindo o que aprendeu de conteúdo algébrico com sua realidade. Santos ainda afirma que a álgebra é insubstituivelmente relevante tanto no currículo mínimo escolar quanto nos livros didáticos de cada série. Esta modalidade da Matemática contribui no desenvolvimento cognitivo do discente, tornando se então, indispensável.

D'Ambrósio, (1996) também ressalta as melhorias no campo algébrico, este afirma que as transformações ocorridas na Matemática são completamente naturais, pois o mundo muda constantemente logo, a forma com que o conhecimento é transferido, é também mutável. Além disso, o rigor não deixou de ser cobrado, porém agora, o rigor é de outra natureza, se adequando com a realidade de cada época. O mesmo autor, ainda ressalta que o fato da Matemática ser fortemente afetada pela diversidade cultural, contribui para mudanças no ensino. Portanto, a contextualização dos componentes curriculares apresentados na álgebra é de suma importância para a compreensão por parte do aluno.

Neste trabalho, estamos interessados em discutir o modo como os livros didáticos dos períodos escolhidos denunciam o desenvolvimento do ensino de álgebra. Para isso, apresentamos na próxima seção, preocupações que entendemos como necessárias para o processo de ensino neste ramo.

2.2 Algumas das preocupações com o ensino da Álgebra discutidas em um contexto geral

De acordo com Lins e Gimenez (1997), a álgebra é abstrata, essa é uma visão que a maioria dos autores apresentados nesta sessão compartilham, trata - se de um modo prático de representar fatos genéricos. Desta forma, ela representa a crescente procura por generalização de possíveis problemas. Assim podemos perceber sua intensa importância na Matemática, que consiste no fato de que o aluno tenta aprender, desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico. Além disso, esses autores afirmam que álgebra e aritmética devem ser desenvolvidas de forma unificada e quando há uma ruptura das duas correntes matemáticas, o aluno por vezes acha que está lidando com duas matérias distintas, dificultando a associação dos conceitos matemáticos. (LINS e GIMENEZ, 1997; OLIVEIRA e LAUDARES, 2015)

Outro autor que também faz considerações sobre pensamento algébrico é Ponte (2007),que arirma que o pensamento algébrico está na capacidade que o aluno desenvolve ao construir e compreender as generalizações interpretando os problemas algébricos que podem lhe ocorrer. Assim, para a efetiva construção do pensamento algébrico é necessário compreender as generalizações algébricas.

> Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos.

> No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (PONTE et al., 2007 p. 40)

E sobre linguagem algébrica, Jacomelli (2006) diz que a linguagem algébrica é um padrão necessário para descrever simbolicamente, usando símbolos matemáticos regularidades, ou seja, padrões decorrentes das generalizações naturais no corpo da álgebra, a mesma também diz que segundo o PCN (1998) "é interessante propor situações em aula na qual os estudantes descubram esses padrões através de investigação tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas"com isso, será possível fazer relações tornando mais eficiente a construção da linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente.

Podemos concluir a partir dos autores supracitados que desenvolver o pensamento e linguagem algébrica é uma preocupação que todos os docentes precisam ter, uma vez que a álgebra visa lidar com representações genéricas. Porém, desenvolver o raciocínio algébrico no estudante torna-se complicado à medida que os conteúdos algébricos apresentam grande simbolismo e regras. Por isso, entendemos que, boa parte das dificuldades com tema têm relação com linguagem e pensamento algébrico, uma vez que se trata de conceitos complementares entre si.

É possível perceber este fato em situações como o processo de resolução de uma equação. Sobre este tema explica-se que x é uma incógnita. São realizados alguns procedimentos algébricos para determinar o valor da incógnita. No entanto os alunos dificilmente percebem que se trata de uma solução específica para o problema tratado naquele instante. Desenvolver o raciocínio algébrico no aluno, sempre foi um desafio.

Sortisso (2011) afirma que existe uma preocupação em não deixar uma defasagem no processo de aprendizagem em especial na construção do pensamento matemático pelo discente. Isso pode acontecer, pois por as vezes os docentes apresentarem a álgebra de forma fragmentada e aindar, não relacionando com a contextualização de conteúdo. Ao refletir, percebemos que, deste modo, o professor em sala de aula estaria ignorando àquela formação do pensamento que concordam os três autores citados. A álgebra ensinada apenas como o cálculo com letras, perde o seu significado.

Embora com o passar dos anos a álgebra tenha adquirido diferentes formas de acordo com o que a sociedade ou órgãos governamentais demandava, em todos os períodos a Matemática se transforma, mas os conteúdos são os mesmos, não a disposição deles ou a forma que eram ensinados ou para que séries eram ensinados, porque isso sim, mudou ao longo do tempo, a exemplo, um período não muito distante (1930–1949) que abrangeu as reformas educacionais: Francisco Campos e Gustavo Capanema. No qual os conteúdos

dos cursos complementar, clássicos e científicos (equivalentes ao Ensino Médio atual), nas reformas Campos e Capanema, respectivamente, não correspondem aos conteúdos que estudamos hoje em dia e tampouco a disposição dos mesmos.

Ora, se a álgebra é abstrata, generalizadora e representante genérico de conceitos matemáticos, como seria ensiná-la sem contextualizar? Sem esta reflexão nos abrimos para outras perguntas, desta vez a do aluno: para que estou estudando isso? Santos (2007) diz que o contexto ajuda no problema de desenvolver o raciocínio uma vez que a mesma afirma que estudar álgebra da maneira mais adequada possível auxilia o desenvolvimento cognitivo do aluno.Logo o contexto auxilia no desenvolvimento do pensamento algébrico por parte do aluno.

Mais uma vez, citando preocupações, temos as visões de importantes autores que buscam o que se adquire no ensinar da álgebra. Podemos perceber que existem apreensões de determinadas épocas e outras que sempre existiram, estando estas discutidas por autores e pensadores da área ou não. Como por exemplo, os livros de 1930, que veremos nos capítulos seguintes, apresentam os conceitos de derivada e pontos máximos e mínimos para alunos do Ensino Secundário (equivalente aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio atual). Nos dias hoje, estes conceitos são apresentados apenas no ensino superior em áreas de exatas. Ou seja, essa disposição de conteúdos refere se a uma preocupação da época em formar alunos para um "mercado industrial". Não era uma preocupação específica do ensino de álgebra, mas acabou por influenciá-la.

O Movimento da Matemática Moderna (1960-1970) é outro exemplo desta influência. Neste período, existia uma preocupação de relacionar a Teoria dos Conjuntos no ensino da matemática pois de acordo com a conjuntura do período, pensaram no momento, ser válido. Em contrapartida, as ansiedades citadas anteriormente são bastante discutidas e recorrentes. Sobre as visões importante de autores que pesquisam sobre o ensino da álgebra, podemos destacar que segundo Alessandro Ribeiro (2015), existem diferentes autores que pensam ou pensaram no ensino da álgebra e em decorrência disto, apontam suas ansiedades quanto ao ensino.

Os primeiros, são os já citados neste capítulo: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Estes, apresentam três visões sobre o ensino de álgebra:

> Lingüístico-pragmática: a álgebra está relacionada à atividades pedagógicas que visam a resolução de problemas, prevalecendo a aquisição mecânica das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico(...); Fundamentalista-estrutural: (...) São enfatizadas as propriedades estruturais das operações, como forma de justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitando o estudante a identificar e a aplicar essas estruturas nos diferentes contextos (...); Fundamentalista-analógica: a álgebra também tem o caráter pedagógico de instrumento para resolver problemas, mas mantem-se o caráter fundamentalista, fazendo assim uma síntese das concepções anteriores. (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993, p.83 e 84)

A partir dessas visões, estes autores mostrados concluem que o pensamento algébrico é reduzido a linguagem algébrica pois, se estudamos uma álgebra com símbolos matemáticos que por sua vez, já se encontram existentes. Outro autor, apresentado por Ribeiro (2015), é Usiskin (1995), este, em suas pesquisas afirma que a álgebra presente nas escolas é basicamente compreender as letras, variáveis, recorrentes da disciplina no campo algébrico que estão sendo apresentadas. O que mais se pode destacar, sobre o autor é que nós da área de exatas, isto é, a Matemática, sabemos os diversos papéis das letras na álgebra. Mas para o aluno que está construindo seu pensamento algébrico, o entendimento da criança pode ser comprometido quando ela não compreende estas diferentes concepções alcançadas no processo de ensino e aprendizagem.

Como último exemplo de preocupações relacionadas ao ensino algébrico, são os também citados anteriormente: Lins e Gimenez (1997), que conforme Ribeiro (2015), de forma geral e um pouco diferenciada dos pensamentos de Usiskin, estes, acomodam em seus estudos dois enfoques dados à atividade algébrica: a caracterização pelo uso de notações que se tem através do ensino de álgebra ou pelo uso de seus conteúdos, sem necessariamente compreendê-los em sua totalidade. “Dentro destes enfoques a atividade algébrica é frequentemente descrita, segundo eles, como “fazer ou usar álgebra” ou, de forma ainda mais banal, “calcular com letras”.(Ribeiro, 2015, p.4).

Dentre outros autores que também publicaram sobre o ensino de álgebra, podemos perceber uma tendência em discutir como ensinar Matemática, em particular a álgebra, que é o foco dessa pesquisa. Sempre vamos nos deparar, com anseios de melhorar o ensino ou simplesmente torná-lo mais prático. Foi mostrado acima que existem preocupações recorrentes e outras que surgiram ao longo de cada período, isto é, preocupações específicas. Fazer essa análise, servirá de grande auxílio para analisar o ensino de álgebra via livros.

A seguir, iremos conter a fala sobre as preocupações com ensino de álgebra provenientes dos períodos que são focos do trabalho, isto é, as preocupações com o ensino de álgebra durante a reforma Francisco Campos, Gustavo Capanema e o período atual, restrito aos anos de 1990-2019.

2.3 Algumas preocupações recorrentes das Reformas Francisco Campos, Gustavo Capanema e o Período Vigente

Os programas implantados pela reforma Francisco Campos para os dois primeiros anos do curso secundário apresentam um destaque especial que segundo Dassie (2008) encontra-se na seleção dos conteúdos de geometria intuitiva para o primeiro ano, dando assim uma apresentação de conceitos para área e volume. Euclides Roxo, segundo relatos, julgou importante retomar o destaque para geometria como o mesmo fazia em 1929 nos programas de conteúdos propostos pelo Colégio Pedro II.

Euclides Roxo, professor do colégio referido acima, tinha ideia de iniciar o tratamento da geometria de forma intuitiva e depois de forma dedutiva." Assim, no estudo da geometria no terceiro e no quarto ano seria predominante o caráter dedutivo." (Dassie, 2008, p.138) No que se refere a reforma Francisco Campos, outra análise acerca de conteúdo era essa, demonstradas nos trechos abaixo:

> Uma análise das "Instruções Metodológicas " revelou que as recomendações didático-pedagógicas estavam alicerçadas em quatro grandes categorias: - a introdução do conceito de função, desde a primeira série do Curso Fundamental, e o seu desenvolvimento como conceito unificador dos ramos matemáticos (Aritmética, Álgebra e Geometria); - um curso de Geometria Intuitiva que progressiva e articuladamente à Aritmética e à Álgebra caminharia para a Geometria Lógico-Dedutiva; - o uso do Método Heurístico para a introdução e desenvolvimento dos conteúdos de ensino; - a utilização de questões práticas, definidas nas "Instruções como "(...) as aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessem às cogitações dos alunos ".(Valente 2007 apud, dassie, 2008, p.5)

Ou seja, eram preocupações relacionadas a união dos três ramos da Matemática, a valorização da geometria e exemplos de situações de física e ciências naturais, que eram demandas daquele tempo. Com instruções metodológicas o autor quer dizer que existia uma instrução para abordar os conteúdos de Matemática que foi reorganizada juntamente com as novas disposições de conteúdos para o ensino secundarista.

Além de anseios de forma conteudista, existiam também as ansiedades políticas. Segundo Dallabrida (2009) as medidas propostas para a reforma Francisco Campos, que serão vistas no capítulo seguinte, viam necessidade em produzir ou formar alunos secundaristas autorregulados e prontos para o mercado de trabalho, conforme seguiam as exigências sociais disciplinar e capitalista - financeira que se passava, no Brasil, nos anos de 1930.

Segundo a revista História do Ensino da Língua Brasileira (HELB), a reforma nivelou todos os colégios secundários oficiais ao Colégio Pedro II, mediante a inspeção federal e deu a mesma oportunidade às escolas particulares que se organizassem, segundo o decreto, e se submetessem à mesma inspeção.

Esta reforma, conforme descrito acima, equiparou o ensino da época para uma modalidade mais regrada e com intenções capitalistas industriais. Além de achar-se necessário mudanças na forma que era apresentado os conteúdos. A reforma Francisco Campos obteve mudanças tanto em nível de ensino e educação quanto políticas e sociais. Em abril de 1942, logo após a reforma Francisco Campos, foi instaurada a reforma Gustavo Capanema. Nome em homenagem ao então ministro da educação.

Vale destacar que esta reforma foi pensada através da criação de oito decretos lançados no mandato de Gustavo Capanema, que segundo (Campelo, 2017) são estes:

> Decreto-Lei nº 4.048, de 22 de janeiro de 1942, que estabelece a inauguração de uma nova modalidade de ensino técnico-industrial, o SENAI;

> Decreto-lei nº 4.073, de 30 de janeiro de 1942: Lei Orgânica sobre propostas para o Ensino Industrial;
>
> Decreto-Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942: Lei Orgânica do Ensino Secundário;
>
> Decreto-Lei nº 6.141, de 28 de dezembro de 1943: Lei Orgânica do Ensino Comercial;
>
> Decreto-Lei nº 8.529, de 2 de janeiro de 1946: Lei Orgânica do Ensino Primário, que começou a ganhar destaque nesta reforma;
>
> Decreto-Lei nº 8.530, de 2 janeiro de 1946: Lei Orgânica do Ensino Normal;
>
> Decreto-Lei nº 8.621, de 10 de janeiro de 1946, que estabelece a concepção do ensino voltado ao comércio, o SENAC;
>
> Decreto-Lei nº 9.613, de 20 de agosto de 1946: Lei Orgânica do Ensino Agrícola (SAVIANI 2007 Apud CAMPELO, 2017, p. 254).

Os objetivos desta reforma para o ensino secundário são estes abaixo, descritos no Decreto-Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942:

> 1. Formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes.
>
> 2. Acentuar a elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a conciência patriótica e a conciência humanística.
>
> 3. Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial. (Brasil, 1942, Art. 1^o)

Em se tratando de ideais políticos podemos citar também que esta reforma exibia um caráter católico conservador (Campelo, 2017). A esse respeito, podemos destacar o fato de a gestão do Ministro Gustavo Capanema no Ministério da Educação apresentar proximidade com os setores conservadores da Igreja Católica naqueles anos. Estes tinham como representantes, Alceu Amoroso Lima, Padre Leonel Franca e, o Cardeal Leme, do Rio de Janeiro. Esta relação não era apenas de simpatia filosófica ou então ideológica. (Schwartzman,1983/2000)[1]

Para Romanelli (1978/2002) o ensino secundário tinha que despertar no aluno o senso de cultura e relações sociais, gerar um senso político patriota e facista, promover condições suficientes para progredir ao curso superior de graduação, que consistia em uma das maiores preocupações neste contexto, e possibilitara formação de lideranças em um contexto industrialista.

A divisão apresentada para o ensino secundário era diferente da apresentada para o ensino secundário na reforma Francisco Campos. Segundo Massuia (2010), o nosso então conhecido ensino básico na época era apresentado em dois ciclos: ginasial com quatro anos de duração e o colegial com três anos de duração. Além disso, existiam duas modalidades paralelas para o curso secundário: O Clássico que era voltado para alunos que iriam para o ensino superior e o curso Científico para alunos interessados em ingressar o quanto antes

[1] Texto original de 1983 com reedição em 2000.

no mercado de trabalho, sendo este último dividido nas modalidades: industrial, comercial e agrícola.

Sobre os conteúdos de matemática, referentes a nova reforma, existem autores com as seguintes considerações abaixo: Independente da sequência constituída para Dassie (2008), continua-se a coexistir dentre esta parcela da matemática a delimitação presente anteriormente, a qual subdivide o ensino da seguinte forma: Geometria intuitiva e Aritmética prática, nos dois primeiros anos do primeiro cíclo, Álgebra e Geometria dedutiva, no terceiro e no quarto ano do mesmo, Aritmética teórica, Álgebra e Geometria, nas três séries que compreendem o segundo ciclo, sendo a Trigonometria listada também para o primeiro e segundo ano e Geometria analítica para o último ano.

Uma preocupação desta reforma acerca da álgebra é a apresentada no parágrafo a seguir:

> A articulação entre aritmética e álgebra presente nos blocos de conteúdos da reforma Campos não aparece mais. Dessa forma, pela lista de conteúdo, os conceitos de aritmética e álgebra seriam tratados separadamente. A representação gráfica, tanto defendida por Euclides Roxo, aparece apenas como discussão para a solução de um sistema de equações do 1º grau. O estudo das funções é deslocado para o segundo ciclo. (Dassie, 2008, p.144)

Nos capítulos posteriores será explicado as divisões em ciclos que englobam o ensino secundário. Para compreensão do contexto dos períodos outro autor que explica essas divisões que foram julgadas necessárias no contexto da reforma é Capello (2006).

O ensino de Matemática era organizados com a finalidade de adaptar os jovens à prestação de exames para os cursos superiores e as finalidades deste ensino tinham por objetivo segundo Capello (2006), desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o ao mesmo tempo à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara e também lógica do pensamento matemático em linguagem precisa.

Segundo Capello (2006), os programas de Matemática para os Cursos Clássico e Científico foram expedidos em março de 1943, com a organização dos ensinos de matemática seguindo uma mesma estrutura. Na primeira série, de ambos os cursos citados acima, eram abordados assuntos referentes à Aritmética Teórica, Álgebra e a Geometria. Na segunda série, Álgebra, Geometria e Trigonometria e na terceira série, Álgebra, Geometria e Geometria Analítica.

Os conceitos matemáticos eram praticamente os mesmos, para as duas opções, abordados na forma de matérias agrupadas e interdependentes dos conceitos matemáticos estavam dispostos segundo uma lógica interna, revelando unidades didáticas, que segundo Chervel apud Capello (2006), indica que as transformações sofridas na organização dos ensinos de Matemática poderiam levar os docentes a experiências pedagógicas semelhan-

tes, a uma uniformização de práticas pedagógicas, levando à constituição da disciplina matemática.

Concluo desta forma, a partir dos pontos de vista apresentadas nas sessões anteriores, que com pouco tempo de uma reforma pra outra, houve mudanças nos cenários políticos e sociais, que interferem significativamente no ensino da Matemática, como descrito anteriormente, por exemplo, quando se dizia em interligar álgebra, geometria e aritmética, que na reforma seguinte, já não se julgava intensamente necessário, apesar desse tópico não ser desconsiderado.

Os livros didáticos deveriam então demonstrar interligação entre os conteúdos de álgebra e geometria já que isso era uma preocupação descrita por Euclides Roxo. Mas esta, não foi atribuída corretamente. Existiam exemplares que não demonstram interligação entre os conteúdos algébricos e geométricos. Pois conforme diz Telo (2017):

> Embora as listas localizadas datem da década de 50, ainda é possível observar uma grande circulação de livros de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, mesmo após a fusão dessas disciplinas em 1930 e a instituição dessa mudança nas Reformas Francisco Campos (1931) e Gustavo Capanema (1942). (Telo, 2017, p.88)

A citação se refere ao fato de que mesmo com a reforma Francisco Campos instaurada e neste caso a reforma Capanema também ainda sim existiam exemplares de livros apenas de álgebra, aritmética e geometria o que não contribuíam para a interligação destes conteúdos, pelo menos não via livros didáticos. Porém muitos destes livros continuaram sendo utilizados em algumas escolas e posteriormente ainda foram aprovados pela CNLD. Conforme Dassie (2008) As interligações entre álgebra e geometria era uma preocupação de Euclides Roxo, que participou das reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema.

Outro ponto muito relevante é a importância dada ao rigor do pensamento matemático, e era exigida uma linguagem algébrica precisa, a fim de tornar os estudantes mais técnicos e capazes de obter bom desempenho em exames prestados à entrada de cursos superiores. Ainda era configurado um ensino mais voltado a "passar de séries" porém, em minha percepção o ensino algébrico era mais tecnicista, uma vez que cursando o curso científico poderia oferecer mercado de trabalho aos estudantes. É válido lembrar que foi nesta reforma, que foi criada os cursos ainda conhecidos que visam uma formação para o mercado industrial e tecnológico, são os SENAI e SENAC'S. Também, segundo autor acima, a Matemática, e então a álgebra, sempre estiveram presentes enquanto conteúdo tanto nos cursos clássicos quanto no científico, porém neste último modelo, por ser mais específico e voltado para ciências, como sugere o nome, podemos ter um maior destaque para ciências exatas e, por conseguinte, para técnicas algébricas.

Essas preocupações, mostradas durante o presente capítulo, de maneira geral, tanto da reforma obtida durante o mandato do ministro Francisco Campos, quanto do mandato do ministro Gustavo Capanema influenciam em peso para analisarmos como eram

transmitidos os conteúdos algébricos, ou melhor como eram desenvolvidos os ensinamentos de álgebra dentro das salas de aulas através da análise dos livros didáticos.

Hoje em dia (1990-2019) possuímos outras leis, outras visões governamentais, e principalmente outras preocupações tanto conteudistas quanto de maneiras para "alcançar o aluno", ou seja, cada período apresenta diferença que molda o ensino mas não afetam a matemática como conteúdo, e sim como forma de ensino e aprendizagem, ao mudar as preocupações com a matemática, não pode-se deixar de afetar a álgebra, foco principal do trabalho. Sendo assim, os anseios acerca do ensino algébrico servem de embasamento para a futura análise de livros didáticos dos períodos pesquisados.

O ensino da Álgebra atualmente, ainda defasado mostra por sua vez uma limitação que mesmo com os investimentos teima em persistir, esse panorama resulta em um quadro aonde a Álgebra demonstra pouca aplicação no dia a dia dos docentes e isso acarreta uma série de problemas os quais põe o ensino da mesmo como um desafio aos discentes que buscam caminhos para introduzir de forma mais incisiva no cotidiano dos aluno. (Silva, 2013)

Segundo Silva (2013), seria cabível o próprio corpo docente das instituições criarem um senso crítico a fim de instituir novas formas de se abordar o ensino da Álgebra, mesmo tendo conhecimento que pela falta de investimentos e outros problemas, o único e possível recurso que resta ao docentes são meros livros didáticos os quais são presos em metodologias que podemos julgar ultrapassadas, uma vez vista com a ótica atual, e isso dificulta porém não pode ser um agente limitador para o ensino, então uma maneira de driblar isso, além da busca por maiores recursos, e isso evidente não é algo que abordaremos.

Segundo Santos, (2007), a Matemática deve apresentar significados, isto é, o discente precisa entender o significado das operações por ele efetuadas por ele mesmo, sendo assim a álgebra não pode se limitar a apenas seguir regras e efetuar "cálculo com letras".

Assim, o foco de ensinar álgebra hoje em dia é fazer com que a mesma tenha significado e não seja apenas uma disciplina para resolver exercícios através de técnicas e vista como cálculo com de números e letras. Diante destas considerações podemos concluir que nos períodos de reforma, a álgebra foi abordada como uma linguagem mais técnica, baseando-se em adquirir técnicas de resolução de situações problemas e diversos exercícios, não se preocupando com a contextualização, sendo assim, a mesma pode existir ou não. Como já foi mencionado por Zotti (2006) é uma fórmula metodológica que vimos que é uma discussão recente cuja proposta é ensino com investigação, resolução de problemas, história da matemática como metodologia do ensino dentre outras como Miguel, Fiorentini e Miriom, (1992) mostram se preocupados com a abordagem do ensino de álgebra. Estas abordagens se mostrarão mais claras nas análises de livros didáticos.

3 O PERÍODO DAS DUAS REFORMAS: FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA

3.1 O ensino de Álgebra nas Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema

A Álgebra é uma ramificação da matemática. A mesma está presente desde os primórdios da civilização uma vez que auxilia na solução de problemas matemáticos. Esta parte fundamental da Matemática vem se desenvolvendo de acordo com as suas necessidades, o ensino desta, leva em conta a dificuldade sentida pelos inúmeros estudantes.

Povos antigos como os gregos, babilônicos, à medida que evoluíram, precisavam entender mais sobre álgebra, pois esta é fundamental na compreensão da Matemática. Com o passar do tempo, foram encontradas dificuldades, então esses povos tiveram que ajudar a solucionar o ensino algébrico uma vez que os mesmos evoluíram socialmente. Logo veremos a forma gradual como o ensino da álgebra evoluiu, contendo toda contribuição da sociedade. Reformas de educação e aspectos políticos também são exemplos de maneiras de melhorar o ensino da Matemática e logo, da álgebra.

Será trabalhado um período específico da história em que reformas, políticas e leis ditaram o ensino da Matemática, em especial o da álgebra a luz de uma percepção particular do ensino de álgebra nos dias atuais, assim poderá ver-se conclusões acerca do ensino da mesma.

Existiram grandes nomes e autores no ensino de álgebra, tais como Euclides Roxo, Júlio César de Melo e Souza, os quais foram engenheiros que passaram a atuar na área educacional (DASSIE; CARVALHO, 2010). O primeiro foi autorizado a lecionar no Colégio Pedro II, e durante sua trajetória revolucionou o ensino desta escola através de programas educacionais. Além disso, publicou diversos livros didáticos de matemática e esteve a frente principalmente da reforma Francisco Campos e em seguida, foi um dos nomes da reforma Gustavo Capanema (DASSIE, 2008). Já Melo e Souza, obteve como principal contribuição no ramo da educação as atividades literais. Destacamos que um dos seus propósitos principais era diluir o rigor e formalidade que era existente nas salas de aula de matemática (SOUSA; FOSSA, 2014).

Outros nomes, claramente importantes foram Francisco Campos e Gustavo Capanema, ministros da educação que apoiaram e aprovaram, as reformas que levaram seus respectivos nomes, primeiro a reforma Francisco Campos e posteriormente, Gustavo Capanema. Sobre o período das reformas podem se considerar que houve a chamada Revolução de 30 que deixou seus rastros em diferentes âmbitos no Brasil. Logo, atingiu-se o campo educacional.

> As tentativas de reforma do ensino vinham da década de 1920, caracterizando-se nesse período por iniciativas no nível dos Estados, o que correspondia ao figurino da República federativa. A partir de 1930, as medidas tendentes a criar um sistema educativo e promover a educação tomaram outro sentido, partindo principalmente do centro para a periferia. Em resumo, a educação entrou no compasso da visão geral centralizadora. Um marco inicial desse propósito foi a criação do Ministério da Educação e Saúde, em novembro de 1930. (FAUSTO 2006, apud DASSIE, 2008, p.133).

Acerca da reforma Francisco Campos, é importante entender um fato histórico: O trabalho de Euclides Roxo, levou a implementação de um processo de construção dos blocos de conteúdos para o ensino da matemática nos anos do curso secundário (DASSIE, 2008). Este processo foi interrompido pela reforma Francisco Campos (1931).

No contexto da época achava se necessário, uma reforma na educação pois, como descrito por Dallabrida (2009, p.1) A Reforma Francisco Campos (1931), estabeleceu a modernidade requerida para a época. Ou seja, foram pensadas e adotadas uma série de medidas como aumentar o ensino secundário, organizando o mesmo em dois ciclos, frequência obrigatória, sistema regular de avaliações dos alunos, dentre outras medidas que tornou-se necessário interromper os programas de conteúdos para deixar o ensino secundário mais adequado ao capitalismo industrialista dá época, podendo então ver, influências sociais.

Segundo Dassie (2008), uma das propostas dessa reforma, foi dividir o ensino, chamado secundário, em duas etapas: o Curso Fundamental, de cinco anos, e o Curso Complementar, de dois anos que ainda possuía três ramificações distintas. Ponto este descrito no capítulo anterior. Mesmo que a reforma tenha interrompido os programas propostos por Roxo, ele ainda é grande nome, novamente, na elaboração das propostas para o ensino da Matemática.

Houve modificação na educação, nos anos seguintes, em 1942, com a reforma Gustavo Capanema implantada. Mudou-se a estrutura imposta pela reforma Francisco Campos, embora ainda muitos pontos se assemelhem. O curso secundário passou a ter duração de sete anos, divididos também em duas partes, o Curso Ginasial, em quatro anos, e a ramificação dos Cursos Clássico e Científico, com três anos. (DASSIE, 2008 p.136) como visto no capítulo acima. Pois a sociedade requeria esse modelo científico característico do período.

Como relação ao ensino de álgebra é possível perceber, através da observação de livros da época, que alguns conceitos se mostram prioritários em relação a outros. Um bom exemplo pode ser notado na organização dos conteúdos do livro Mathematica Elementar (ROXO, 1931)[2]

[2] Para a análise de livros didáticos não selecionamos este livro pois este foi criado bem no início da reforma Francisco Campos, e optei por um que estivesse mais por dentro do período que compreende a reforma Campos.

Este livro era um dos mais utilizados na época e podemos notar uma tendência industrialista na disposição de conteúdo. Além disso, esses tipos de livros apresentavam uma tendência de normatizar a álgebra, como, por exemplo, neste trecho do livro:

> 76. Notação para o número desconhecido. – Embora se possa empregar qualquer lettra para representar a incógnita, usam-se, de preferencia, as lettras x, y, z ou qualquer das ultimas lettras do alphabeto; as primeiras lettras, a, b, c, m e p são geralmente usadas para representar quantidades conhecidas; costuma-se, entretanto, muitas vezes, representar o valor desconhecido da quantidade, pela lettra inicial do nome desta: n, número; c, comprimento; p, peso. (ROXO, 1931 p.47).

Note que o que chamamos apenas de incógnita era abordado em alguns livros didáticos por número desconhecido.

Já em outro livro didático referente ao segundo ciclo do ensino secundário, intitulado: Pontos de Álgebra, temos a seguinte disposição de conteúdos: Analise combinatória, Arranjos, Permutações e Combinações, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal, Funções, Limites, Derivadas, Diferenciação, Aplicações da derivada, Derivadas sucessivas Máximos e Mínimos, Estudo das Funções, Equações de curvas, Séries, Integração, Primitivas imediatas, Integral definida, Quadraturas.

Ao prestar atenção na disposição de conteúdo, percebe-se que o mesmo tinha um caráter preparatório para um mercado engenheiro, pois os conteúdos são mais técnicos e visto hoje nos cursos superiores de engenharia. O objetivo, como podemos perceber é atender as demandas da sociedade no momento em que se encontra.

O contexto algébrico depende dos requisitos impostos pelo período em que é inserido. Nos próximos capítulos veremos a disposição de outros livros didáticos, de outros autores que seguiam a mesma linha de ideias referentes a época inseridas.

Não podemos deixar de citar como eram divididos o ensino secundário em cada reforma. No capítulo anterior foi falado um pouco sobre os conteúdos que abrangem essa divisão, agora vejamos como eram, detalhadamente essas divisões e como as mesmas afetavam no ensino de matemática.

A reforma Francisco Campos apresenta mais do que a disposição citada acima. Silva Souza (2012), afirma que desde o período de 1925 o ensino secundário era dividido em seis anos e o principal objetivo era oferecer preparo fundamental para a sobrevivência social. Assim após a conclusão deste curso, o estudante recebia o diploma de bacharel em ciências e letras, uma vez que estava disposto no currículo as ciências e línguas estrangeiras além da nossa língua nativa.

Contudo, a Reforma Francisco Campos dividiu o ensino secundário em dois ciclos (que já foi definido como curso fundamental e complementar), em um currículo organizado por séries e a frequência deveria ser obrigatória, implicando no fato de o aluno não poderia ter frequência na escola igual ou maior que três quartos do total de aulas ministradas

em cada ano, além disso, as aulas deveriam ser lecionadas por professores com diplomas reconhecido pelo Ministério da Educação e Saúde Pública. (SILVA SOUZA, 2012)

Outro autor que discute as novas medidas impostas pela educação para esse novo período da Reforma Francisco Campos é Pereira (2008). Esta autora diz que o fato de ser obrigado a conclusão do ciclo fundamental do curso Secundário, Fundamental para ingressar no Ensino Superior, conforme previa esta nova reforma, Francisco Campos de 1931, fez com que o ensino secundário pudesse obter certa constância ao Curso Fundamental e consequentemente as suas disciplinas.

Sobre o ciclo complementar, pude relevar a consideração abaixo que diz:

> O Ciclo Complementar, de caráter propedêutico, ou seja, um curso preparatório conforme grau de especialização para ingresso nas Faculdades de Direito, Ciências Médicas e Engenharia, em dois anos (silva Souza, 2012, p.328)

Assim, podemos perceber que durante a reforma Francisco Campos o ensino sofreu alterações no sentido em que a frequência obrigatória nos permite perceber uma outra perspectiva para o ensino naquela época. Atualmente percebemos que, quanto maior o contato com a disciplina de matemática, mais efetiva é a aprendizagem. Além disso, possuímos os ensinos fundamentais e médio como pré-requisito para o ingresso em uma universidade, mas antigamente, nesse período específico, o ensino ganhou novo patamar ao ser necessário para o ensino superior, acredito que isso fez com que os alunos admitissem mais compromisso com as disciplinas, em particular a matemática.

A ideia de um curso complementar como preparatório para o ensino superior é bem característica da época em especial nas áreas citadas acima visando um mercado para atender as demandas do capitalismo industrial. No entanto, esta modalidade de ensino é bem diferente da que temos hoje uma vez que a preparação para as universidades hoje em dia é feita de modo paralelo a escola através de pré-vestibulares.

Na reforma Gustavo Capanema, podemos inferir as seguintes considerações: O aumento no curso secundário que continuou sendo dividido em dois ciclos, porém agora contendo obrigatoriamente os sete anos que compõem o ensino secundarista, novamente subdividido em dois ciclos (o curso ginasial seguido do curso clássico ou científico) (DASSIE, 2008).

De acordo com Zotti (2006), o curso ginasial passa a ampliar seu currículo distribuindo o então conjunto de disciplinas em três grandes áreas, assim descritas: Línguas, Ciências e Artes. Sendo um ano mais curto, o segundo ciclo representava os cursos clássico e científico e tinha por intuito consolidar o que se havia aprendido durante o primeiro ciclo e aperfeiçoar toda a formação do intelecto do discente, contendo um estudo mais aprofundado da filosofia e das letras e a exemplo do primeiro ciclo as disciplinas também foram rearranjadas de acordo com as áreas do curso ginasial, sendo elas: Línguas, Ciências e Filosofia e Artes.

A visão de Zotti (2006) quanto a ciência matemática busca a introdução da cultura científica a qual iria fomentar ideais para o crescimento voltado para o os estudos universitários seja qual for a área pretendida, logo a intuito era generalizar os estudos científicos a fim de deixa-lo amplo e não permitir que a ciências modernas fiquem afixadas aos métodos das antigas civilizações, o que prejudicaria a evolução dessa ciência, pois perderia sua objetividade e instrumentalidade e toda a sua ideia de ser solucionadora dos problemas construídos pela sociedade moderna.

Portanto podemos perceber que a organização do ensino secundário afeta necessariamente na forma de se ensinar os conteúdos, quando foi falado sobre experiências e instrumentalidade, podemos associar com a nossa atual realidade em que o contexto e aulas experimentais são bastante discutidos, como foi citado no capítulo anterior em preocupações com o ensino da álgebra.

É perceptível também que no segundo ciclo, o curso científico apresenta mais ênfase na área de exatas do que o clássico. Assim os conteúdos algébricos, bem como o geométrico ou trigonométricos poderiam ser abordados de maneira mais aprofundada. Veremos melhor ao analisar os livros didáticos, as diferenças entre os cursos clássicos e científicos, por exemplo.

3.2 Leis, Cartas de Leis e Livros Didáticos das Reformas citadas

Além das reformas, leis e cartas de leis foram adotadas, a saber: Decreto n. 19.890 de 18/04/1931 que descreve sobre a organização do ensino secundário, professores e inspeção do ensino secundário e a Lei Orgânica do Ensino Secundário - Decreto-Lei n. 4.244 de 09/04/1942 que trata das bases e organização do ensino secundário, da estrutura do ensino secundário, o ensino secundário feminino e organização escolar. Nas ideias político-educacionais de Francisco Campos acreditava-se que uma reforma social necessitava para efetivar-se através de uma reforma escolar e da construção de um cidadão que atende às necessidades da época. Assim desde a educação o indivíduo é moldado para a sociedade.

Baseada em Zotti (2006 p.4), a reforma do Ensino Secundário, realizada através do Decreto nº 19.890/1931 e consolidada pelo Decreto nº 21.241/1932, segundo Francisco Campos, foi feita para aperfeiçoar o ensino em bases diferentes das já existentes, a fim de ser mais do que um ensino preparatório como estamos acostumados, deveria, além disso, introduzir de maneira efetiva uma função educativa, moralista e intelectual do estudante das séries secundárias. O objetivo, em suma, era impor a este ensino, a função de preparação do estudante para sua satisfatória e palpável integração na sociedade, pois isso era tão importante quando avançar de séries que começava a fazer-se de forma mais complexa e dinâmica. Isso foi pensado pois o período em questão era industrial. Assim, adequava-se o ensino com o desenvolvimento industrial.

Também é ressaltado por Zotti (2006 p.5) em outras palavras, que a reforma

Gustavo Capanema seguiu a reforma Francisco Campos, no caso, as propostas, relacionado ao ensino brasileiro. Deveria este, ser um ensino público para atender a elite condutora do país e ainda, um ensino profissionalizante, como visto nas propostas da reforma campos. O objetivo era destinar esta modalidade de ensino para a classe trabalhista. Capanema continua com a preparação de meios para renovar o ensino secundário visto na reforma Campos, porém destaca-se o ensino secundário como específico e organizado. "A definição completa e acabada do ensino secundário como um tipo específico de ensino, perfeitamente caracterizado por seus objetivos, seu currículo e sua organização geral" (SILVA,1996, p.294 apud ZOTTI, 2006, p. 6).

Um bom produto que nos auxilia a entender o ensino algébrico que se instituiu na época são os livros didáticos. Sobre eles, podemos considerar que:

> Após a promulgação da reforma Campos e, posteriormente da reforma Capanema, diversos autores se aventuraram na escrita de livros didáticos de matemática para o curso secundário. Podemos citar, por exemplo, Agrícola Algacyr Munhoz Maeder, Ary Quintella, Bethlem, Talles Mello Carvalho e outros (DASSIE, 2008, p.174).

Dassie (2008) relata que em particular, a coleção iniciada por Cecil Thiré e Mello e Souza muda de nome, após a reforma Campos, para Curso de Mathematica e Euclides Roxo passa a ser co-autor, inicialmente a partir do terceiro volume, mas alguns anos depois, o segundo volume, por exemplo, é reelaborado pelos três autores e passa também a compor essa coleção, pois eram muito comum a questão de coleções de livros com diferentes volumes. Após a reforma Capanema, esta coleção passa a atender somente o primeiro ciclo e o nome é alterado para Matemática Ginasial. Mudanças que ocorrem com as demandas de cada época.

Outro dado, muito interessante sobre os livros didáticos, e que Dassie (2008) também descreve, é que entre essas reformas foi criada a Comissão Nacional do Livro Didático, como ordena o decreto n. 1006 de 30 de dezembro. Essa lei determinava que os livros didáticos que fossem utilizados em qualquer nível de escolarização, deveriam ser analisados por essa comissão.

muitas conclusões se pode tirar sobre os livros e essa pesquisa tem por meta, avaliar os livros didáticos de alguns desses autores principais e verificar, como a álgebra é abordada em cada um e quais eram os conteúdos.

O decreto de lei n. 19.890 de 18/04/1931, já citado anteriormente, apresenta os seguintes parágrafos que merecem destaque, já que os mesmos, auxiliam na linha de raciocínio para o que realmente foi relevante na trajetória do ensino da álgebra entre essas reformas e as aproximações com o ensino atual da mesma no Brasil.

> Art. 7º. Para os candidatos á matricula nos cursos de engenharia ou architectura são disciplinas obrigatorias: 1º serie: Mathetica - Physica - Chimica - Historia natural - Geographia e Cosmographia - Psycologia e

> Logica. 2º serie: Mathematica - Physica - Chimica - Historia natural - Sociologia - Desenho. (BRASIL, 1931, p.1)

Este parágrafo evidencia a relação forte da Matemática como pré-requisito para seguir um mercado engenheiro. Assim, diferente de hoje a matemática e por sua vez a álgebra, estão diretamente ligadas com o ensino superior, na reforma Campos.

> § 1.º Emquanto não houver número sufficiente de licenciados pela Faculdade de Educação, Sciencias e Lettras, com excercicio no magisterio em estabelecimentos de ensino secundario officialmente fiscalizados, serão mantidos, annexos aos institutos superiores officiaes ou equiparados, os cursos complementares respectivos. (BRASIL,1931, p.2)

Este parágrafo trata da nova e importante regra a ser obedecida até os dias atuais que é a obrigatoriedade de licenciados para ministrar os cursos equivalentes hoje aos nossos ensinos fundamentais e médio. Essa regra já foi discutida anteriormente no capítulo II.

Esta modalidade diz respeito a uma maior organização do ensino de maneira geral, uma vez que dispomos de regras para padronizar o ensino, com isso era necessário que novas regras fossem feitas, para que se tenha a certeza da efetividade da necessidade da reforma.

É essencial deter um certo respaldo sob a lei vigente e estes trechos da lei exemplificam de forma clara o que já havia sido citado acima sobre a Reforma Francisco Campos. O mesmo poderá ser feito com a Reforma Gustavo Capanema a fim de exemplificar através da lei vigente no período desta reforma. Desta forma, segue abaixo alguns trechos da lei que refutam a presente pesquisa.

> Art. 4º O curso clássico e o curso científico, cada qual com a duração de três anos, terão por objetivo consolidar a educação ministrada no curso ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. No curso clássico, concorrerá para a formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia, um acentuado estudo das letras antigas; no curso científico, essa formação será marcada por um estudo maior de ciências. (BRASIL, 1942 P.2)

Este parágrafo reforça a ideia de que o curso Científico tinha um maior aprofundamento no ensino da matemática e mais avançado diferente do curso clássico. Ou seja, a álgebra era mais desenvolvida nos cursos científicos, não julgando se a mesma era boa ou ruim, apenas era mais aprofundada nessa modalidade de curso.

Além do artigo acima, podemos ainda ter nos trechos abaixo uma ideia que reforça o que foi descrito anteriormente sobre o desenvolvimento mais aprimorado da matemática e consequentemente da álgebra para a reforma Gustavo Capanema, particularmente no curso científico.

> Art. 14. As disciplinas constitutivas do curso clássico terão a seguinte seriação: Primeira série: 1) Português. 2) Latim. 3) Grego. 4) Francês ou

> inglês 5) Espanhol. 6) Matemática. 7) História geral. 8) Geografia geral. Segunda série: 1) Português. 2) Latim. 3) Grego. 4) Francês ou inglês 5) Espanhol. 6) Matemática. 7) Física. 8) Química. 9) História geral. 10) Geografia geral.
>
> Terceira série: 1) Português. 2) Latim. 3) Grego. 4) Matemática. 5) Física. 6) Química. 7) Biologia. 8) História do Brasil. 9) Geografia do Brasil. 10) Filosofia.
>
> Art. 15. As disciplinas constitutivas do curso científico terão a seguinte seriação: Primeira série: 1) Português. 2) Francês. 3) Inglês. 4) Espanhol. 5) Matemática. 6) Física. 7) Química. 8) História geral. 9) Geografia geral. Segunda série: 1) Português. 2) Francês. 3) Inglês. 4) Matemática. 5) Física. 6) Química. 7) Biologia. 8) História geral. 9) Geografia geral 10)Desenho.
>
> Terceira série: 1) Português. 2) Matemática. 3) Física. 4) Química. 5) Biologia. 6) História do Brasil. 7) Geografia do Brasil. 8) Filosofia. 9) Desenho. (BRASIL, 1942)

e ainda em:

> Art. 17. As disciplinas comuns aos cursos clássico e científico serão ensinadas de acordo com um mesmo programa, salvo a matemática, a física, a química e a biologia, cujos programas terão maior amplitude no curso científico do que no curso clássico, e a filosofia, que terá neste mais amplo programa do que naquele (BRASIL, 1942)

Assim, temos noção do que representou a criação dessas reformas baseadas em documentos que reflitam as ações para o ensino desses períodos, em particular através das leis que ditam a forma que deve se direcionar o ensino, em relação dos interesses e discussões de cada período.

4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA ATUALMENTE(1990-2019)

É inegável que uma descrição de um período histórico é impregnada pela visão de quem elabora a narrativa. No caso de uma narrativa sobre o ensino de álgebra, a visão do autor sobre o papel deste trabalho atualmente exerce forte influência sobre as conclusões estabelecidas sobre o período em questão. Este capítulo se preocupa em apresentar o modo como esta pesquisa compreende as características do ensino de álgebra, de modo a explicitar nosso lugar de fala nas narrativas sobre o mesmo nas reformas campos e Gustavo Capanema.

4.1 O ensino de Matemática atualmente

De acordo com Santos (2007), o ensino de álgebra é considerado, por pedagogos e professores, complexo. Este fato tem influenciado uma perspectiva cada vez mais associada ao cotidiano dos estudantes. Além disso, muitas discussões são feitas por profissionais da educação em relação a recursos e metodologias para o ensino da matemática com o fim de tornar a álgebra mais compreensível. Essa preocupação com contexto e até de novas abordagens de ensino é vista tanto em sala de aula quanto nos próprios livros didáticos.

Podemos ver ainda que nos cursos de licenciatura em matemática, tem uma visível preocupação com como é abordada a matemática em sala de aula, tendo várias matérias pedagógicas que abrange o ensino de conteúdos matemáticos através de metodologias ou aulas dinâmicas.

Com todas essas discussões sobre tornar a Matemática mais acessível, podemos notar que a matemática então vem conquistando seu espaço como disciplina no meio social. Segundo Cândido (2001), para que a aprendizagem seja efetiva, a mesma deve ser significativa e relevante, para então se compreender através de seus significados, isso permite relações com experiências anteriores, vivências pessoais e outros conhecimentos, abrindo para o entendimento de problemas de algum modo desafiantes, que façam com que o aluno queira aprender mais. Estudar e discutir sobre tornar a matemática mais acessível, é um ponto positivo na evolução da educação matemática, apesar de ainda termos que evoluir muito na educação brasileira.

Atualmente, temos pelas leis para a educação brasileira a seguinte divisão da educação básica, segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, 1996)

- Educação infantil: 0 a 6 anos - sete anos de duração;
- Ensino fundamental: 6 a 14 anos - nove anos de duração;

- Ensino médio: 15 a 17 anos – três anos de duração e/ ou ensino médio técnico-concomitante com o ensino médio em período de contraturno, geralmente, com duração de a 1 a 3 anos.

Vale ressaltar que a Educação Básica, pela constituição brasileira é direito de todo cidadão, sendo a mesma obrigatória para todos nas correspondentes faixas etárias. Assim, é dever do estado ou município, promover a educação básica para todos.

Já podemos perceber, que para cada período que abrange este trabalho, as divisões para a educação se manifestam de forma diferente. Sendo assim, não é possível comparar o ensino pelas divisões que o mesmo apresenta, uma vez que são diferentes, mas podemos comparar por equivalência. Por exemplo: os anos finais do curso fundamental da reforma Francisco Campos, com os cursos clássicos e científicos da reforma Gustavo Capanema e o ensino médio de hoje em dia são séries equivalentes tendo em vista que as mesmas têm caráter obrigatório e são pré-requisito para ingressar no ensino superior ou mesmo no mercado de trabalho. Também podemos ver aproximações dos cursos clássicos ou científicos com o ensino médio já que ambos compreendem três anos para a conclusão e são ministrados imediatamente antes do ensino superior. Fora o fato de leis que obriguem frequência obrigatória e preparação para o ensino superior.

Outra consideração importante quanto a estrutura de ensino que pode interferir no ensino de conteúdos da álgebra é o número de aulas destinadas à disciplina de Matemática. segundo informações do site do Ministério de Educação e Cultura, nos primeiros anos do Ensino Fundamental há um tempo maior para que se trabalhe toda a base necessária para inserir o docente no ensino de Matemática, porém já no quarto ano e quinto ano há uma redução para cinco tempos e consequentemente uma redução na carga horário que torna a ocorrer novamente do sexto ao nono ano e novamente uma queda na carga horária. Após a conclusão do Ensino Fundamental, o discente ingressa no Ensino Médio tendo a mesma carga horária presente ao final do fundamental, e nos dois próximos anos novamente há uma nova redução, logo o docente que iniciou a carreira escolar podendo explorar a matemática em 280 horas semanais, conclui o Ensino Médio com apenas 160 horas semanais, tendo uma redução significativa, de acordo com o site do portal MEC, na carga horária e isso influencia em muitos âmbitos na aplicação do ensino matemático.

Existe mais tempo destinado as aulas no Ensino Fundamental, sendo assim, poderia ser mais trabalhado os conteúdos algébricos, porém a geometria, mesmo que com pouca frequência, como vejo em minhas experiências em sala de aula, aparece entre os conceitos matemáticos do ensino fundamental e além disso o primeiro ano poderá ter mais conteúdos algébricos que os outros dois do ensino médio, uma vez que possui maior quantitativo de aulas. É muito importante que a abstração seja bem trabalhada no ensino fundamental e a contextualização poderá ser feita muitas vezes com as aulas de geometria.

Nos períodos de ambas as reformas citadas neste trabalho, vimos que uma das

propostas das reformas era unificar o ensino da álgebra, geometria e aritmética, porém, conforme diz Telo e Schubring (2018), alguns livros didáticos, continuaram a apresentar as ramificações matemáticas de forma separada. Além disso, a matemática estava diretamente relacionada com a disciplina de desenho para refutar aquele caráter tecnicista proveniente do período. Um paralelo com o nosso período atual, é que mesmo que o livro de matemática seja único, em algumas salas de aula, que tive a oportunidade de conhecer, a geometria e a álgebra, são ensinadas de forma avulsa.

Hoje, o ensino não é mais tão técnico quanto o que foi apresentado anteriormente. Para os que assim desejarem, existe atualmente, a modalidade de ensino médio técnico, esta não interfere no ensino médio comum, corresponde ao mesmo tipo de ensino, porém, no contraturno são ensinadas matérias técnicas dependendo do curso em que se queira. Como por exemplo, as escolas técnicas.

Levando em conta que o ensino não é prioritariamente técnico, como é ensinada a matemática hoje? Para que esta pergunta seja respondida, foi levado em conta as considerações de D'Ambrósio (1989):

> Optamos pelas propostas que colocam o aluno como o centro do processo educacional, enfatizando o aluno como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento. Propostas essas onde o professor passa a ter um papel de orientador e monitor das atividades propostas aos alunos e por eles realizadas. Estas propostas partem do princípio de que o aluno está constantemente interpretando seu mundo e suas experiências e essas interpretações ocorrem inclusive quando se trata de um fenômeno matemático. São as interpretações dos alunos que constituem o saber matemática "de fato". (D'Ambrósio, 1989, p.16)

Analisando o trecho acima podemos perceber que a autora quer revelar métodos para o aluno aprender matemática de forma que o mesmo pense em vez de reproduzir, que o mesmo seja o centro do processo de aprendizagem, principalmente da álgebra tendo em vista que a mesma precisa ser pensada e relacionada ao invés de reproduzida. Estes métodos mencionados pela autora para dinamizar o ensino e otimizar a aprendizagem matemática são as metodologias para o ensino da matemática: Resolução de Problemas, Modelagem, Etnomatemática, História da Matemática, Uso de computadores e Jogos matemáticos. Todas essas são métodos de se ensinar matemática de formas diferenciadas, mas em que o aluno esteja no centro do processo de aprendizagem.

Estes métodos mencionados acima foram pensados para tornar a aprendizagem mais efetiva uma vez que a mesma estava demonstrando um caráter excessivamente reprodutivo, o que preocupava educadores ao longo do tempo. Acerca da álgebra atualmente, podemos ver algumas mudanças ocorridas na matemática desde a época pesquisada até o ano vigente. Hoje podemos perceber que o ensino da álgebra é pensado no cotidiano do aluno. Isso pois a álgebra é considerada por muitos pedagogos e professores de matemática como um conceito complexo destinado ao aluno.

Antes de destacarmos as leis que vigoram atualmente, é preciso estabelecer o que é algebra no período de 1990 a 2019, isto é, como a mesma é vista, pois esta visão interfere diretamente em nossa análise de títulos das décadas de 1930 e 1940.

segundo Ferreira (2009), não é viável responder o que é álgebra uma vez que não dispomos de uma resposta simples. Porém, segundo o mesmo autor, podemos destacar caracterizações da atividade álgebrica que são: Tendência letrista: caracterização pela evolução histórica de algumas notações da álgebra, isto é: "descrever a álgebra através do processo histórico de desenvolvimento das notaçõesalgébricas"(FERREIRA, 2009, p. 39)

temos também mais outras três caracterizações que são: Tendência conteudista, Segundo Lins e Gimenez (1997), apud Ferreira (2009) esta tendência descreve a álgebra a partir de uma lista de objetos matemáticos que foram julgados como álgebra. Tendência de ação, modelo de caracterização como resultado da ação do pensamento formal e por fim, Tendência conceitual que é caracterização através de campos conceituais, modelo de estudo daálgebra criado pelo pisicólogo G. Vergnaud. Assim, vemos hoje uma tendencia de caracterizar a álgebra nos padrões descritos acima para então determiná-la.

4.2 Leis, Cartas de Leis e Livros Didáticos da atualidade

Atualmente, como leis da educação temos: Lei de diretrizes e bases para a educação (LDB 1996), Plano Nacional de Educação (PNE 2011), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e a mais recente, Base Nacional Comum curricular (BNCC 2017). Logo já podemos ver diferenças no quantitativo de leis e planos para a educação, apesar de a reforma Gustavo Capanema ter sido baseada em oito decretos, para as duas reformas como documentos oficiais para a educação eram decretos de lei e os programas de conteúdos para o Colégio Pedro II. No atual período, existem muitas leis de maneira geral e com o passar do tempo, a estrutura legislativa de nosso país vem sofrendo mudanças.

Segundo o site portal do Ministério de Educação e Cultura (MEC) e do planalto.gov, a contribuição que a LDB tem para a educação no Brasil durante todos os seus anos de vigência é essencial e completamente relevante. É função da mesma regulamentar a estrutura e o funcionamento do sistema de educação brasileiro, a LDB tem por objetivo revelar metas a serem atingidos e a LDB reforçou o caráter federativo da educação brasileira.

Ainda sobre a LDB, apesar de a mesma ser considerada a carta magna da educação brasileira, a mesma não funciona sozinha, isto é, apesar dos outros documentos citados nesta sessão funcionarem concomitante com a LDB, as mesma ainda cita em seu próprio corpo legislativo a necessidade de uma outra documentação educacional pra servir de base para os ensinos das disciplinas nas escolas.

Junto com a atual LDB, tempos vigorando o PNE. Segundo o Ministério da Educação (MEC) O PNE, é um conjunto de metas e diretrizes, divididas em quatro grupos

distintos, para a educação em um período de dez anos. Os quatro grupos se dividem em metas para promover ensino de qualidade a todos os cidadãos e padronização do ensino; redução das desigualdades e valor às diversidades; valorização dos professores e equipe pedagógica e por fim, o ensino superior. Entre as metas previstas no PNE, destacam-se:

> Universalizar, para a população de 4 (quatro) a 17 (dezessete) anos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação, o acesso à educação básica e ao atendimento educacional especializado, preferencialmente na rede regular de ensino, com a garantia de sistema educacional inclusivo, de salas de recursos multifuncionais, classes, escolas ou serviços especializados, públicos ou conveniados. (BRASIL, 2014, P.1).

Este é um destaque uma vez que discussões sobre aprendizagem significativa e inclusão escolar são discussões recentes e que como interferem diretamente no ensino, interferem então no ensino de álgebra. Assim o mesmo deve ser transmitido de modo a atender as necessidades exigidas pelo período em que vigora.

Destacamos portanto, como medida atual para a educação, a educação inclusiva, que visa diminuir o maior número possível de escolas especiais e promover de forma mais efetiva a inclusão, ou seja, conviver em escola regular alunos com deficiência e sem deficiência. Para isso a lei nº 13.146, Estatuto da Pessoa com Deficiência, aprovada em 06 de julho de 2015 e vigorada no dia 02 de janeiro de 2016 tem por meta garantir e promover o exercício do direito e igualdade das pessoas com deficiência para ser possível a inclusão social da criança no meio escolar.

Assim o PNE assume a importância prevista neste Estatuto, promovendo ações para decretar a educação inclusiva, como em: "Oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos (as) alunos (as) da educação básica"(BRASIL, 2014, P.1).

Essa é uma tentativa de melhorar o ensino de maneira geral nas escolas uma vez que fosse possível mais tempo no ambiente escolar do estudante. Os PCN's são um conjunto de documentos que basicamente, parametriza os currículos destinadas as cada série e disciplina da educação básica. Estes são divididos em ensino fundamental e ensino médio e ainda se dividem por disciplinas. Abaixo vemos a definição deste documento para o ensino fundamental, a partir do próprio.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual. [...] Entretanto, se estes Parâmetros Curriculares Nacionais podem funcionar como elemento catalisador de ações na busca de uma melhoria da qualidade da educação brasileira, de modo algum

> pretendem resolver todos os problemas que afetam a qualidade do ensino e da aprendizagem no País. (BRASIL, 1997, p.13)

Desta maneira, notemos o papel que o PCN tem para a educação brasileira, o PCN do ensino médio tem uma definição similar a apresentada acima, que consta a definição do documento para o ensino fundamental. Sobre o ensino médio, o próprio PCN diz:

> O currículo, enquanto instrumentação da cidadania democrática, deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o ser humano para a realização de atividades nos três domínios da ação humana: a vida em sociedade, a atividade produtiva e a experiência subjetiva, visando à integração de homens e mulheres no tríplice universo das relações políticas, do trabalho e da simbolização subjetiva. (BRASIL, 2000, p. 15)

No PCN (2000) temos ainda a preocupação com a vida em sociedade, trabalho e experiência subjetiva. No presente momento, como o foco principal deste trabalho é a álgebra é importante que se dê destaque para os PCN's de Matemática. Desta forma, apresentamos as discussões deste documento sobre este campo da matemática.

De acordo com o PCN de Matemática para o terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental existem ainda dificuldades a serem enfrentadas no atual cenário da educação brasileira como a formação profissional qualificada, restrições ligadas às condições de trabalho, ausência de políticas educacionais que realmente funcionem e até mesmo equivocadas interpretações pedagógicas. Sobre este último, o PCN exemplifica como o método de resolução de problemas que em essência é pouco conhecido é muitas vezes utilizado como problemas cujo a solução é obtida apenas com escolhas técnicas ou memorização de métodos pelos alunos.

Este documento, revelando preocupações sociais nos diz que a matemática pode contribuir com a cidadania desenvolvendo metodologias que possibilitam desenvolver estratégias, comprovação, resultados justificados corretamente, criatividade e capacidade de enfrentar desafios. Como já vimos que a álgebra auxilia no desenvolvimento cognitivo do aluno, e é uma ramificação da matemática, então um bom ensino de conteúdos algébricos auxilia no desenvolvimento dos estudantes enquanto cidadãos. "Para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc." (BRASIL, 1997, p. 27).

É importante que se faça uma articulação da Matemática com temas transversais. Existem conteúdos matemáticos que fornecem instrumentos para obter informações, interpretar as mesmas, calcular e produzir argumentos para defender tal informação. (BRASIL, 1997) assim é importante contextualizar a matemática, em especial a álgebra pois é fundamental que as disciplinas aprendidas na escola sejam vinculadas ao cotidiano uma vez que é necessário que a escola construir seres sociais.

A exemplo disso, o PCN, (1997) sugere por exemplo que podemos abordar estatística com os dados comparativos entre os salários de homens e mulheres que exercem

a mesma função trabalhista e ainda para abordar a pluralidade cultural, podemos usar da metodologia da história da matemática para ensinar através da origem da álgebra, a linguagem algébrica com referências ao período Babilônico e macedônico e também com outra metodologia conhecida como a etnomatemática. Por exemplo, o trabalho de Luis Ortiz Franco (1998, apud Santos 2004), sobre como podemos usar o sistema numérico dos Astecas Mexicanos no ensino das propriedades comutativas, associativas e distributivas da álgebra e, assim, integrarmos sistemas não decimais no ensino de Matemática

Similar a ideia de visão matemática do PCN do ensino fundamental, o PCN do ensino médio, embora descrito de maneira diferenciada do mesmo documento do fundamental também apresenta aspectos da percepção do aluno sobre o que é a matemática. Segundo o PCN de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2000), é realmente necessário que o aluno veja a Matemática como um sistema que abrange códigos e regras que desenvolva a comunicação de modo a facilitar a interpretação da realidade. E sobre a álgebra, o mesmo diz que esta é uma subárea matemática, bem como a geometria ou probabilidade estatística, mas que visa interpretar sistema de códigos. "Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas" (BRASIL,2000 p. 40)

Conforme observado no PCN de matemática do ensino fundamental, existem preocupações recorrentes com contextualizações, inserção em sociedade, cultura e dentre outras que também são especificadas nos objetivos do ensino da matemática para o ensino médio e consequentemente, há interferência direta na álgebra uma vez que o próprio PCN (2000) a considera como subtópico da matemática. Abaixo segue listado os objetivos mencionados.

> As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a: • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; (BRASIL, 2000 p.127)

E mais os tópicos abaixo

> utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; reconhecer representações equivalentes de

> um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.(BRASIL, 2000, p.127)

O PCN (2000) também diz que as matérias das ciências exatas e matemáticas do Ensino Médio têm que haver tempo hábil para que os estudantes possam esclarecer e aprimorar seu aprendizado sobre a álgebra, mas não de forma isolada dos demais conceitos matemáticos, nem separado dos problemas e visão sócio histórica no qual originam esses temas. Estes, estão ligados ao desenvolvimento de habilidades relacionadas à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática, neste caso a álgebra, na interpretação e intervenção da sociedade.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC 2017) é o documento mais atual para a educação. De acordo com o site do Ministério de Educação e Cultura (MEC) a BNCC é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens que o aluno deve tomar ao longo da educação básica e todas as modalidades educativas que a mesma desenvolve. Optamos por apresentar maior enfase na LDB 1996 E PCN'S pois os mesmos existem a mais tempo, contrário à BNCC 2017 que é bastante recente.

5 METODOLOGIA

5.1 A pesquisa bibliográfica

Existem diversos tipos de pesquisa, as quais podemos tomar como exemplo: pesquisas experimentais, documentais e pesquisa bibliográficas. De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), a escolha do método de pesquisa é parte fundamental da elaboração de um trabalho acadêmico. Além disso, estes autores afirmam que é possível agrupar os dados de pesquisas qualitativos e quantitativos para se conceber uma pesquisa. Nesta seção nos concentraremos na descrição de dois tipos de pesquisa: Bibliográfica e Documental. Uma vez que estes se adequam melhor as ações previstas neste trabalho, entendemos pesquisa bibliográfica da seguinte forma:

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002 Apud. Gerhardt e Silveira, 2009, p. 37).

De acordo com essa citação, este trabalho compartilha das características de uma pesquisa dessa natureza, uma vez que nos propomos a analisar registros históricos, artigos, teses, dissertações, leis e principalmente análise de livros didáticos, os quais tratam de questões referentes ao pensamento algébrico nos períodos delimitados. A seguir apresentamos algumas características da pesquisa bibliográfica que utilizamos neste trabalho.

Além disso, Lima e Mioto (2007) afirmam que é importante que em uma pesquisa bibliográfica, deve-se levantar as informações que são prioritárias e, validar as informações adquiridas. Fazer uma leitura mais avançada de todo o material em que se pretende utilizar, é possível que se amplie o campo de busca sobre determinado assunto (Lima e Mioto, 2007). Em resumo, os autores apresentam a descrição abaixo: Conforme Carvalho, Carneiro e Martins (2004), existem características essencialmente relevantes sobre uma pesquisa bibliográfica. Sucintamente, estas são: conhecimento do acervo bibliográfico, que consiste em fazer um levantamento bibliográficos de acordo com os materiais que o pesquisador tem a sua disposição, artigos, livros, revistas etc. Esta etapa pode ser mais bem explicada no seguinte trecho:

> *Se o estudioso necessita de um tratado completo, procura um livro; se necessita de um estudo atualizado ou recente, procura um artigo em revista; se necessita de conhecimentos gerais e básicos, vai aos dicionários*

> *ou enciclopédias; se precisa de notícias, crônicas ou comentários breves de fatos ou acontecimentos diários, procura a seção de jornais. (CARVALHO, CARNEIRO E MARTINS, 2004, p. 2).*

Dependendo do estilo documental, a redação documental divide se em literária ou científica, segundo os autores. E em relação a natureza os documentos poderão ser originais ou documento informativo baseado nessas fontes. Estes são respectivamente documentos primários e documentos secundários.

Outras características são as chamadas pelos autores citados acima de periódicos, e além deles, processos de leitura de impressos bibliográficos. Resumidamente, os periódicos são por exemplo, jornal, revistas, artigos, boletins e afins. Cada um deste apresenta suas particularidades e consequentemente contribuem de forma diferenciada para a pesquisa, porém cada tipo de periódico torna se de forma igualitária relevante à mesma. Já os processos de leitura, são técnicas para que a leitura não se torne um hobbie dispersivo como constatar informações fornecidas no texto, relacionar essas informações com as hipóteses a sua pesquisa e avaliar a veracidade das informações obtidas.

E por fim, mais uma característica é busca de dados através de livros. Os livros permitem abordar de maneira mais aprofundada diversos assuntos além de ser uma fonte bastante conservadora. Analisar um ou mais livros, torna-se vantajoso para uma pesquisa bibliográfica uma vez que trata profundamente de um tema ou de uma coletânea de temas relacionados, todos os aspectos relacionados a temática do livro.

Os autores dividem a aquisição de dados via livros em duas espécies: Livros de leitura corrente e livros de referência, que tornam se relevante cada tipo de aquisição de dados dependendo do tipo de trabalho em que se deseja realizar.

> Os livros de leitura corrente compreendem, além das obras literárias, designadas pelos seus gêneros (romance, poesia, teatro, etc...), as obras de divulgação, isto é, as que objetivam fazer chegar ao conhecimento do público informações científicas e técnicas. (CARVALHO, CARNEIRO E MARTINS, 2004, p.5).

Um exemplo que se torna prático uma vez que são objetos de estudo deste trabalho, são os livros didáticos. Estas, segundo os autores, dirigem-se ao público acadêmico e seguem os programas oficiais de estudo e ao nível dos cursos a que forem necessárias se desenvolver.

> Os livros de referência ou de consulta são os livros que nos mantém atualizados sobre as obras que se escrevem e se publicam. Os livros de consulta podem ser classificados em dois tipos principais: os de referência informativa, que contêm a informação que se busca, e os de referência remissiva, que remetem a outras fontes. (CARVALHO, CARNEIRO E MARTINS, 2004, p.5)

Sendo relevante todas as considerações sobre pesquisa bibliográfica, destaco aqui que neste trabalho, para que seja descrito o papel da álgebra em seu ensino, nas reformas

Francisco campos e Gustavo Capanema e também nos dias de hoje, o método utilizado é a Pesquisa bibliográfica da forma pesquisa de periódicos que foi descrita brevemente neste capítulo, ou seja, a descrição do papel da álgebra nos períodos das reformas e o atual período foi feito através de contextualização histórica. Já para descrever a álgebra de forma mais específica nos períodos das reformas e dias atuais foi realizada a pesquisa documental, que é a análise de leis para a aquisição de dados da época e livros que abordam as reformas e o ensino atual de maneira objetiva.

5.2 A pesquisa documental

Este trabalho de conclusão de curso trata-se de uma pesquisa de natureza bibliográfica e documental, devido ao fato de a mesma ter como característica principal a análise de registros históricos, artigos, teses, dissertações, leis e principalmente análise de livros didáticos. Sendo assim, será desenvolvido a partir desta seção do que se trata e quais as características da pesquisa documental.

Aparentemente pesquisa bibliográfica e pesquisa documental são modalidades bastante semelhantes, (FIGUEIREDO, 2007 apud Sá-Silva, Almeida e Guindani, 2009) nos diz que ambos os tipos de pesquisa citados apresentam o documento como principal recurso para a construção de um trabalho. Mas os documentos podem ser escritos ou não, além disso, os mesmos são utilizados como fonte de informação fundamental para esclarecer e até mesmo servir de prova para questões levantadas pelo autor da pesquisa.

Também é ressaltado por OLIVEIRA (2007) Apud Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) que o que diferencia a pesquisa bibliográfica da documental é que a pesquisa bibliográfica trabalha com os periódicos, ou seja, basicamente com fontes secundárias, já a pesquisa documental trabalha com as fontes primárias. Essa é a única diferença entre as duas modalidades de pesquisa.

Os autores citados acima, se baseiam em Cellard quando apresentam características pertinentes a avaliação dos documentos. Não foi julgado necessário dissertar sobre todos os tópicos em que se constituem uma pesquisa documental quanto a avaliação de documentos. O primeiro tópico a ser abordado de suas considerações é o conceito. É de suma importância que o contexto histórico seja bem avaliado e explicitado pelo autor em seu texto. Assim, facilita o leitor entender de forma mais clara os argumentos do autor e mais ainda, evitar que o leitor vise o passado em função de valores modernos. (Cellard, 2008 Apud Sá-Silva, Almeida e Guindani, 2009, p.8-9)

Outro tópico relevante é a autenticidade e confiabilidade do texto. Além de ter o texto em mãos, é necessário verificar a autenticidade do documento, esta etapa pode ser resolvida conforme o autor faz a si perguntas como: o autor foi testemunha direta ou indireta do que relatou? Quanto tempo houve desde o acontecimento e sua descrição? Ele poderia estar errado? (Cellard, 2008 apud Sá-Silva, Almeida e Guindani, 2009, p.10)

E por fim, temos a análise documental. Nesta etapa o autor produz ou reflete novas formas de compreender determinado acontecimento. É necessário mencionar os fatos que compõem a narrativa de um documento e interpretá-los de forma clara e estruturada. Dentre as características da pesquisa encaixa-se a análise qualitativa: o texto a ser analisado é abordado sob o conhecimento do conceito em que se está inserido.(SÁ-SILVA, ALMEIDA E GUINDANI, 2009)

Além disso, Ludke e André, 1986 apud Sá-Silva, Almeida e Guindani, 2009 diz que na unidade de análise o autor como forma de estudar o conteúdo documental, poderá eleger fragmentos particulares do documento para fazer a análise. O método de análise escolhido é dependente especificamente da espécie de problema.

5.3 As etapas da pesquisa

Este trabalho se caracteriza pela adesão de práticas para levantamento bibliográfico e documental. Esta seção se dedica a apresentar as etapas da pesquisa e como estas se adequam com as descrições apresentadas na última seção.

Para a descrição do papel da álgebra nos períodos das reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema, foram selecionados os seguintes documentos: Decreto n. 19.890 de 18/04/1931, Decreto-Lei n. 4.244 de 09/04/1942. Esta etapa pode ser identifica nas características de pesquisa documental por Sá-silva, Almeida e Guindani (2009) uma vez que a pesquisa documental se baseia essencialmente em fontes primárias.

Além das leis mencionadas acima, foram selecionados documentos legislativos referentes ao período atual que consiste na atual LDB, PCNs, PNE e BNCC. Uma vez que utilizamos documentos primários, este trabalho apresenta características de uma pesquisa documental. Cabe lembrar que estes documentos nos serviram de como base para apresentar uma perspectiva atual do ensino de álgebra.

Os livros didáticos são fundamentais para essa pesquisa, e foram utilizados de forma mais aprofundada que as leis citadas acima uma vez que a análise dos livros didáticos de matemática dos períodos das reformas é o principal objeto desta investigação.

Realizamos a análise de livros que são documentos primários com foco especificamente em livros didáticos mais especificamente ainda, os referentes ao período do trabalho. Assim concluímos a principal característica da pesquisa documental que é analisar fontes primárias.

Deve ficar claro que este trabalho se dedica a analisar livros didáticos das décadas 1930 e 1940, de modo que possamos constituir um retrato do ensino de álgebra no período, a luz da perspectiva de ensino observada em livros didáticos atuais.

Assim, a característica “conhecimento do acervo bibliográfico”, descrita anteriormente, é exibida nesta pesquisa em particular através das leis mencionadas acima, artigos

e textos acadêmicos que revelam estudos sobre a época. Além disso, registros da época que serão utilizados no trabalho caracterizam este trabalho como documental.

Para este trabalho selecionamos três autores e seus livros didáticos, um correspondente ao período no qual ocorre a reforma Francisco Campos (1930 - 1940), um correspondente ao período no qual ocorre a reforma Gustavo Capanema (1940 -1950) e um livro atual (1990-2019). Inicialmente selecionamos autores que tiveram seus livros aprovados pela Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD)[3] citada no capítulo 3. Para a escolha do livro atual, utilizamos a lista de livros aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), citato no capítulo 3.

Com o critério de análise definido acima, foi possível desenvolver as seguintes ações: escolher um autor que foi nomeado na CNLD por possuir livros aprovados, escolher uma coleção que tenha sido aprovada. Esta decisão, pelos autores, ocorreu por conta da dificuldade de selecionar um livro específico no sentido de encontrar as obras que foram aprovadas. Conforme diz Dassie (2012), havia uma dificuldade considerável para encontrar as listas produzidas por vários deslizes da gestão de Gustavo Capanema.

Afora as considerações de parágrafos acima, os livros da atualidade obedecerão ao mesmo critério: selecionar um autor que possua seus livros aprovados pelo Plano Nacional de Livros Didáticos. Embora as listas de livros atuais sejam mais fáceis de serem encontradas, irá se manter o mesmo critério de busca por exemplares da reforma Gustavo Capanema para que a comparação seja igualitária.

Além disso, será utilizado outro critério que é dentre os autores que foram selecionados, quais são possivelmente os mais renomados. Para poder tentar dizer quais obras poderiam possuir considerável importância, será analisado quais autores têm seus nomes citados em textos usados para este trabalho e em trabalhos sobre as reformas, remetendo ao critério para escolha de livro da primeira reforma. O desenvolvimento dos critérios será diluído ao longo do texto, mas é importante citar que os livros aprovados pela comissão estão documentados em listas e os mais populares aparecerão através das pesquisas.

Desta forma, os autores escolhidos para a análise do ensino de álgebra nas reformas Campos e Gustavo Capanema respectivamente são: A coleção F.T.D. de livros de matemática para o ensino secundário e o autor Thales Mello Carvalho que possui livros aprovados pela CNLD (TELO, 2017). Ambos os autores são citados em trabalhos sobre livros didáticos das reformas.

Apresentar o documento de forma clara é uma das características mencionadas na sessão anterior sobre pesquisa documental, sendo assim, neste momento será esquematizado a escolha de documentos, e o que é esperado encontrar nos mesmos: A obra selecionada da coleção F.T.D chame-se pontos de álgebra de 1933 e a obra de Thales Carvalho chama-se

[3] Como a CNLD só foi aprovada durante o governo do ministro Gustavo Capanema, optamos por escolher os livros referentes a reforma Francisco Campos de acordo com os trabalhos analisado no referencial teórico.

matemática de 1946.

Além disso foi selecionada a obra da quinta série do curso fundamental para a reforma Francisco Campos pois nesta reforma, dependendo do curso superior em que o estudante quisesse seguir, ele faria o curso complementar. No entanto, todos estudantes necessitavam fazer o curso fundamental e os anos finais seriam base para que os alunos pudessem ingressar no curso complementar. Para obedecer ao mesmo critério com a finalidade de fazer comparações entre o ensino da álgebra nos períodos, os livros selecionados para análise correspondentes a reforma Gustavo Capanema também foi de anos finais, no caso, livros de matemáticas usados no curso clássico ou científico, visto que todos os estudantes deveriam concluir um desses cursos dependendo das suas necessidades futuras. O livro é do segundo ano dos cursos clássico e científico da reforma Gustavo Capanema.

Ademais, a escolha por analisar livros de anos finais da educação é minha aproximação com este período de estudo uma vez que participo de um projeto governamental, o Projeto de Residência Pedagógica, no qual ministro aulas e atividades matemáticas para os anos finais da educação básica.

Para o período vigente, o livro de matemática selecionado é um livro do Ensino Médio que correspondem aos final da educação básica, além de que todos os discentes de hoje necessitam concluir o mesmo para ingressar na faculdade e até mesmo no mercado de trabalho. O autor selecionado para ter um de seus exemplares analisado foi: Roberto Dante que são os livros citados em textos deste trabalho e este autor tem livros aprovados pelo PNLD. Além disso, obedecendo ao critério de livro do final da Educação Básica, o livro é do primeiro ano do Ensino Médio.

Com os títulos definidos, precisamos definir critérios para essa análise. Baseamos os critérios de acordo com as preocupações referentes ao ensino de álgebra ao longo do tempo, apresentadas neste trabalho, se os conteúdos estão de acordo com as leis e exigências de cada período apresentadas e critérios gerais como linguagem e conteúdos por exemplo. Os critérios para a análise dos livros são:Qualidade do texto, que ainda se subdivide em: apresentar explicações das definições, exemplos coerentes com as definições, vocabulário de acordo com o tipo de ensino da época, presença de símbolos matemáticos e dizer também se o texto é inteiro ou fragmentado. Clareza da linguagem em concordância com a proposta da época, que se divide em dizer se a abordagem do livro é técnica ou metodológica; generalizações algébricas; Disposição de conteúdos; Disposição de exemplos e exercícios; Disposição das definições apresentadas nos conteúdos abordados na obra didática; Construção do pensamento algébrico.

Analisar se houve interligação entre álgebra e geometria é um critério importante visto que foi uma das preocupações com o ensino de álgebra apresentados anteriormente, porém visto que mesmo que isto fora ressaltado no passado por Euclides Roxo, muitos livros continuaram a ser publicados e até aprovados pela CNLD sem fazer qualquer interligação entre as duas áreas como é dito por Telo (2017) e dos livros que consegui obter para

realizar as análises não dispunham de interligação entre as áreas para que pudesse analisar como foram feitas. Sendo assim, esta preocupação não será levada em conta enquanto critério de análise.

Como último objetivo da análise de livros, será feito um retrato entre o ensino de álgebra nessas reformas com um reflexo do período atual. O importante desta etapa é verificar as mudanças sofridas no ensino e como um período anterior ao nosso pode nos ajudar a entender o processo de ensino de uma fração da matemática tão complexa de se entender para muitos estudantes.

Os periódicos usados neste texto, isto é, jornais, revistas, e outros, são usados para a análise de livros e trechos acadêmicos, pois é importante que esta análise não seja feita de forma aleatória e sim que a mesma siga um padrão a ser definido na sessão seguinte.

Escolhemos os livros como grande objetivo de estudar uma abordagem do ensino de álgebra atavés de analise documental , pois os livros guardam informações mais aprofundadas e precisas do ensino uma vez que, no caso do período 1930 a 1949, as melhores informações da época são os registros, e por se tratar de uma pesquisa bibliográfica e documental, para este trabalho, registros de livros da época são excelentes fontes. No caso de analisar o contexto atual, temos acesso a propostas governamentais, projetos de leis, fóruns de discussões, tudo em tempo real, mas para que seja feita um paralelo de ambos os períodos relacionaremos estes através dos livros analisados com os critérios estabelecidos.

6 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo estão dispostos os tópicos para a análise de cada livro didático descrito anteriormente. Os livros analisados são, Pontos de álgebra, matemática para os cursos Clássicos e Científicos e matemática: Contexto e Aplicações.

Tópicos para a análise de livros didáticos

- Qualidade do texto
- Clareza da linguagem em concordância com a proposta da época;
- Generalizações algébricas;
- Disposição de conteúdos;
- Interligação de álgebra e geometria;[4]
- Disposição de exemplos e exercícios;
- Disposição das definições apresentadas nos conteúdos abordados na obra didática;
- Construção do pensamento algébrico.

6.1 Obra referente ao ensino atual

Livro: MATEMÁTICA CONTEXTO E APLCAÇÕES

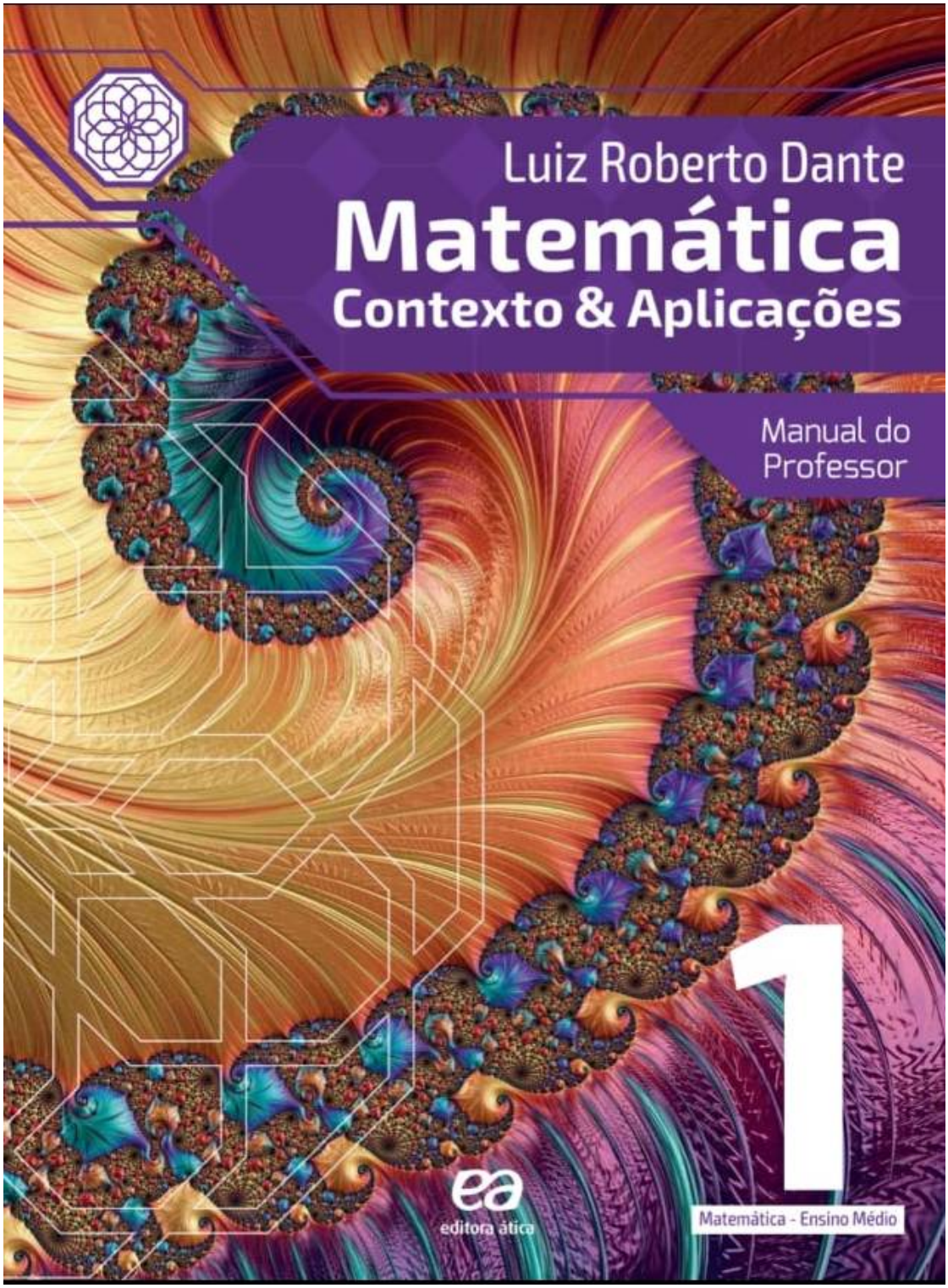
Autor: Luiz Roberto Dante (2017)

Série: 1º ano do ensino médio

Capa:

[4] Apesar de este ser um critério que remonta as exigências da reforma Francisco Campos, existiram livros que não a atenderam. Desta forma, optamos por não acrescentar este critério na análise. Nos títulos selecionados, houve pouca ou nenhuma interação de álgebra e geometria, o que tornou impossível concluir considerações consistentes acerca do tópico.

Figura 1 – Capa livro de Matemática: Contexto e Aplicações



Fonte: Dante (2017)

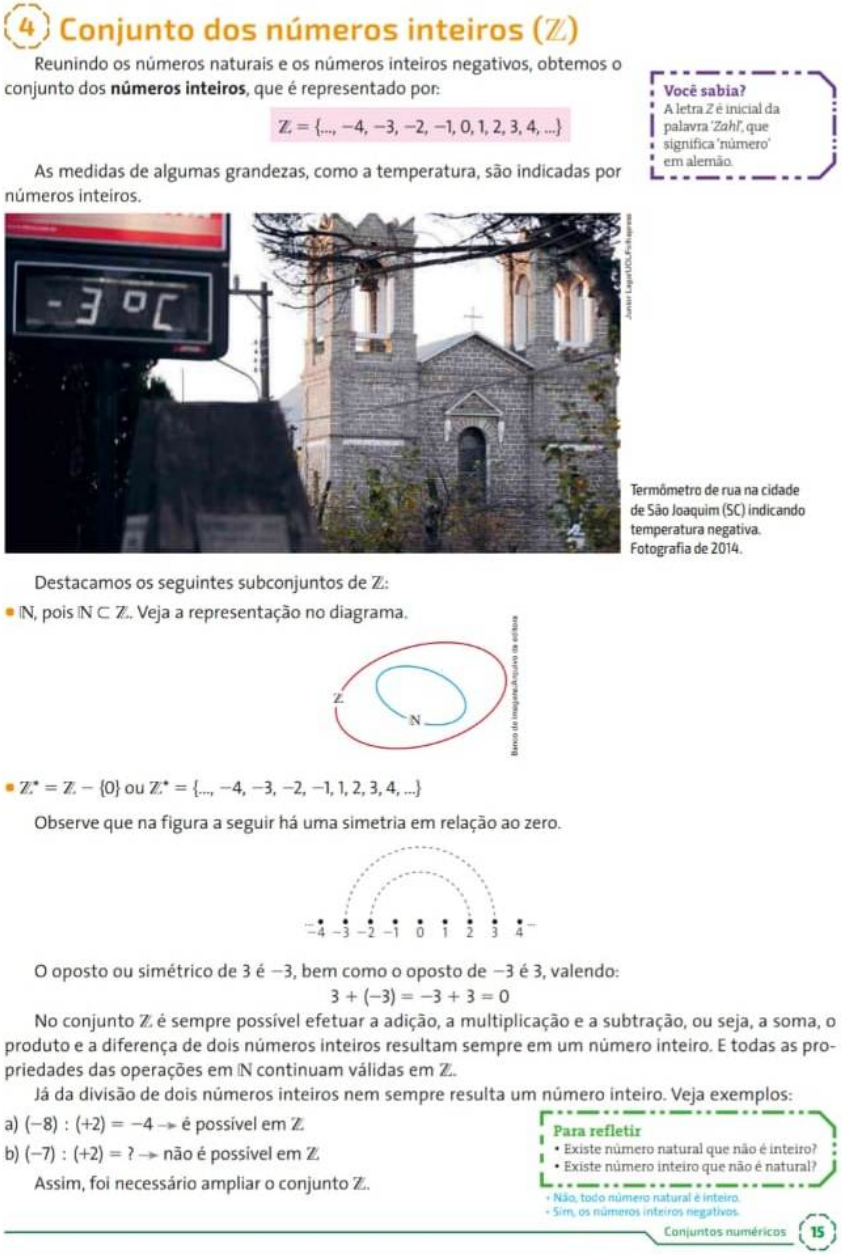
• Qualidade do texto

Faremos a análise nos preocupando em dizer se o texto apresenta explicações das definições, exemplos coerentes, vocabulário de acordo com o ensino da época, presença de

símbolos matemáticos e dizer também se o texto é inteiro ou fragmentado.

O texto é acessível ao período pois se preocupa com contextualização e cotidiano. Além disso, usa de métodos diferenciados para abordar certo conteúdo:

Figura 2 – Apresentação conjunto dos números inteiros



4 Conjunto dos números inteiros (ℤ)

Reunindo os números naturais e os números inteiros negativos, obtemos o conjunto dos **números inteiros**, que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Você sabia?
A letra *Z* é inicial da palavra *'Zahl'*, que significa 'número' em alemão.

As medidas de algumas grandezas, como a temperatura, são indicadas por números inteiros.

Termômetro de rua na cidade de São Joaquim (SC) indicando temperatura negativa. Fotografia de 2014.

Destacamos os seguintes subconjuntos de ℤ:

- ℕ, pois ℕ ⊂ ℤ. Veja a representação no diagrama.

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Observe que na figura a seguir há uma simetria em relação ao zero.

O oposto ou simétrico de 3 é −3, bem como o oposto de −3 é 3, valendo:

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

No conjunto ℤ é sempre possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de dois números inteiros resultam sempre em um número inteiro. E todas as propriedades das operações em ℕ continuam válidas em ℤ.

Já da divisão de dois números inteiros nem sempre resulta um número inteiro. Veja exemplos:

a) (−8) : (+2) = −4 → é possível em ℤ

b) (−7) : (+2) = ? → não é possível em ℤ

Assim, foi necessário ampliar o conjunto ℤ.

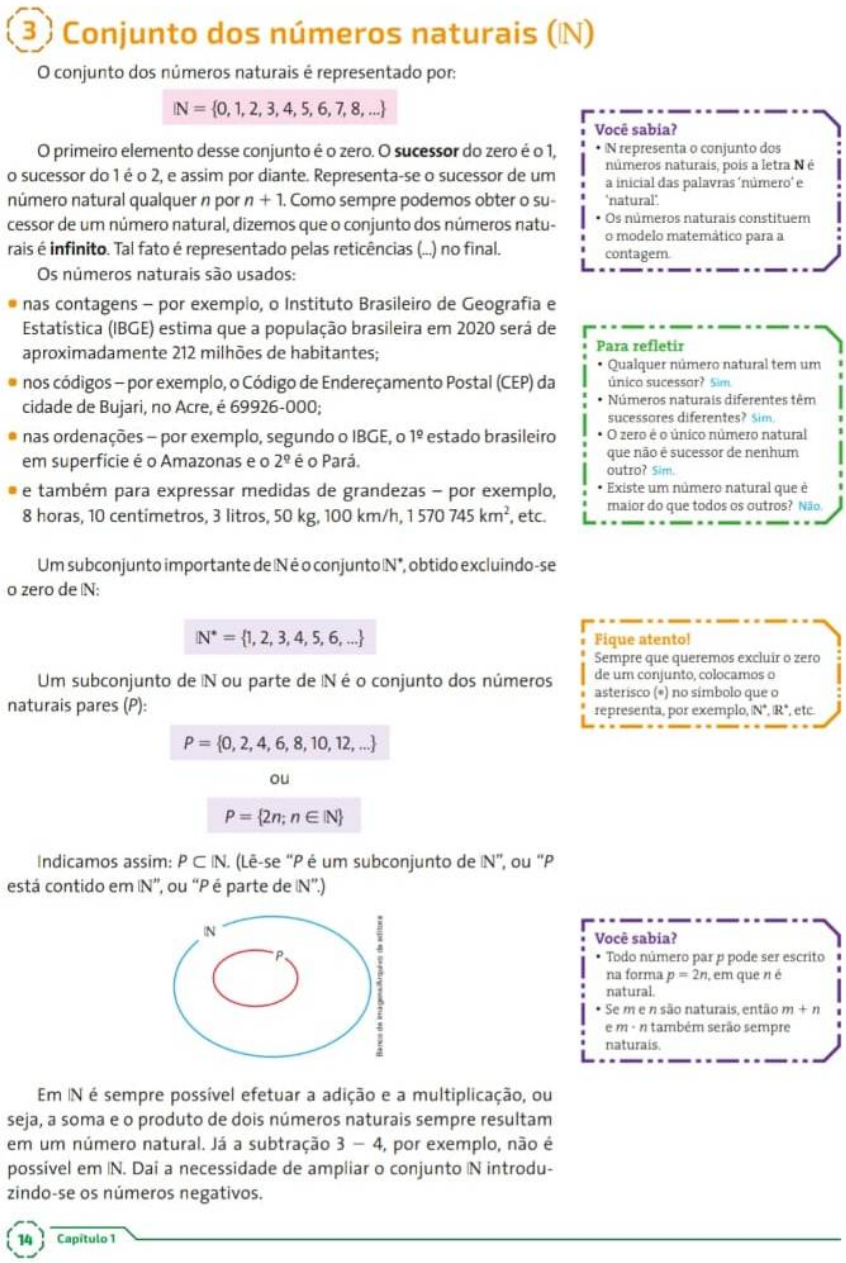
Para refletir
- Existe número natural que não é inteiro?
- Existe número inteiro que não é natural?

- Não, todo número natural é inteiro.
- Sim, os números inteiros negativos.

Conjuntos numéricos 15

Fonte: Dante (2017)

Figura 3 – Apresentação conjunto dos números naturais



3 Conjunto dos números naturais (ℕ)

O conjunto dos números naturais é representado por:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

O primeiro elemento desse conjunto é o zero. O **sucessor** do zero é o 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante. Representa-se o sucessor de um número natural qualquer n por $n + 1$. Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é **infinito**. Tal fato é representado pelas reticências (...) no final.

Os números naturais são usados:

- nas contagens – por exemplo, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) estima que a população brasileira em 2020 será de aproximadamente 212 milhões de habitantes;
- nos códigos – por exemplo, o Código de Endereçamento Postal (CEP) da cidade de Bujari, no Acre, é 69926-000;
- nas ordenações – por exemplo, segundo o IBGE, o 1º estado brasileiro em superfície é o Amazonas e o 2º é o Pará.
- e também para expressar medidas de grandezas – por exemplo, 8 horas, 10 centímetros, 3 litros, 50 kg, 100 km/h, 1 570 745 km^2, etc.

Você sabia?
- ℕ representa o conjunto dos números naturais, pois a letra **N** é a inicial das palavras 'número' e 'natural'.
- Os números naturais constituem o modelo matemático para a contagem.

Para refletir
- Qualquer número natural tem um único sucessor? Sim.
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes? Sim.
- O zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro? Sim.
- Existe um número natural que é maior do que todos os outros? Não.

Um subconjunto importante de ℕ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, obtido excluindo-se o zero de ℕ:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Fique atento!
Sempre que queremos excluir o zero de um conjunto, colocamos o asterisco (*) no símbolo que o representa, por exemplo, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$, etc.

Um subconjunto de ℕ ou parte de ℕ é o conjunto dos números naturais pares (P):

$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

ou

$P = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$

Indicamos assim: $P \subset \mathbb{N}$. (Lê-se "P é um subconjunto de ℕ", ou "P está contido em ℕ", ou "P é parte de ℕ".)

Você sabia?
- Todo número par p pode ser escrito na forma $p = 2n$, em que n é natural.
- Se m e n são naturais, então $m + n$ e $m \cdot n$ também serão sempre naturais.

Em ℕ é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois números naturais sempre resultam em um número natural. Já a subtração $3 - 4$, por exemplo, não é possível em ℕ. Daí a necessidade de ampliar o conjunto ℕ introduzindo-se os números negativos.

14 Capítulo 1

Fonte: Dante (2017)

Podemos perceber a presença de muitos lembretes, curiosidades, aplicações dos números naturais e inteiros no dia a dia, questões para pensar, fazendo com que a linguagem seja adequada a proposta de conteúdo conforme diz Santos (2007). As definições são bem explicadas seguidas de exemplos e contextualização como sugere o PCN 2000. Porém o livro não apresenta uma grande gama de demonstrações, estas, presentes no livro são ora a título de curiosidade e ora para demonstrar fórmulas.

Figura 4 – Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ e chegaremos a um absurdo.

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Consideramos $\frac{p}{q}$ fração irredutível, ou seja, p e q são primos entre si, isto é, mdc $(p, q) = 1$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (I)$$

Como todo número par pode ser escrito na forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 = 2q^2$ é par (II).
Assim, p^2 é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ (III).

Observe que:

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{(I)} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{(II)} q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par (IV)}$$

As conclusões (III), de que "p é par", e (IV), de que "q é par", são contraditórias, já que p e q foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ não é uma decimal exata nem periódica.

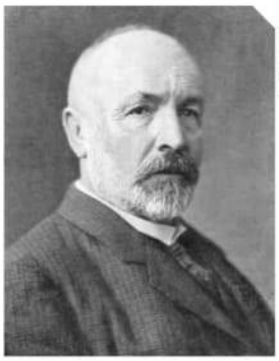
George Cantor

Em geral, as teorias matemáticas surgem do trabalho de vários matemáticos de uma mesma época, em conjunto ou mesmo separadamente. Não foi o caso da Teoria dos Conjuntos. A criação dessa teoria deve-se a um único homem: George Cantor.

Cantor nasceu em 1845 em São Petersburgo, na Rússia, mas passou a maior parte de sua vida na Alemanha. Quando jovem interessou-se pela Teoria dos Números, e esse foi, inclusive, o tema da sua tese de doutorado obtido em Berlim em 1867.

Em seguida, Cantor investigou séries trigonométricas, mas, ao mesmo tempo, começou a pensar nos conjuntos, nas suas operações e, sobretudo, nos conjuntos com infinitos termos.

Em 1874, publicou um artigo revolucionário no *Jornal de Crelle*, que marcou o nascimento da Teoria dos Conjuntos. Nesse artigo Cantor afirma que os conjuntos infinitos não são todos iguais, e isso causou enorme controvérsia. Muitos matemáticos defenderam as novas ideias, mas outros matemáticos famosos e tradicionais as atacaram fortemente.



Fotografia de George Cantor (1845-1918). Biblioteca do Congresso, Washington, D.C. (EUA).

Nos 10 anos seguintes, a discussão sobre a moderna Teoria dos Conjuntos foi intensa, e ela acabou por se tornar universalmente aceita. Cantor, mesmo sem ter sido na época muito aclamado pela sua teoria, teve um período de certa tranquilidade. Entretanto, em 1901 essa tranquilidade foi perturbada por uma afirmação de outro grande matemático, chamado Bertrand Russel (1872-1970). Esse matemático enunciou um problema que, aparentemente, colocava em dúvida a Teoria dos Conjuntos. Esse problema foi chamado de "o paradoxo do barbeiro" e conduziu Cantor a um total esgotamento nervoso por não conseguir argumentos para explicá-lo. Cantor morreu em um hospital psiquiátrico em 1918.

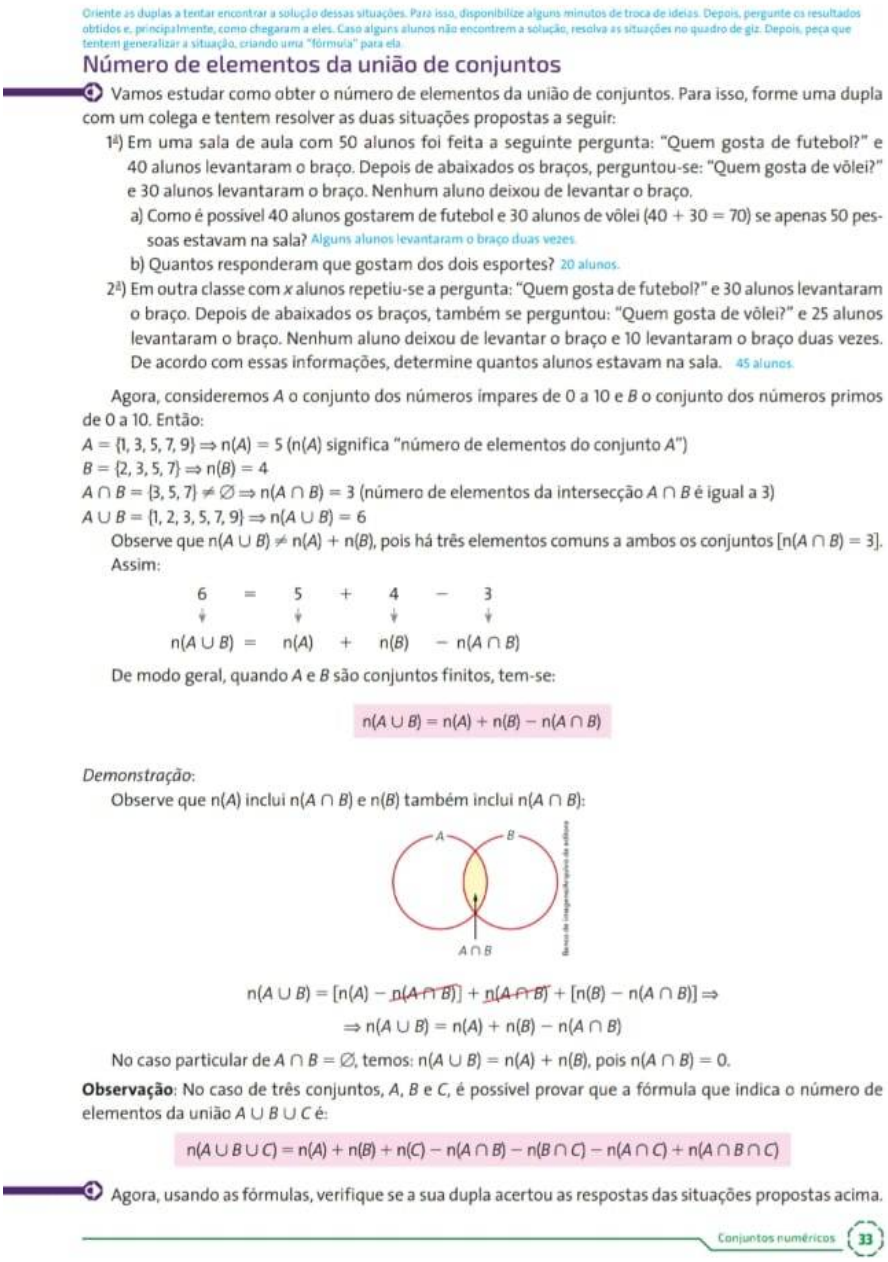
As ideias de Cantor possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática, como a topologia, a teoria da medida e outras que, talvez, um dia você vai estudar.

Conjuntos numéricos 23

Fonte: Dante (2017)

A imagem acima representa a demonstração de que de um número irracional como um bônus deste conteúdo. Já a imagem abaixo representa a demonstração da fórmula de número de elementos da união de conjuntos.

Figura 5 – Apresentação das operações de conjuntos numéricos



Oriente as duplas a tentar encontrar a solução dessas situações. Para isso, disponibilize alguns minutos de troca de ideias. Depois, pergunte os resultados obtidos e, principalmente, como chegaram a eles. Caso alguns alunos não encontrem a solução, resolva as situações no quadro de giz. Depois, peça que tentem generalizar a situação, criando uma "fórmula" para ela.

Número de elementos da união de conjuntos

Vamos estudar como obter o número de elementos da união de conjuntos. Para isso, forme uma dupla com um colega e tentem resolver as duas situações propostas a seguir:

1ª) Em uma sala de aula com 50 alunos foi feita a seguinte pergunta: "Quem gosta de futebol?" e 40 alunos levantaram o braço. Depois de abaixados os braços, perguntou-se: "Quem gosta de vôlei?" e 30 alunos levantaram o braço. Nenhum aluno deixou de levantar o braço.

a) Como é possível 40 alunos gostarem de futebol e 30 alunos de vôlei (40 + 30 = 70) se apenas 50 pessoas estavam na sala? Alguns alunos levantaram o braço duas vezes.

b) Quantos responderam que gostam dos dois esportes? 20 alunos.

2ª) Em outra classe com x alunos repetiu-se a pergunta: "Quem gosta de futebol?" e 30 alunos levantaram o braço. Depois de abaixados os braços, também se perguntou: "Quem gosta de vôlei?" e 25 alunos levantaram o braço. Nenhum aluno deixou de levantar o braço e 10 levantaram o braço duas vezes. De acordo com essas informações, determine quantos alunos estavam na sala. 45 alunos.

Agora, consideremos A o conjunto dos números ímpares de 0 a 10 e B o conjunto dos números primos de 0 a 10. Então:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(A) = 5$ ($n(A)$ significa "número de elementos do conjunto A")

$B = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4$

$A \cap B = \{3, 5, 7\} \neq \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 3$ (número de elementos da intersecção $A \cap B$ é igual a 3)

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(A \cup B) = 6$

Observe que $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$, pois há três elementos comuns a ambos os conjuntos [$n(A \cap B) = 3$].

Assim:

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & = & 5 & + & 4 & - & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n(A \cup B) & = & n(A) & + & n(B) & - & n(A \cap B) \end{array}$$

De modo geral, quando A e B são conjuntos finitos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demonstração:

Observe que $n(A)$ inclui $n(A \cap B)$ e $n(B)$ também inclui $n(A \cap B)$:

$$n(A \cup B) = [n(A) - \cancel{n(A \cap B)}] + \cancel{n(A \cap B)} + [n(B) - n(A \cap B)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

No caso particular de $A \cap B = \emptyset$, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, pois $n(A \cap B) = 0$.

Observação: No caso de três conjuntos, A, B e C, é possível provar que a fórmula que indica o número de elementos da união $A \cup B \cup C$ é:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Agora, usando as fórmulas, verifique se a sua dupla acertou as respostas das situações propostas acima.

Conjuntos numéricos 33

Fonte: Dante (2017)

É importante reparar ainda na presença de simbolismo que se mostra bem forte. Observe também que o livro ainda faz sugestão da abordagem em sala de aula como pedir que a atividade que precede a demonstração seja feita em dupla. E ainda coloca um exemplo cotidiano.

- Clareza da linguagem em concordância com a proposta da época.

Como mencionado existem duas formas de verificar a linguagem algébrica por pelo menos duas abordagens que são as técnicas e metodológicas.

Segundo D'ambrosio (1989) é importante que o aluno seja o centro do processo educacional de aprendizagem, sendo assim é valido usar de métodos de ensino que faça o mesmo refletir suas ações em vez de ser mero reprodutor. Portanto a abordagem de ensino da álgebra atualmente é a abordagem metodológica. lembrando que as metodologias de ensino são amplamentes sugeridas pelos PCN's.

Figura 6 – História das funções

1 Um pouco da história das funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar **fenômenos** físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

Fenômeno: fato ou evento de interesse científico que pode ser descrito e explicado cientificamente.

Os números naturais (inteiros positivos) e as razões entre eles (racionais) eram os únicos tipos de números trabalhados pelos gregos até o século V a.C. Eles acreditavam que esses números fossem suficientes para comparar duas grandezas quaisquer de mesma espécie – comprimentos, áreas, volumes, etc.

Quando apareceram as funções?

O conceito de função aparece, de forma intuitiva, desde a Antiguidade. De fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função. Um dos melhores exemplos de uma função no período antigo deve-se a Cláudio Ptolomeu, cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano. Ptolomeu elaborou a famosa Tabela de Cordas, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação.

Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central α, associava o comprimento ℓ da corda correspondente, como na figura a seguir.

Retrato de Cláudio Ptolomeu, cientista grego (90-168).

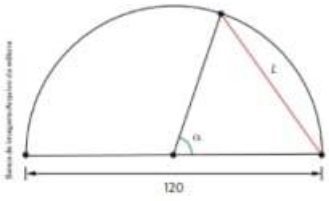


Tabela de cordas

α (°)	ℓ (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Fonte: Dados experimentais.

Na tabela de cordas de Ptolomeu, os ângulos são expressos em graus, com variação de meio grau de um valor para o seguinte, e o comprimento da corda é determinado na semicircunferência em função de um ângulo entre 0° e 180°. Veja alguns valores na tabela acima.

Hoje, sabemos que existe uma fórmula que permite calcular para cada valor de α o comprimento ℓ da corda, mas naquele tempo não estava bem definido o conceito de "fórmula".

A palavra função, no sentido que usamos hoje, aparece pela primeira vez em correspondências entre dois grandes matemáticos: o suíço Jean Bernoulli e o alemão Gottfried Leibniz. Inicialmente Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função. As cartas continuaram e, em uma carta de Bernoulli para Leibniz no ano de 1698, aparece a frase:

"... função é uma quantidade que de alguma maneira é formada por quantidades indeterminadas e quantidades constantes".

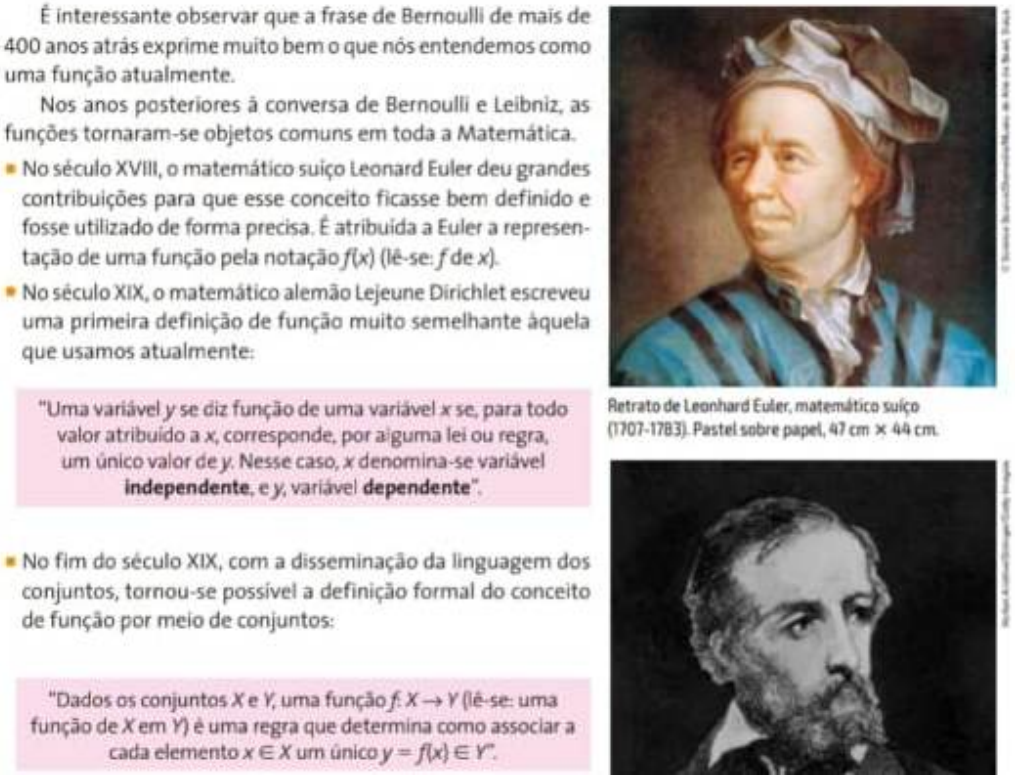
E Leibniz responde:

"... e eu estou contente em ver que você usou o termo função de acordo com o meu sentido".

Funções 41

Fonte: Dante (2017)

Figura 7 – Continuação História das funções



É interessante observar que a frase de Bernoulli de mais de 400 anos atrás exprime muito bem o que nós entendemos como uma função atualmente.

Nos anos posteriores à conversa de Bernoulli e Leibniz, as funções tornaram-se objetos comuns em toda a Matemática.

- No século XVIII, o matemático suiço Leonard Euler deu grandes contribuições para que esse conceito ficasse bem definido e fosse utilizado de forma precisa. É atribuída a Euler a representação de uma função pela notação $f(x)$ (lê-se: f de x).
- No século XIX, o matemático alemão Lejeune Dirichlet escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que usamos atualmente:

"Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável **independente**, e y, variável **dependente**".

Retrato de Leonhard Euler, matemático suíço (1707-1783). Pastel sobre papel, 47 cm × 44 cm.

- No fim do século XIX, com a disseminação da linguagem dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos:

"Dados os conjuntos X e Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$".

Fonte: Dante (2017)

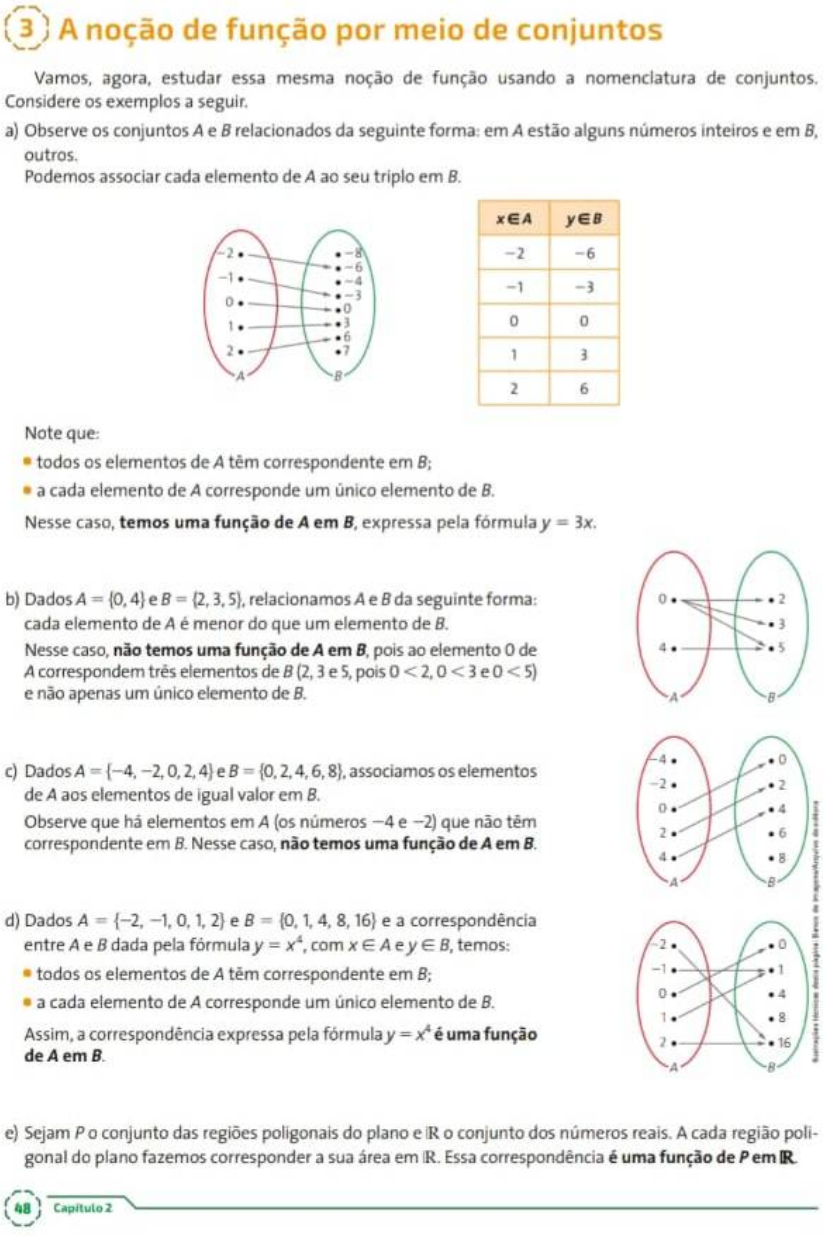
Neste caso podemos ver uma abordagem de conteúdo segundo a história do mesmo. O que já apresenta um modo diferenciado de abordar vários conteúdos, além das vistas nas imagens do tópico acima. Esses diferentes tipos de abordagem reflete a valorização da construção do conhecimento da álgebra pelos discentes.

• Generalizações algébricas

As generalizações algébricas podem ser entendidas nesse contexto respondendo ao questionamento se a abordagem descrita acima, permite compreender as generalizações algébricas que é uma preocupação com o ensino de álgebra descrito neste trabalho.

No contexto geral o livro permite as generalizações no sentido em que apresenta vários exemplos contextuais, explicações bem desenvolvidas e mostrando por várias vezes significados conforme é mostrado como necessidade no ensino da álgebra por Santos (2011). Vimos exemplos de algumas generalizações nas deduções das fórmulas e abaixo:

Figura 8 – Noção de função por meio de conjuntos



3 A noção de função por meio de conjuntos

Vamos, agora, estudar essa mesma noção de função usando a nomenclatura de conjuntos. Considere os exemplos a seguir.

a) Observe os conjuntos A e B relacionados da seguinte forma: em A estão alguns números inteiros e em B, outros.
Podemos associar cada elemento de A ao seu triplo em B.

$x \in A$	$y \in B$
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

Note que:
- todos os elementos de A têm correspondente em B;
- a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.

Nesse caso, **temos uma função de A em B**, expressa pela fórmula $y = 3x$.

b) Dados $A = \{0, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, relacionamos A e B da seguinte forma: cada elemento de A é menor do que um elemento de B.
Nesse caso, **não temos uma função de A em B**, pois ao elemento 0 de A correspondem três elementos de B (2, 3 e 5, pois $0 < 2$, $0 < 3$ e $0 < 5$) e não apenas um único elemento de B.

c) Dados $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, associamos os elementos de A aos elementos de igual valor em B.
Observe que há elementos em A (os números −4 e −2) que não têm correspondente em B. Nesse caso, **não temos uma função de A em B**.

d) Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4, 8, 16\}$ e a correspondência entre A e B dada pela fórmula $y = x^4$, com $x \in A$ e $y \in B$, temos:
- todos os elementos de A têm correspondente em B;
- a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.

Assim, a correspondência expressa pela fórmula $y = x^4$ **é uma função de A em B**.

e) Sejam P o conjunto das regiões poligonais do plano e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A cada região poligonal do plano fazemos corresponder a sua área em $\mathbb{R}$. Essa correspondência **é uma função de P em $\mathbb{R}$**.

Fonte: Dante (2017)

Podemos ver que a generalização dos conteúdos de álgebra neste capítulo do livro por exemplo, permitem a construção do pensamento do aluno sobre o conteúdo, por exemplo neste caso em que o conteúdo de noção de função é explicado por meio do que foi aprendido em conjuntos. Então quando há a generalização algébrica a mesma tem que permitir a construção do pensamento algébrico do aluno como ocorre.

- Disposição de conteúdos

A disposição de conteúdos acontece de forma organizada dando um nome para cada capítulo e descrevendo a lista de conteúdos que ele abrange. Além disso, o livro é dividido em 4 unidades. Veja abaixo:

Figura 9 – Disposição de conteúdos unidade 1

Sumário

Unidade 1: Números e Funções

CAPÍTULO 1
Conjuntos numéricos

1 Números ... 12
2 A noção de conjunto ... 13
3 Conjunto dos números naturais (ℕ) ... 14
4 Conjunto dos números inteiros (ℤ) ... 15
5 Conjunto dos números racionais (ℚ) ... 16
Representação decimal dos números racionais ... 17
Obtenção da fração geratriz de um decimal exato ... 17
Obtenção da fração geratriz de um decimal periódico ... 18
Números racionais e medidas de grandezas ... 19
Os números racionais na reta numerada ... 19
6 Números irracionais ... 20
π (Pi) é irracional ... 21
O número de ouro dos gregos, ϕ (Fi), é irracional ... 21
7 Conjunto dos números reais (ℝ) ... 24
Desigualdades entre números reais ... 25
Módulo ou valor absoluto de um número real ... 26
Distância entre dois pontos na reta real orientada ... 26
8 A linguagem de conjuntos ... 28
Relação de inclusão entre conjuntos ... 28
Propriedades ... 28
Complementar de um conjunto ... 28
Propriedades ... 29
Operações entre conjuntos ... 29
Reunião ou união de conjuntos ... 29
Intersecção de conjuntos ... 29
Propriedades da união e da intersecção ... 30
Diferença entre conjuntos ... 30
Número de elementos da união de conjuntos ... 33
9 Intervalos reais ... 34
Operações com intervalos ... 36
10 Situações-problema envolvendo números reais, grandezas e medidas ... 37

CAPÍTULO 2
Funções

1 Um pouco da história das funções ... 41
Quando aparecem as funções? ... 41
Gottfried Leibniz ... 43
2 Explorando intuitivamente a noção de função ... 45
3 A noção de função por meio de conjuntos ... 48
Definição e notação ... 49
4 Domínio, contradomínio e conjunto imagem ... 50
5 Estudo do domínio de uma função real ... 51
6 Coordenadas cartesianas ... 52
Sistema de eixos ortogonais ... 52
Distância entre dois pontos ... 53
Equação de uma circunferência ... 54
7 Gráfico de uma função ... 55
Determinando se um conjunto de pontos é gráfico de uma função ... 55
Construção de gráficos de funções ... 56
Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o gráfico ... 57
8 Função crescente e função decrescente: analisando gráficos ... 58
9 Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva ... 62
Função injetiva ou injetora ... 62
Função sobrejetiva ou sobrejetora ... 63
Função bijetiva ou correspondência biunívoca ... 64
10 Função e sequências ... 66
Progressão aritmética ... 66
Progressão geométrica ... 66

© Science Museum London/Scientific Archive da Biblioteca Estadual de Hannover, Alemanha

Fonte: Dante (2017)

Figura 10 – Disposição de conteúdos unidade 2

Unidade 2: Função afim e função quadrática

CAPÍTULO 3
Função afim e função modular

1 Situações iniciais ... 74
2 Definição de função afim ... 75
3 Valor de uma função afim ... 75
Valor inicial ... 75
4 Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$ ... 76
Propriedade ... 76
5 Determinação de uma função afim ... 78
6 Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ ... 79
Traçado de gráficos de funções afins ... 79
7 Conexão entre função afim e Geometria analítica ... 84
Equação da reta ... 84
8 Zero da função afim ... 85
Interpretação geométrica ... 85
9 Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau ... 85
Sistema de inequações do 1º grau ... 87
Inequações-produto e inequações-quociente ... 87
10 Outras conexões ... 90
Função afim e progressão aritmética (PA) ... 90
Função afim e a Física ... 90
Função linear e proporcionalidade ... 93
Função linear e escalas ... 96
11 Funções poligonais ou afins por partes ... 97
Função módulo ... 97
Gráfico da função modular ... 97
Outros gráficos de funções modulares ... 99

CAPÍTULO 4
Função quadrática

1 Definição de função quadrática ... 102
2 Situações em que aparece a função quadrática ... 103
Geometria ... 103
Fenômenos físicos ... 103
Esportes ... 104
3 Valor ou imagem da função quadrática em um ponto ... 104
A equação do 2º grau ... 106
4 Zeros da função quadrática ... 107
Determinação dos zeros da função quadrática ... 107
Usando fórmula ... 107
Usando a fatoração ... 110
Isolando o x ... 111
Por soma e produto ... 112
5 Gráfico da função quadrática ... 113
Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ ... 113
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ ... 114
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + k$, com $a \neq 0$ ... 115
Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2$, com $a \neq 0$ ... 116
Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^3 + k$, com $a \neq 0$ ... 117
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ... 118
Parâmetro a ... 118
Parâmetro b ... 118
Parâmetro c ... 119
A parábola ... 120
6 Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos ... 124
7 Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática ... 126
8 Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau ... 130
1º caso: $\Delta > 0$ ... 130
2º caso: $\Delta = 0$ ... 131
3º caso: $\Delta < 0$ ... 131
Outros tipos de inequações ... 133
9 Conexão entre função quadrática e Física ... 134
Movimento Uniformemente Variado (MUV) ... 134
10 Conexão entre função quadrática e progressão aritmética ... 137

Fonte: Dante (2017)

Figura 11 – Disposição de conteúdos unidade 3

Unidade 3: Função exponencial e função logarítmica

CAPÍTULO 5
Função exponencial

1 Situações iniciais ... 148
2 Revisão de potenciação ... 150
Potência com expoente natural ... 150
Potência com expoente inteiro ... 151
Inverso de um número $a \neq 0$ ... 151
Potência com expoente racional ... 152
Potência com expoente irracional ... 153
Potência com expoente real ... 154
Notação científica ... 155
3 Revisão de radiciação ... 156
Definição ... 156
Propriedades ... 156
4 Função exponencial ... 159
Definição ... 159
Gráfico da função exponencial ... 159
5 Conexão entre funções exponenciais e progressões ... 164
6 Equações exponenciais ... 165
Resolução de equações exponenciais simples ... 165
Raízes da equação $2x = x^2$ ... 166
7 Inequações exponenciais ... 167
8 O número irracional e e a função exponencial e^x ... 169
Função exponencial natural ... 169
O problema de Bernoulli ... 169
Jacques Bernoulli ... 170
9 Aplicações da função exponencial ... 171

CAPÍTULO 6
Logaritmo e função logarítmica

1 Logaritmo ... 176
Definição de logaritmo de um número ... 177
Consequências da definição de logaritmo ... 178
Propriedades operatórias dos logaritmos ... 179
Mudança de base do logaritmo ... 180
Cálculo de logaritmos ... 183
Aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e de problemas ... 185
Antes dos logaritmos ... 187
Depois dos logaritmos ... 188
John Napier (ou Neper) ... 188
2 Função logarítmica ... 189
Função inversa ... 189
Definição de função inversa ... 190
Função logarítmica ... 191
Definição da função logarítmica ... 191
Gráfico da função logarítmica ... 192
Uma relação importante ... 194
Caracterização das funções logarítmicas ... 194
3 Equações logarítmicas ... 197
Inequações logarítmicas ... 199

Fonte: Dante (2017)

Figura 12 – Disposição de conteúdos unidade 4

Unidade 4: Sequências e Trigonometria

CAPÍTULO 7
Sequências

1 Sequências ... 208
Definição ... 208
Determinação de uma sequência por recorrência ... 209
2 Progressão aritmética (PA) ... 213
Definição ... 213
Representações especiais ... 214
Classificação das progressões aritméticas ... 214
Fórmula do termo geral de uma PA ... 215
Soma dos termos de uma PA finita ... 218
Fórmula da soma dos termos de uma PA finita ... 218
Conexão entre progressão aritmética e função afim ... 219
3 Progressão geométrica (PG) ... 221
Definição ... 221
Fórmula do termo geral de uma PG ... 222
Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG finita ... 225
A progressão geométrica mais antiga ... 226
Problema 79 do Papiro de Rhind ... 227
Soma dos termos de uma PG infinita ... 228
Conexão entre progressão geométrica e função exponencial ... 229
4 Problemas envolvendo PA e PG ... 231

CAPÍTULO 8
Trigonometria no triângulo retângulo

1 Semelhança de triângulos ... 236
Feixe de retas paralelas ... 236
Teorema de Tales ... 237
Figuras semelhantes ... 239
Semelhança de triângulos ... 240
Casos de semelhança ... 241
Propriedade (teorema fundamental da semelhança) ... 242
Uso de semelhança para medir distâncias inacessíveis ... 244
Polígonos semelhantes ... 245
2 Relações métricas no triângulo retângulo ... 246
O triângulo retângulo ... 246
Elementos do triângulo retângulo ... 246
Relações métricas ... 246
Triângulos semelhantes ... 246
As relações métricas ... 247
Outra demonstração do teorema de Pitágoras ... 247
3 Relações trigonométricas no triângulo retângulo ... 249
Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos ... 249
Seno, cosseno e tangente só dependem do ângulo ... 250
Relações entre seno, cosseno e tangente ... 251
Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis ... 254
"Resolvendo" triângulos retângulos ... 254
As distâncias da Terra ao Sol e à Lua ... 255
A evolução do cálculo dos senos e cossenos ... 256

Caiu no Enem ... 264
Respostas ... 268
Sugestões de leituras complementares ... 283
Significado das siglas de vestibulares ... 285
Bibliografia ... 286
Índice remissivo ... 287

Fonte: Dante (2017)

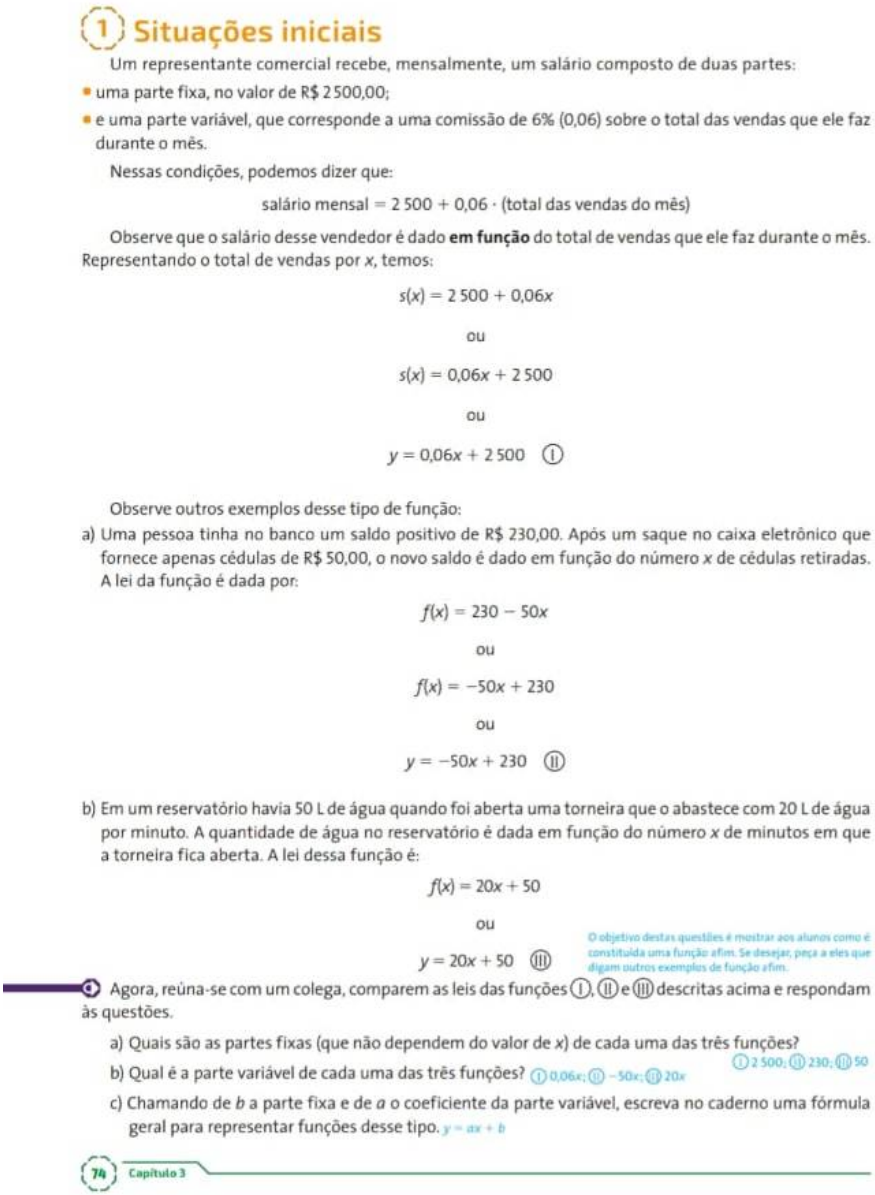
Podemos ver presença de conteúdos majoritariamente algébricos, descritas nos capítulos 1 ao 7 e apenas o capítulo 8 reservados a conteúdos geométricos.

A unidade 1, apresenta os Conceitos de Conjuntos e Funções. A disposição de conteúdo dessa unidade é boa pois o docente consegue explicar função com os conceitos de conjuntos que estão bem definidos já que temos disposto o capítulo 1 inteiro para explicar conjuntos com vários tópicos e o capítulo dois, inteiro destinado a funções. Assim, podemos perceber uma grande preocupação de construção de pensamento uma vez que do tópico 7 ao 10 do capítulo 1, ou o 2, 9 e 10 do capítulo 2 há a interligação da função afim com o

quotidiano e outras áreas da matemática, fazendo com que a matemática, em particular a álgebra, tenha significado o que é muito positivo conforme Santos (2011).

Já a unidade 2 e 3 são reservadas para explicar os principais tipos de funções na matemática: função afim, função quadrática, função exponencial e logaritmo. Neste último, diferente dos outros casos, o conteúdo de logaritmo vem precedido do conteúdo de função logaritmo. O autor aborda os conteúdos geralmente com uma situação problema. E em outros casos não, mas em todos há preocupação com contexto. Veja abaixo:

Figura 13 – Contextualização da função afim



1 Situações iniciais

Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes:

- uma parte fixa, no valor de R$ 2 500,00;
- e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês.

Nessas condições, podemos dizer que:

salário mensal = 2 500 + 0,06 · (total das vendas do mês)

Observe que o salário desse vendedor é dado **em função** do total de vendas que ele faz durante o mês. Representando o total de vendas por x, temos:

$$s(x) = 2\,500 + 0{,}06x$$

ou

$$s(x) = 0{,}06x + 2\,500$$

ou

$$y = 0{,}06x + 2\,500 \quad (\text{I})$$

Observe outros exemplos desse tipo de função:

a) Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R$ 230,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas cédulas de R$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número x de cédulas retiradas. A lei da função é dada por:

$$f(x) = 230 - 50x$$

ou

$$f(x) = -50x + 230$$

ou

$$y = -50x + 230 \quad (\text{II})$$

b) Em um reservatório havia 50 L de água quando foi aberta uma torneira que o abastece com 20 L de água por minuto. A quantidade de água no reservatório é dada em função do número x de minutos em que a torneira fica aberta. A lei dessa função é:

$$f(x) = 20x + 50$$

ou

$$y = 20x + 50 \quad (\text{III})$$

O objetivo destas questões é mostrar aos alunos como é constituída uma função afim. Se desejar, peça a eles que digam outros exemplos de função afim.

Agora, reúna-se com um colega, comparem as leis das funções (I), (II) e (III) descritas acima e respondam às questões.

a) Quais são as partes fixas (que não dependem do valor de x) de cada uma das três funções? (I) 2 500; (II) 230; (III) 50

b) Qual é a parte variável de cada uma das três funções? (I) 0,06x; (II) −50x; (III) 20x

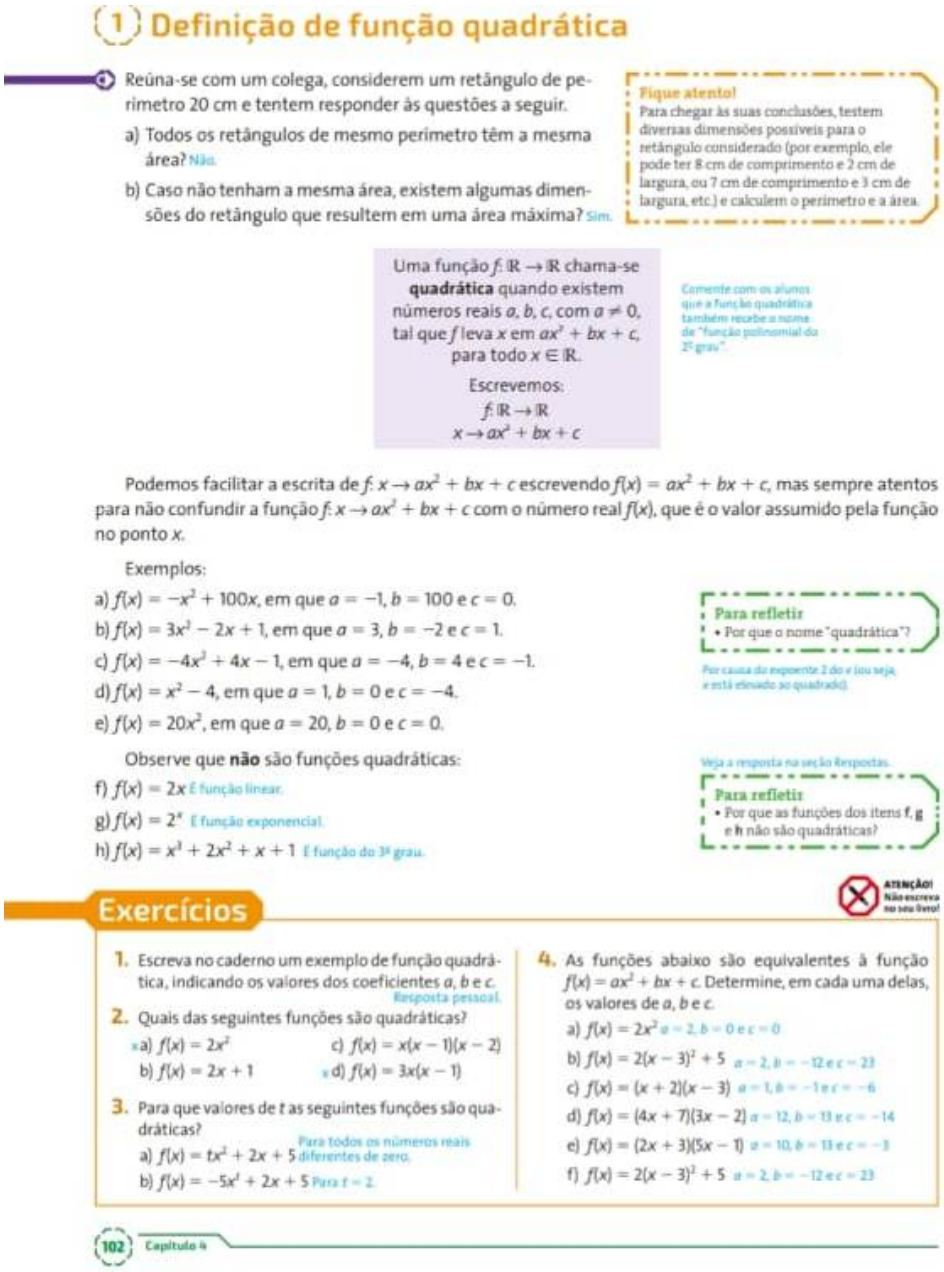
c) Chamando de b a parte fixa e de a o coeficiente da parte variável, escreva no caderno uma fórmula geral para representar funções desse tipo. $y = ax + b$

74 Capítulo 3

Fonte: Dante (2017)

A função afim é abordada com a situação apresentada acima.

Figura 14 – Definição de função quadrática



1 Definição de função quadrática

Reúna-se com um colega, considerem um retângulo de perímetro 20 cm e tentem responder às questões a seguir.

a) Todos os retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área? Não.

b) Caso não tenham a mesma área, existem algumas dimensões do retângulo que resultem em uma área máxima? Sim.

Fique atento!
Para chegar às suas conclusões, testem diversas dimensões possíveis para o retângulo considerado (por exemplo, ele pode ter 8 cm de comprimento e 2 cm de largura, ou 7 cm de comprimento e 3 cm de largura, etc.) e calculem o perímetro e a área.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que f leva x em $ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escrevemos:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to ax^2 + bx + c$

Comente com os alunos que a função quadrática também recebe o nome de "função polinomial do 2º grau".

Podemos facilitar a escrita de $f: x \to ax^2 + bx + c$ escrevendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, mas sempre atentos para não confundir a função $f: x \to ax^2 + bx + c$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x.

Exemplos:

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$.
b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$.
c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, em que $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$.
d) $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$.
e) $f(x) = 20x^2$, em que $a = 20$, $b = 0$ e $c = 0$.

Para refletir
• Por que o nome "quadrática"?

Por causa do expoente 2 do *x* (ou seja, *x* está elevado ao quadrado).

Observe que **não** são funções quadráticas:

f) $f(x) = 2x$ É função linear.
g) $f(x) = 2^x$ É função exponencial.
h) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ É função do 3º grau.

Veja a resposta na seção Respostas.

Para refletir
• Por que as funções dos itens **f**, **g** e **h** não são quadráticas?

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Exercícios

1. Escreva no caderno um exemplo de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes a, b e c. Resposta pessoal.

2. Quais das seguintes funções são quadráticas?
a) $f(x) = 2x^2$
b) $f(x) = 2x + 1$
c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$
d) $f(x) = 3x(x - 1)$

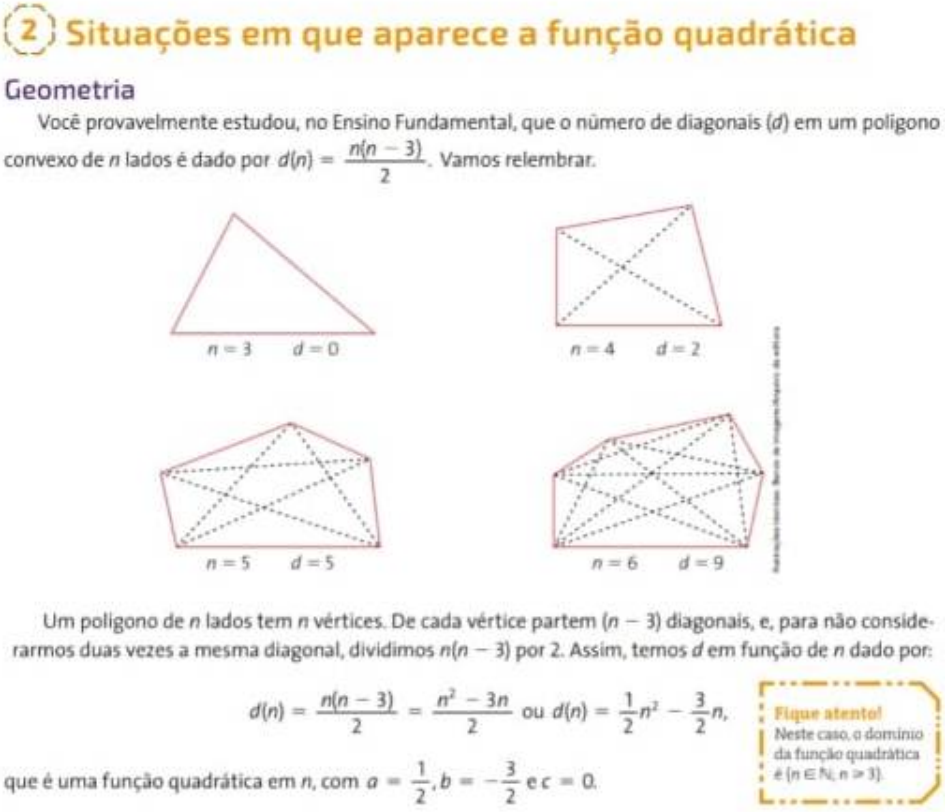
3. Para que valores de t as seguintes funções são quadráticas?
a) $f(x) = tx^2 + 2x + 5$ Para todos os números reais diferentes de zero.
b) $f(x) = -5x^t + 2x + 5$ Para $t = 2$.

4. As funções abaixo são equivalentes à função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine, em cada uma delas, os valores de a, b e c.
a) $f(x) = 2x^2$ $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$
b) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$
c) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$
d) $f(x) = (4x + 7)(3x - 2)$ $a = 12$, $b = 13$ e $c = -14$
e) $f(x) = (2x + 3)(5x - 1)$ $a = 10$, $b = 13$ e $c = -3$
f) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$

102 Capítulo 6

Fonte: Dante (2017)

Figura 15 – Situações que aparecem função quadrática



2 Situações em que aparece a função quadrática

Geometria

Você provavelmente estudou, no Ensino Fundamental, que o número de diagonais (d) em um polígono convexo de n lados é dado por $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. Vamos relembrar.

$n = 3$ $d = 0$ $n = 4$ $d = 2$

$n = 5$ $d = 5$ $n = 6$ $d = 9$

Um polígono de n lados tem n vértices. De cada vértice partem $(n - 3)$ diagonais, e, para não considerarmos duas vezes a mesma diagonal, dividimos $n(n - 3)$ por 2. Assim, temos d em função de n dado por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} \text{ ou } d(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n,$$

que é uma função quadrática em n, com $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ e $c = 0$.

Fique atento!
Neste caso, o domínio da função quadrática é $\{n \in \mathbb{N}; n \geq 3\}$.

Fonte: Dante (2017)

Embora a Função Quadrática não tenha sido abordada com uma situação problema, a mesma logo após a definição e alguns exercícios iniciais aparece com uma situação contextualizada do uso da função quadrática.

Figura 16 – Contextualização da função exponencial

Situações iniciais

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e montem no caderno uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.

Cultura de bactéria *Escherichia coli* em placa de Petri.

Estimule os alunos a preencher a tabela corretamente, explicando-lhes, caso necessário, o que deve ser colocado em cada coluna. Se eles quiserem, podem até usar calculadora (a maioria dos celulares tem uma, por exemplo). Depois, confira com eles oralmente e passe a questioná-los sobre as questões propostas. No item a, a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens b, c e d, a ideia é chegar intuitivamente à lei da função exponencial que descreve a situação proposta.

Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

Dados de uma cultura de bactérias

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1000	1
1	2000	2

Fonte: Dados fictícios.

Depois que a tabela estiver totalmente preenchida, reflitam sobre as seguintes questões:

a) Na 1ª hora, a quantidade de bactérias aumentou em 1 000 (era 1000, foi para 2000). E na 2ª hora? E na 3ª hora? Por que esse valor não é sempre o mesmo? 4 000 bactérias; 8 000 bactérias; porque o número de bactérias está aumentando em função do tempo.

b) Existe uma lógica na sequência de valores que indicam a proporção entre a quantidade de bactérias em determinada hora e o valor inicial? Qual é essa lógica? Sim; a cada hora que passa o número de bactérias é o dobro do que o número de bactérias da hora anterior.

c) Usando a lógica interpretada no item anterior, qual deve ser a proporção entre a quantidade de bactérias após 20 horas e a quantidade inicial? E qual deve ser a quantidade de bactérias após 20 horas? 2^{20}; $1000 \cdot 2^{20}$

d) Qual deve ser a quantidade de bactérias após x horas? $1000 \cdot 2^x$

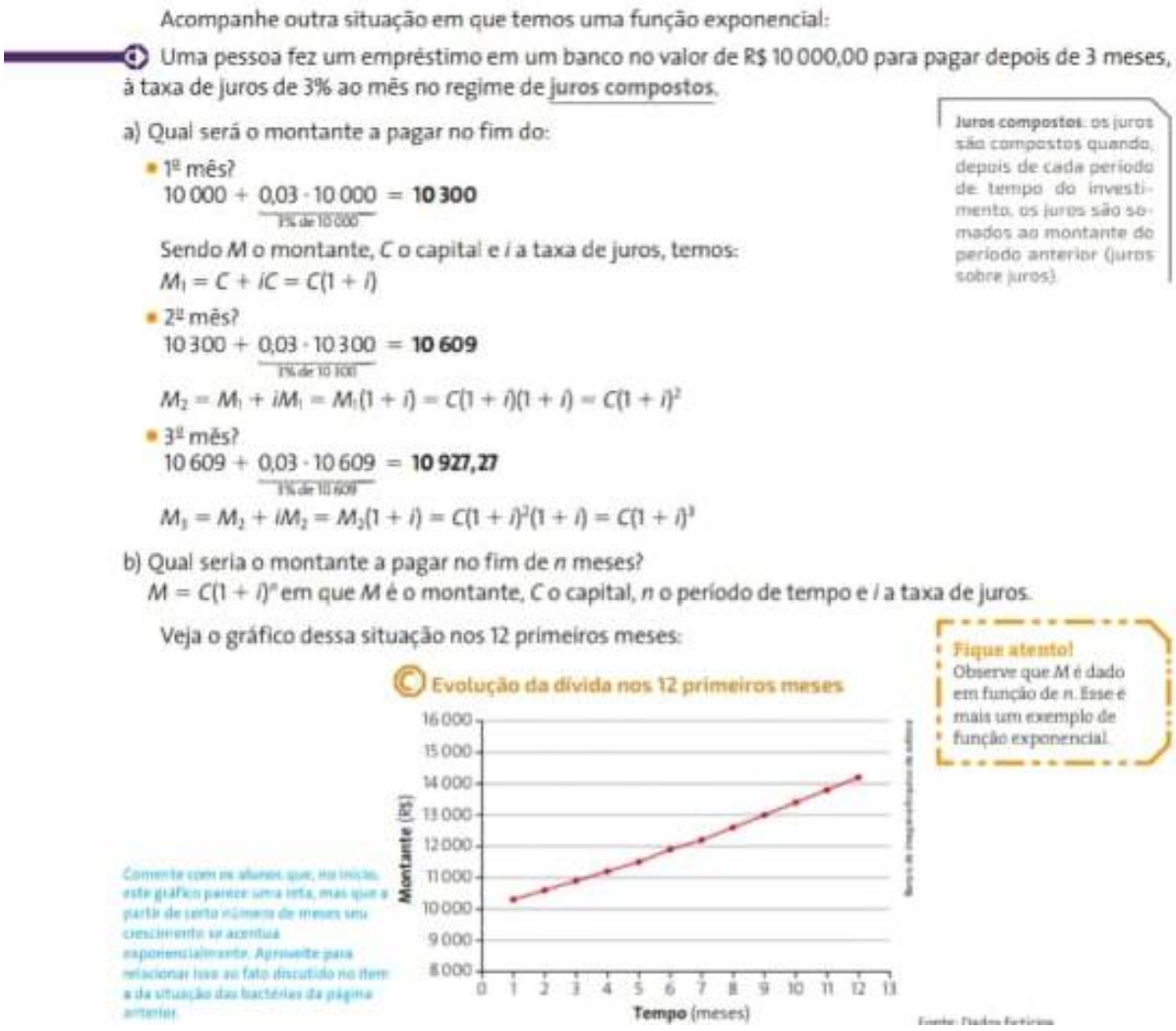
Você sabia?
Na prática, as bactérias podem desenvolver-se sobre uma camada de alimentos, e sua população é medida pela área que ocupam.

De modo geral, o modelo matemático usado para resolver situações como essa é dado pela **função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$**. No caso dessa situação, $f(x) = 1000 \cdot 2^x$ é a lei da função que descreve o número de bactérias após x horas, $b = 1000$ representa a população de bactérias existentes no início da pesquisa ($f(0) = b$), $a = 2$ representa a proporção entre as quantidades de bactérias em horas consecutivas $\left(\text{por exemplo, } \frac{f(1)}{f(0)} \text{ ou } \frac{f(2)}{f(1)}\right)$ e x é o tempo decorrido, em horas.

148 Capítulo 5

Fonte: Dante (2017)

Figura 17 – Mais contextualização da função exponencial



Acompanhe outra situação em que temos uma função exponencial:

Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de R$ 10 000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 3% ao mês no regime de juros compostos.

Juros compostos: os juros são compostos quando, depois de cada período de tempo do investimento, os juros são somados ao montante do período anterior (juros sobre juros).

a) Qual será o montante a pagar no fim do:

- 1º mês?

$10\,000 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,000}_{3\% \text{ de } 10\,000} = \mathbf{10\,300}$

Sendo M o montante, C o capital e i a taxa de juros, temos:

$M_1 = C + iC = C(1 + i)$

- 2º mês?

$10\,300 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,300}_{3\% \text{ de } 10\,300} = \mathbf{10\,609}$

$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$

- 3º mês?

$10\,609 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,609}_{3\% \text{ de } 10\,609} = \mathbf{10\,927{,}27}$

$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$

b) Qual seria o montante a pagar no fim de n meses?

$M = C(1 + i)^n$ em que M é o montante, C o capital, n o período de tempo e i a taxa de juros.

Veja o gráfico dessa situação nos 12 primeiros meses:

Fique atento! Observe que M é dado em função de n. Esse é mais um exemplo de função exponencial.

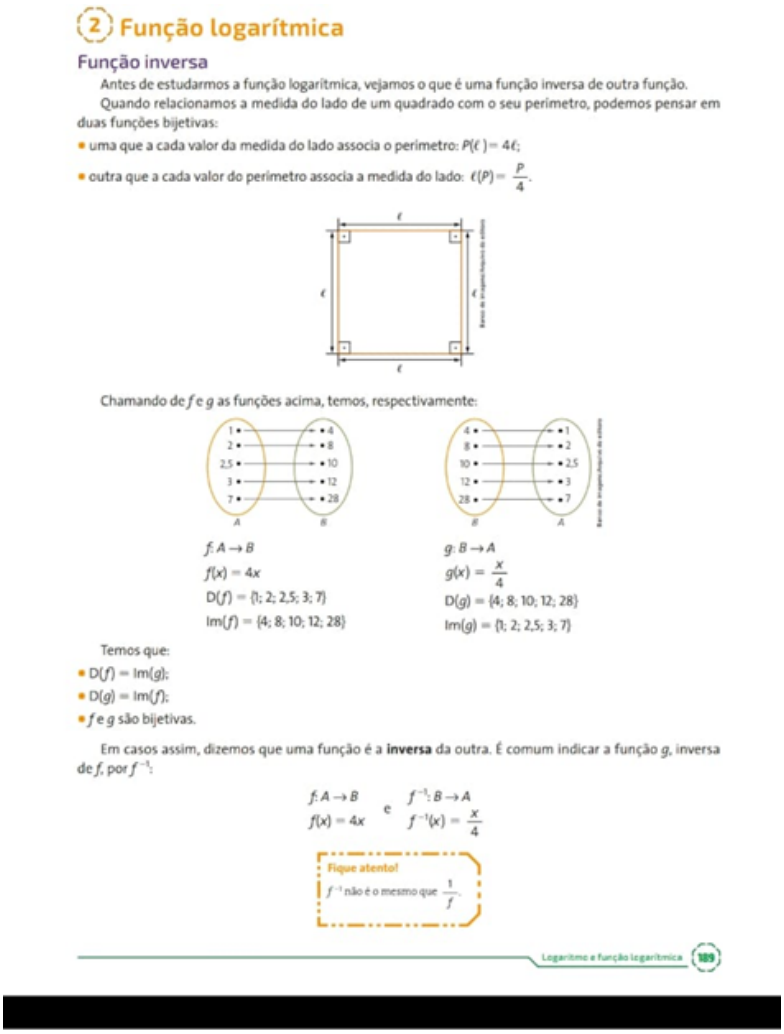
Evolução da dívida nos 12 primeiros meses

Comente com os alunos que, no início, este gráfico parece uma reta, mas que a partir de certo número de meses seu crescimento se acentua exponencialmente. Aproveite para relacionar isso ao fato discutido no item a da situação das bactérias da página anterior.

Fonte: Dante (2017)

Na figura acima também é apresentada uma situação problema sobre a função exponencial e depois introduz o assunto, a partir do problema.

Figura 18 – Contextualização da função logaritmica



2 Função logarítmica

Função inversa

Antes de estudarmos a função logaritmica, vejamos o que é uma função inversa de outra função.

Quando relacionamos a medida do lado de um quadrado com o seu perímetro, podemos pensar em duas funções bijetivas:

- uma que a cada valor da medida do lado associa o perímetro: $P(\ell) = 4\ell$;
- outra que a cada valor do perímetro associa a medida do lado: $\ell(P) = \frac{P}{4}$.

Chamando de f e g as funções acima, temos, respectivamente:

$f: A \to B$
$f(x) = 4x$
$D(f) = \{1; 2; 2,5; 3; 7\}$
$Im(f) = \{4; 8; 10; 12; 28\}$

$g: B \to A$
$g(x) = \frac{x}{4}$
$D(g) = \{4; 8; 10; 12; 28\}$
$Im(g) = \{1; 2; 2,5; 3; 7\}$

Temos que:

- $D(f) = Im(g)$;
- $D(g) = Im(f)$;
- f e g são bijetivas.

Em casos assim, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. É comum indicar a função g, inversa de f, por f^{-1}:

$f: A \to B$ e $f^{-1}: B \to A$
$f(x) = 4x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$

Fique atento!
f^{-1} não é o mesmo que $\frac{1}{f}$.

Logaritmo e função logarítmica 189

Definição de função inversa

Dada uma função $f: A \to B$, bijetiva, denomina-se **função inversa** de f a função $g: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Ou, de modo equivalente:

A função $g: B \to A$ é a inversa da função $f: A \to B$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Fonte: Dante (2017)

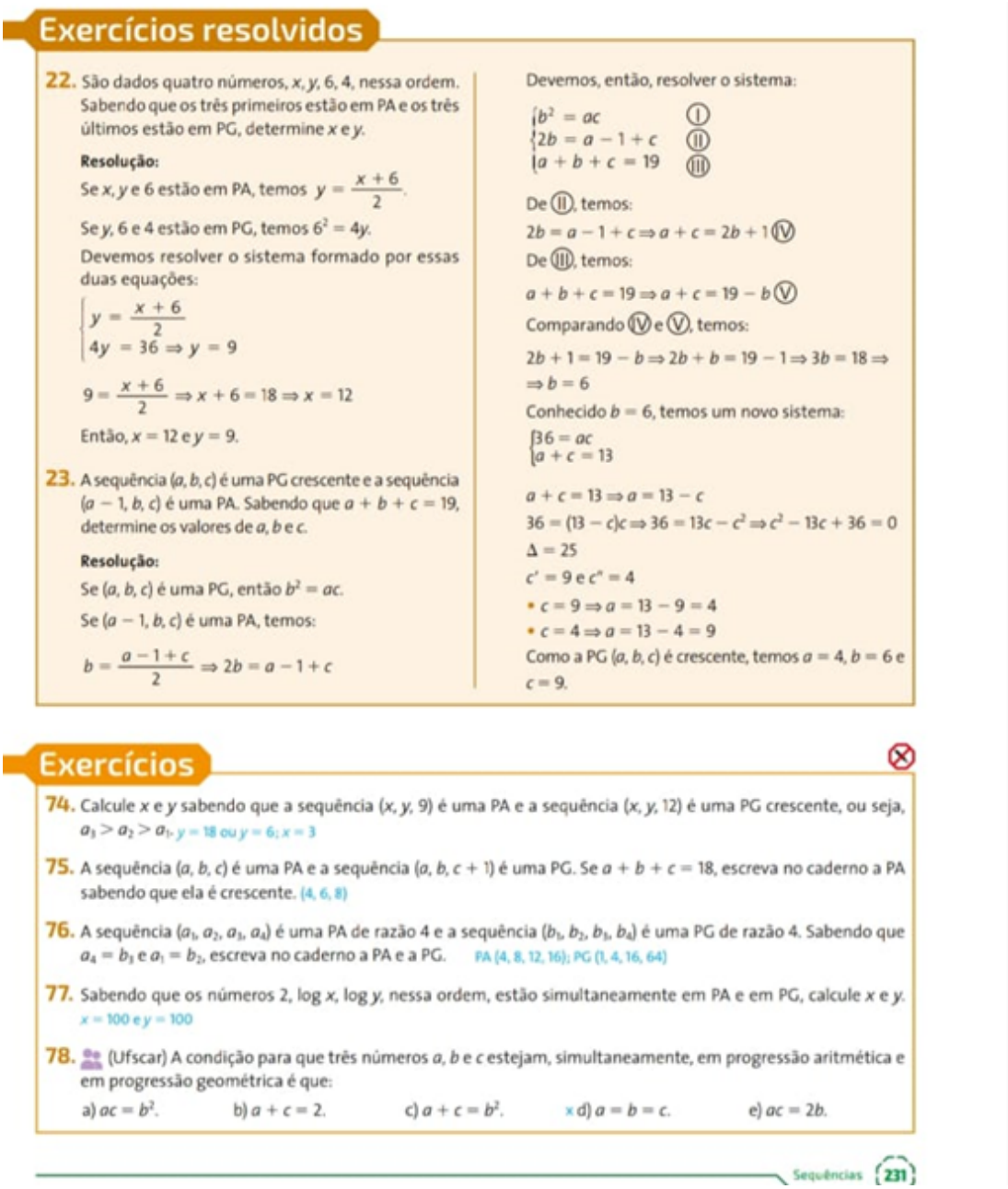
Para explicar a definição de logaritmo o autor julgou necessário explicar primeiro o que é função inversa. Assim, o exemplar faz uma breve explicação de função inversa e inicia a definição de função logarítmica.

A unidade 4 tem apenas o capítulo 7 como tema algébrico. A disposição deste conteúdo segue de forma análoga aos capítulos de álgebra anteriores.

- Disposição dos exemplos e exercícios

Há grande presença de exemplos na obra como os que complementam a definição, os de contextos e em situações problemas. Todos estes vistos na imagem acima. Estes diversificados tipos de exemplos indicam que estão respaldados pelo PCN de Matemática (2000) que vimos que os conteúdos de matemática devem ser desenvolvidos de modo que devem facilitar a interpretação da realidade.

Figura 19 – Exercícios e exercícios resolvidos



Exercícios resolvidos

22. São dados quatro números, $x, y, 6, 4$, nessa ordem. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos estão em PG, determine x e y.

Resolução:

Se x, y e 6 estão em PA, temos $y = \frac{x+6}{2}$.

Se y, 6 e 4 estão em PG, temos $6^2 = 4y$.

Devemos resolver o sistema formado por essas duas equações:

$$\begin{cases} y = \frac{x+6}{2} \\ 4y = 36 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

$$9 = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x + 6 = 18 \Rightarrow x = 12$$

Então, $x = 12$ e $y = 9$.

23. A sequência (a, b, c) é uma PG crescente e a sequência $(a - 1, b, c)$ é uma PA. Sabendo que $a + b + c = 19$, determine os valores de a, b e c.

Resolução:

Se (a, b, c) é uma PG, então $b^2 = ac$.

Se $(a - 1, b, c)$ é uma PA, temos:

$$b = \frac{a-1+c}{2} \Rightarrow 2b = a - 1 + c$$

Devemos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} b^2 = ac & \text{(I)} \\ 2b = a - 1 + c & \text{(II)} \\ a + b + c = 19 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II), temos:

$2b = a - 1 + c \Rightarrow a + c = 2b + 1$ (IV)

De (III), temos:

$a + b + c = 19 \Rightarrow a + c = 19 - b$ (V)

Comparando (IV) e (V), temos:

$2b + 1 = 19 - b \Rightarrow 2b + b = 19 - 1 \Rightarrow 3b = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 6$

Conhecido $b = 6$, temos um novo sistema:

$$\begin{cases} 36 = ac \\ a + c = 13 \end{cases}$$

$a + c = 13 \Rightarrow a = 13 - c$

$36 = (13 - c)c \Rightarrow 36 = 13c - c^2 \Rightarrow c^2 - 13c + 36 = 0$

$\Delta = 25$

$c' = 9$ e $c'' = 4$

- $c = 9 \Rightarrow a = 13 - 9 = 4$
- $c = 4 \Rightarrow a = 13 - 4 = 9$

Como a PG (a, b, c) é crescente, temos $a = 4$, $b = 6$ e $c = 9$.

Exercícios

74. Calcule x e y sabendo que a sequência $(x, y, 9)$ é uma PA e a sequência $(x, y, 12)$ é uma PG crescente, ou seja, $a_3 > a_2 > a_1$. $y = 18$ ou $y = 6$; $x = 3$

75. A sequência (a, b, c) é uma PA e a sequência $(a, b, c + 1)$ é uma PG. Se $a + b + c = 18$, escreva no caderno a PA sabendo que ela é crescente. (4, 6, 8)

76. A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4) é uma PA de razão 4 e a sequência (b_1, b_2, b_3, b_4) é uma PG de razão 4. Sabendo que $a_4 = b_3$ e $a_1 = b_2$, escreva no caderno a PA e a PG. PA (4, 8, 12, 16); PG (1, 4, 16, 64)

77. Sabendo que os números 2, $\log x$, $\log y$, nessa ordem, estão simultaneamente em PA e em PG, calcule x e y. $x = 100$ e $y = 100$

78. (Ufscar) A condição para que três números a, b e c estejam, simultaneamente, em progressão aritmética e em progressão geométrica é que:

a) $ac = b^2$. b) $a + c = 2$. c) $a + c = b^2$. x d) $a = b = c$. e) $ac = 2b$.

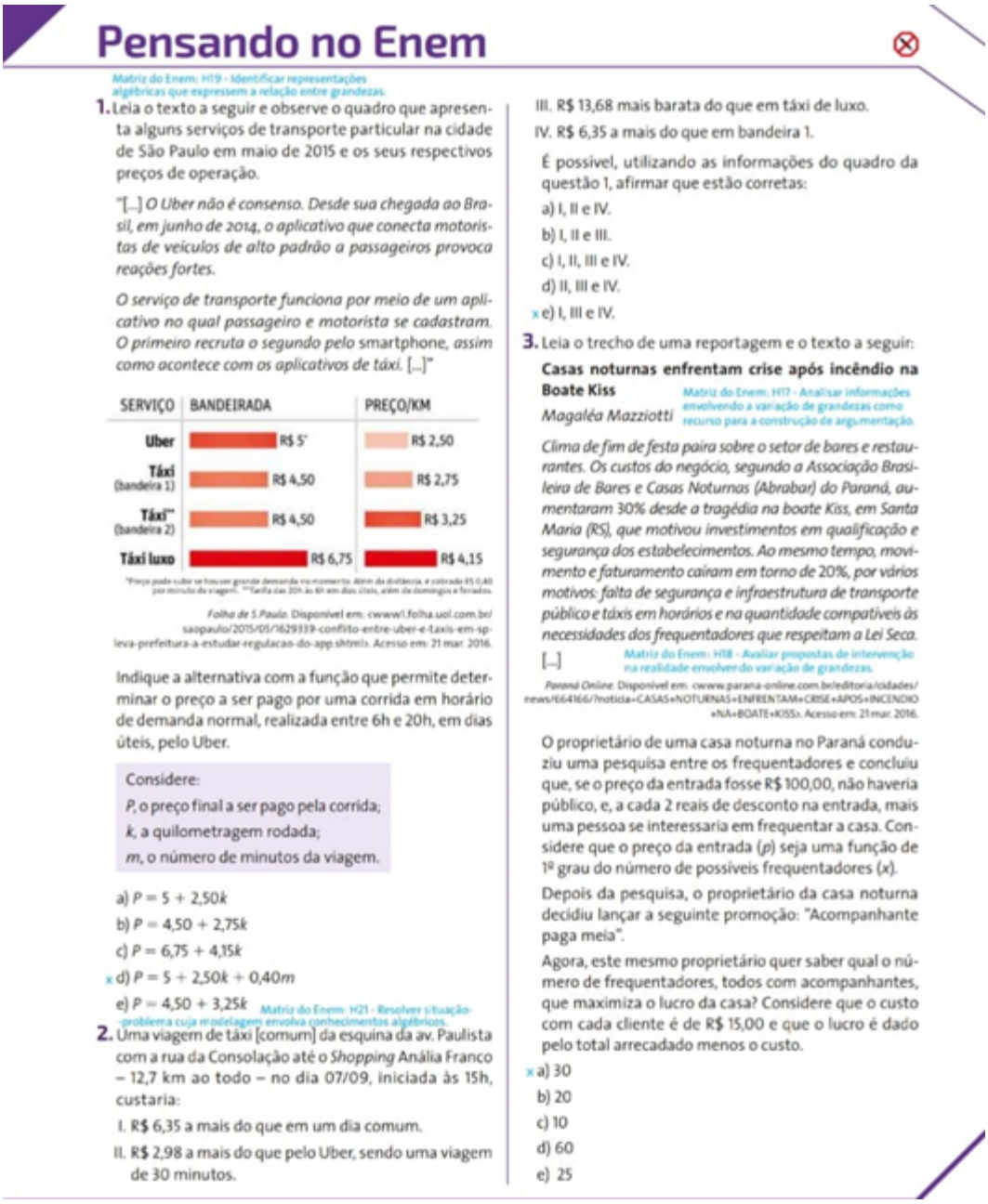
Sequências 231

Fonte: Dante (2017)

Os exercícios deste exemplar estão separados por sessão, isto é: a cada parte do conteúdo aparecem uns exercícios, depois de mais conteúdo, temos outros exercícios e ao

final de alguns capítulos têm exercícios de vestibular e do ENEM. Há também a presença de exercícios resolvidos sempre antes de iniciar os exercícios que os alunos devem desenvolver. Segundo o autor, estes não são para serem modelos para seguir e sim, para inspirar e indicar estratégias para a resolução de outros problemas (Dante, 2017, p.4).

Figura 20 – Aplicações de exercícios para Exame Nacional do Ensino Médio



Pensando no Enem

Matriz do Enem: H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

1. Leia o texto a seguir e observe o quadro que apresenta alguns serviços de transporte particular na cidade de São Paulo em maio de 2015 e os seus respectivos preços de operação.

"[...] *O Uber não é consenso. Desde sua chegada ao Brasil, em junho de 2014, o aplicativo que conecta motoristas de veículos de alto padrão a passageiros provoca reações fortes.*

O serviço de transporte funciona por meio de um aplicativo no qual passageiro e motorista se cadastram. O primeiro recruta o segundo pelo smartphone, *assim como acontece com os aplicativos de táxi.* [...]"

SERVIÇO	BANDEIRADA	PREÇO/KM
Uber	R$ 5*	R$ 2,50
Táxi (bandeira 1)	R$ 4,50	R$ 2,75
Táxi** (bandeira 2)	R$ 4,50	R$ 3,25
Táxi luxo	R$ 6,75	R$ 4,15

*Preço pode subir se houver grande demanda no momento. Além da distância, é cobrado R$ 0,40 por minuto da viagem. **Tarifa das 20h às 6h em dias úteis, além de domingos e feriados.

Folha de S.Paulo. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/saopaulo/2015/05/1629339-conflito-entre-uber-e-taxis-em-sp-leva-prefeitura-a-estudar-regulacao-do-app.shtml>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Indique a alternativa com a função que permite determinar o preço a ser pago por uma corrida em horário de demanda normal, realizada entre 6h e 20h, em dias úteis, pelo Uber.

Considere:
P, o preço final a ser pago pela corrida;
k, a quilometragem rodada;
m, o número de minutos da viagem.

a) $P = 5 + 2{,}50k$
b) $P = 4{,}50 + 2{,}75k$
c) $P = 6{,}75 + 4{,}15k$
x d) $P = 5 + 2{,}50k + 0{,}40m$
e) $P = 4{,}50 + 3{,}25k$

Matriz do Enem: H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

2. Uma viagem de táxi [comum] da esquina da av. Paulista com a rua da Consolação até o *Shopping* Anália Franco – 12,7 km ao todo – no dia 07/09, iniciada às 15h, custaria:

I. R$ 6,35 a mais do que em um dia comum.
II. R$ 2,98 a mais do que pelo Uber, sendo uma viagem de 30 minutos.
III. R$ 13,68 mais barata do que em táxi de luxo.
IV. R$ 6,35 a mais do que em bandeira 1.

É possível, utilizando as informações do quadro da questão 1, afirmar que estão corretas:

a) I, II e IV.
b) I, II e III.
c) I, II, III e IV.
d) II, III e IV.
x e) I, III e IV.

3. Leia o trecho de uma reportagem e o texto a seguir:

Casas noturnas enfrentam crise após incêndio na Boate Kiss

Magaléa Mazziotti

Matriz do Enem: H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

Clima de fim de festa paira sobre o setor de bares e restaurantes. Os custos do negócio, segundo a Associação Brasileira de Bares e Casas Noturnas (Abrabar) do Paraná, aumentaram 30% desde a tragédia na boate Kiss, em Santa Maria (RS), que motivou investimentos em qualificação e segurança dos estabelecimentos. Ao mesmo tempo, movimento e faturamento caíram em torno de 20%, por vários motivos: falta de segurança e infraestrutura de transporte público e táxis em horários e na quantidade compatíveis às necessidades dos frequentadores que respeitam a Lei Seca.

[...]

Matriz do Enem: H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Paraná Online. Disponível em: <www.parana-online.com.br/editoria/cidades/news/664166/?noticia=CASAS+NOTURNAS+ENFRENTAM+CRISE+APOS+INCENDIO+NA+BOATE+KISS>. Acesso em: 21 mar. 2016.

O proprietário de uma casa noturna no Paraná conduziu uma pesquisa entre os frequentadores e concluiu que, se o preço da entrada fosse R$ 100,00, não haveria público, e, a cada 2 reais de desconto na entrada, mais uma pessoa se interessaria em frequentar a casa. Considere que o preço da entrada (p) seja uma função de 1º grau do número de possíveis frequentadores (x).

Depois da pesquisa, o proprietário da casa noturna decidiu lançar a seguinte promoção: "Acompanhante paga meia".

Agora, este mesmo proprietário quer saber qual o número de frequentadores, todos com acompanhantes, que maximiza o lucro da casa? Considere que o custo com cada cliente é de R$ 15,00 e que o lucro é dado pelo total arrecadado menos o custo.

x a) 30
b) 20
c) 10
d) 60
e) 25

Fonte: Dante (2017)

- Disposição das definições apresentadas nos conteúdos abordados na obra didática

As definições são bem desenvolvidas com presença de exemplos e situações pro-

blemas, que é um dos assuntos discutidos no PCN (2000), voltados para exemplificação da realidade e focado em deixar a álgebra compreensiva com a retomada de conteúdos anteriores. Algumas vezes as definições são dadas inicialmente e outras há uma motivação inicial para entrar na definição.

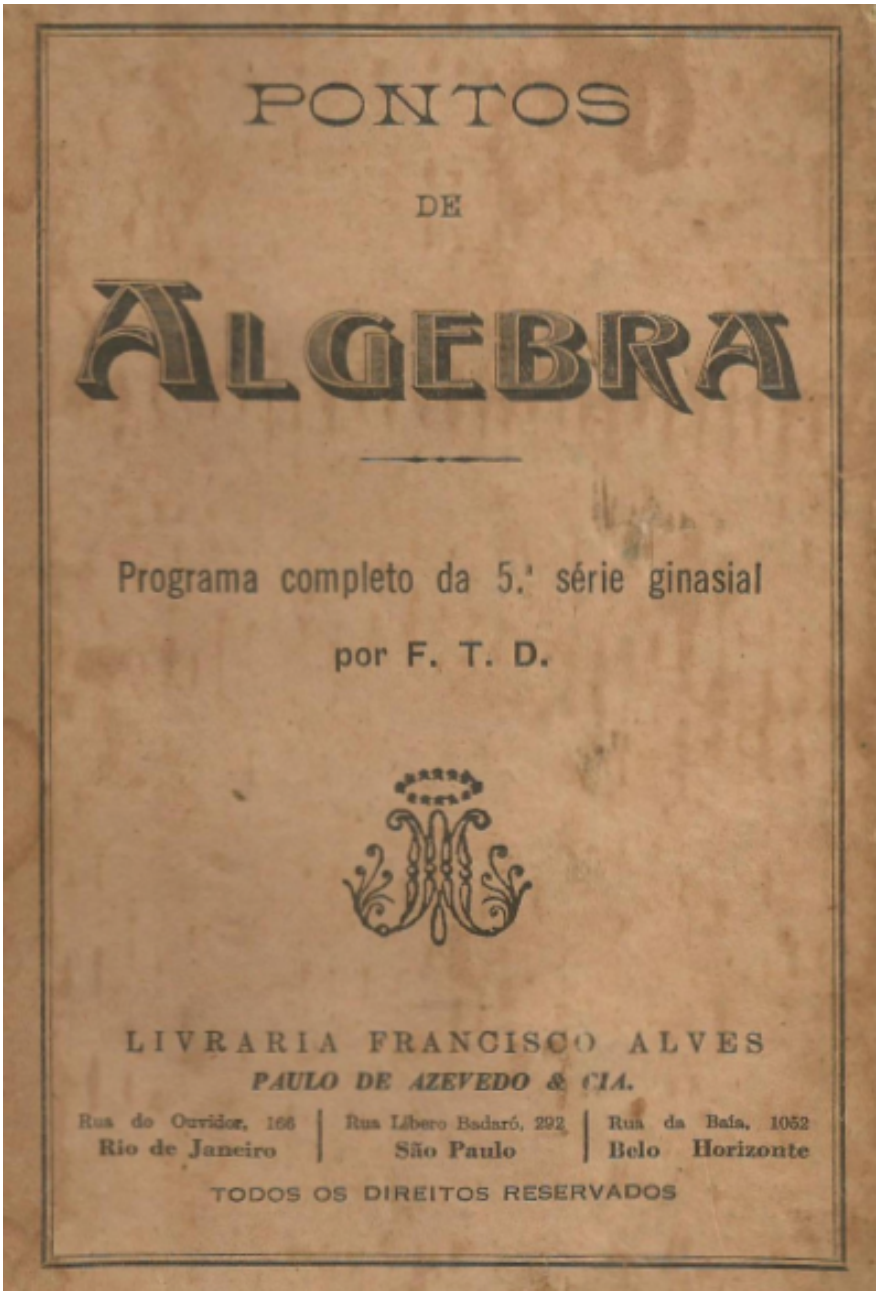
- Construção do pensamento algébrico

Conforme visto anteriormente, é importante construir um pensamento algébrico no aluno para que o mesmo consiga compreender as generalizações algébricas. O fato de o livro apresentar revisões, contextos e definições anteriores para formular novas definições contribui fortemente para a construção do pensamento uma vez que este tipo de abordagem do livro contribui para que os conteúdos da álgebra não pareçam desconexos uns dos outros e sim conectados por retomadas de conteúdos, contextos e aplicações dos mesmos.

6.2 Obra referente à Reforma Francisco Campos

Livro: Pontos de Álgebra
Autor: F.T.D (1933)
Série: quinta série ginasial
Capa:

Figura 21 – Folha de rosto do livro Pontos de Álgebra



Fonte: FTD (1933)

• Qualidade do texto

Para a descrição nesse critério, decidimos verificar como a linguagem do livro se apresenta, isto é, como o texto apresenta explicações das definições, exemplos coerentes com as definições apresentadas, vocabulário de acordo com o tipo de ensino da época, presença de símbolos matemáticos. Além disso, também nos preocupamos em verificar se o texto se mostra inteiro ou fragmentado, isto é, o conteúdo abordado no livro segue em sequência ou é interrompido para mostrar outro conteúdo que ajude a explicar o assunto

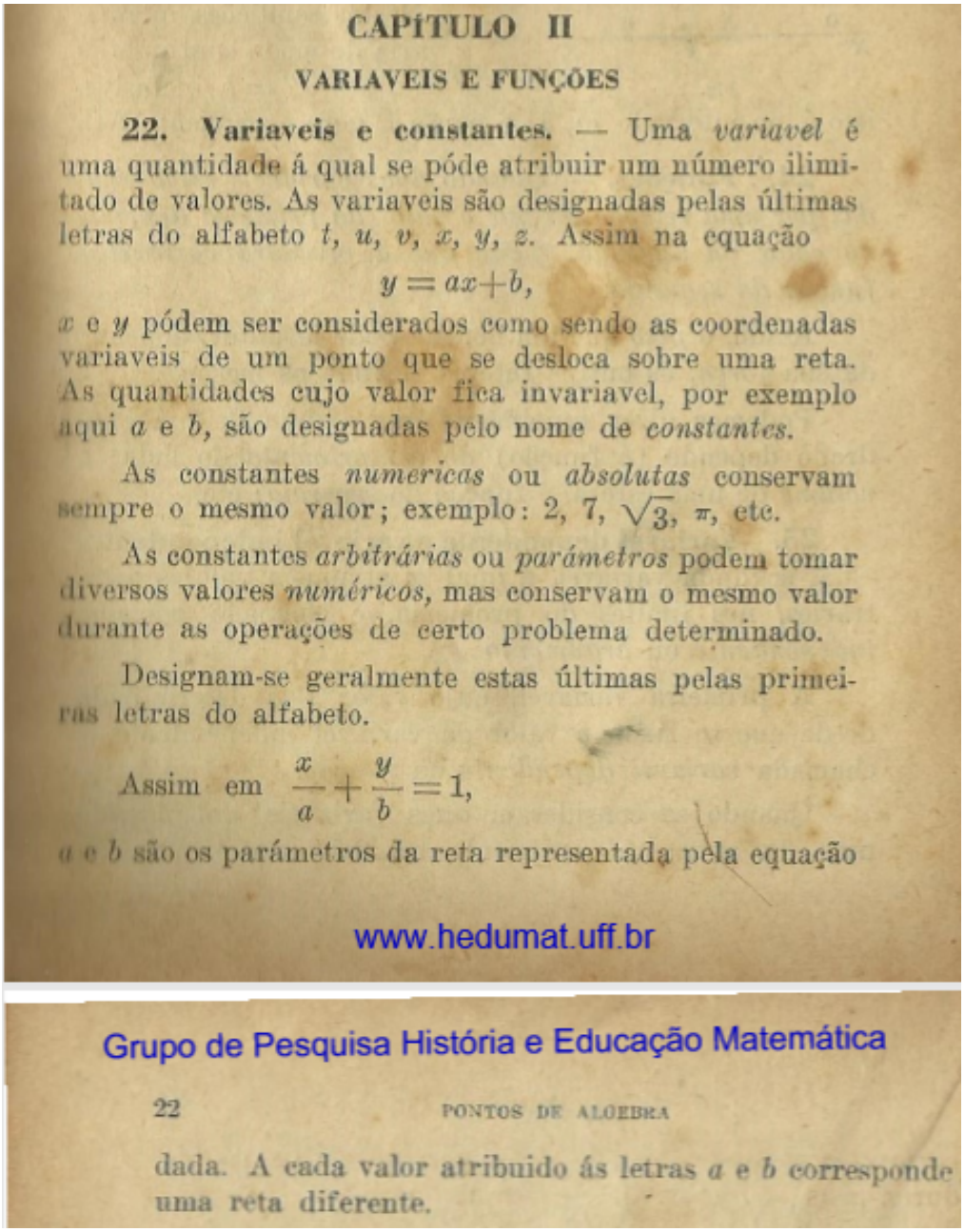
vigente e posteriormente o retoma com o objetivo de fazer um "link" no pensamento algébrico.

Procuramos nos basear na descrição da reforma Francisco Campos feita por Dalabrida (2009): que diz que havia grande necessidade em produzir ou formar alunos secundaristas autorregulados e prontos para o mercado trabalhista, conforme seguiam as exigências sociais disciplinar e capitalista - financeira isto é o texto tem que estar baseado em um ensino preparatório para os cursos superiores ou para o mercado tecnicista, assim, ao analisar se as definições tem explicações queremos saber se o livro vai apresentar definições sucintas com explicações generalizadas apenas para aquisições de técnicas de resolução de problemas algébricos. Já com exemplos coerentes com as definições apresentadas queremos notar se os mesmos complementam a definição e representam a reprodução de técnicas de resolução que buscam maior eficiência em vez de compreender a definição para resolver qualquer problema algébrico. Dizer se o vocabulário é adequado ao tipo de ensino da época e sobre presença de símbolos é dizer se o ensino é preparatório para empregar estudantes em áreas técnicas do mercado de trabalho. Isso significa que o estudante dos anos finais do ensino secundário deve estar totalmente familiarizado com a teoremas e demonstrações de acordo com o que descreve Dalabrida (2009). Por fim, dizer se o conteúdo é fragmentado ou não é se preocupar se tal fato interrompe o pensamento algébrico do aluno que foi uma das preocupações do ensino da álgebra apresentada no capítulo 2.

Lembramos que a valorização das técnicas ressaltada anteriormente era importante para entrar no ensino superior mais valorizado na época, já que para o mesmo o estudante teria que passar pelo curso complementar. Vale dizer que não estamos preocupados em dizer se existe a maneira certa de texto quanto a ser inteiro ou fragmentado, e sim dizer qual das abordagens o livro de época utilizava.

Ao olhar da época, o texto se mostra adequado às necessidades tecnicistas da época, uma vez que os conteúdos deste livro apresentam postulados e demonstrações. Assim, um texto mais rígido, culto coincidente com a proposta de ensino da época.

Figura 22 – Capítulo de variáveis e funções, Ponto de Álgebra



CAPITULO II

VARIAVEIS E FUNÇÕES

22. Variaveis e constantes. — Uma *variavel* é uma quantidade á qual se póde atribuir um número ilimitado de valores. As variaveis são designadas pelas últimas letras do alfabeto t, u, v, x, y, z. Assim na equação

$$y = ax + b,$$

x e y pódem ser considerados como sendo as coordenadas variaveis de um ponto que se desloca sobre uma reta. As quantidades cujo valor fica invariavel, por exemplo aqui a e b, são designadas pelo nome de *constantes*.

As constantes *numericas* ou *absolutas* conservam sempre o mesmo valor; exemplo: 2, 7, $\sqrt{3}$, π, etc.

As constantes *arbitrárias* ou *parámetros* podem tomar diversos valores *numéricos*, mas conservam o mesmo valor durante as operações de certo problema determinado.

Designam-se geralmente estas últimas pelas primeiras letras do alfabeto.

Assim em $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

a e b são os parámetros da reta representada pela equação

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

dada. A cada valor atribuido ás letras a e b corresponde uma reta diferente.

Fonte: FTD (1933)

Na imagem acima, vemos a presença da simbologia matemática e a necessidade de explicar detalhadamente o que é constante e variável e quais letras utilizar para cada uma dessas. Implicando em uma necessidade de padronização no ensino algébrico. Além disso, a obra mostra um exemplo de cada um desses assuntos. O interessante neste livro é que na maioria das vezes os exemplos são abstratos, isto é, um caso geral. Pela rigidez do texto do livro, que será mais bem tratada no próximo tópico, percebemos que a linguagem utilizada no ensino superior atual, torna se, em grande parte, semelhante a utilizada neste livro do ensino secundário. O livro apresenta vocabulário culto em parte por se tratar de

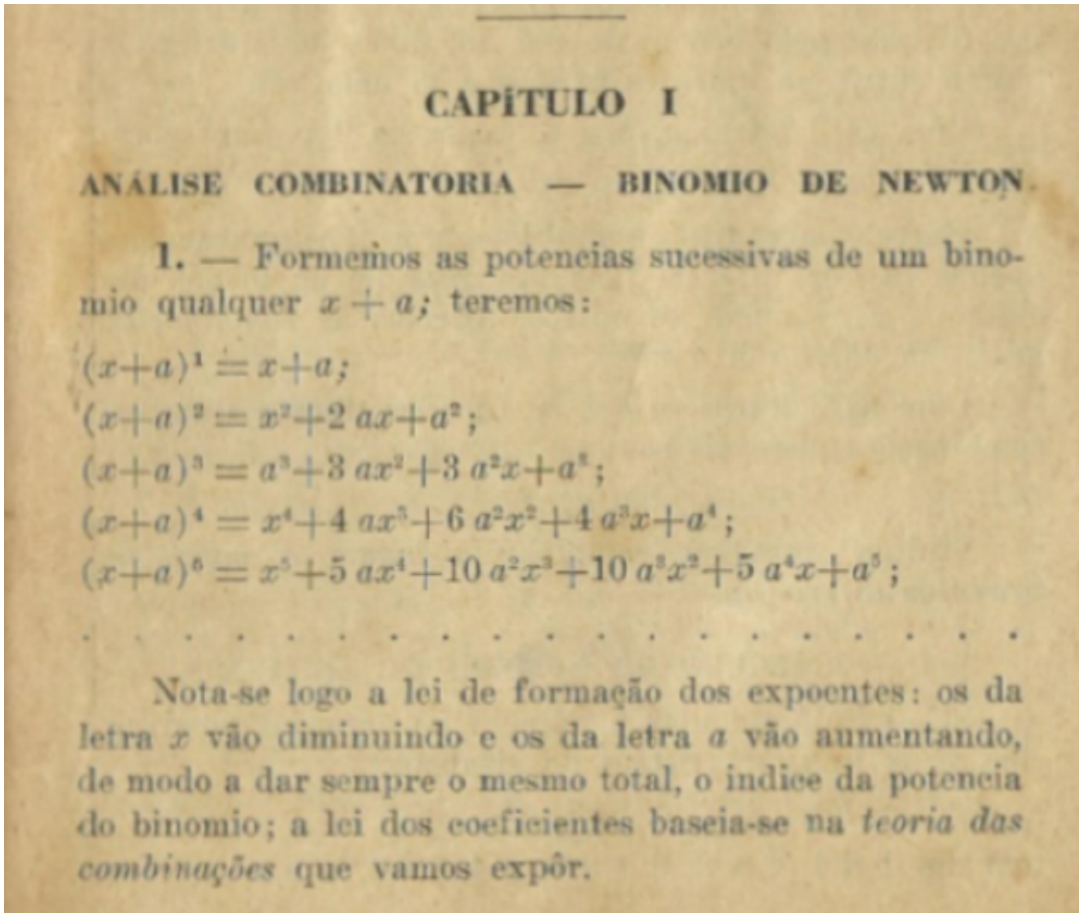
um exemplar didático/acadêmico. Mas apesar disso usa-se palavras como “arbitrário” ou “designação”, o que demonstra uma grande preocupação com questões que envolvem rigor e generalização.

Há forte presença de símbolos matemáticos como na figura 27. Pelo fato de o conteúdo ser bem complexo e ainda pela presença de demonstração que, como dito anteriormente, apresenta rigor matemático. Sobre o conteúdo abordado aparecer fragmentado veremos no próximo tópico em que o conteúdo de binômio de Newton aparece de forma fragmentada. entretanto, no contexto geral, o livro apresenta o conteúdo de forma fragmentada com menos frequência, isto é, os conteúdos expostos de maneira inteira são maioria, como hoje estamos mais habituados.

- Clareza da linguagem em concordância com a proposta da época.

Para responder a proposta deste tópico optamos por analisar vários trechos do livro, correspondentes a abordagem de cada conteúdo apresentado. Assim será possível verificar se a linguagem é clara em relação ao tipo de abordagem de ensino referente a época que já vimos que era tecnicista e preparatório para níveis de ensino superior principalmente na área de ciências exatas, como é o caso de o curso complementar que segundo Dassie (2008) era apenas pra algumas profissões como engenharia ou medicina na década de 30. Selecionamos alguns conceitos de álgebra no livro e verificamos como o mesmo está sendo abordado para então verificar a linguagem usada em função da época estudada.

Figura 23 – Apresentação binômio de Newton



CAPÍTULO I

ANÁLISE COMBINATORIA — BINOMIO DE NEWTON.

1. — Formemos as potencias sucessivas de um binomio qualquer $x+a$; teremos:

$(x+a)^1 = x+a;$
$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2;$
$(x+a)^3 = a^3+3ax^2+3a^2x+a^3;$
$(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4;$
$(x+a)^5 = x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5;$

. . . . . .

Nota-se logo a lei de formação dos expoentes: os da letra x vão diminuindo e os da letra a vão aumentando, de modo a dar sempre o mesmo total, o indice da potencia do binomio; a lei dos coeficientes baseia-se na *teoria das combinações* que vamos expôr.

Fonte: FTD (1933)

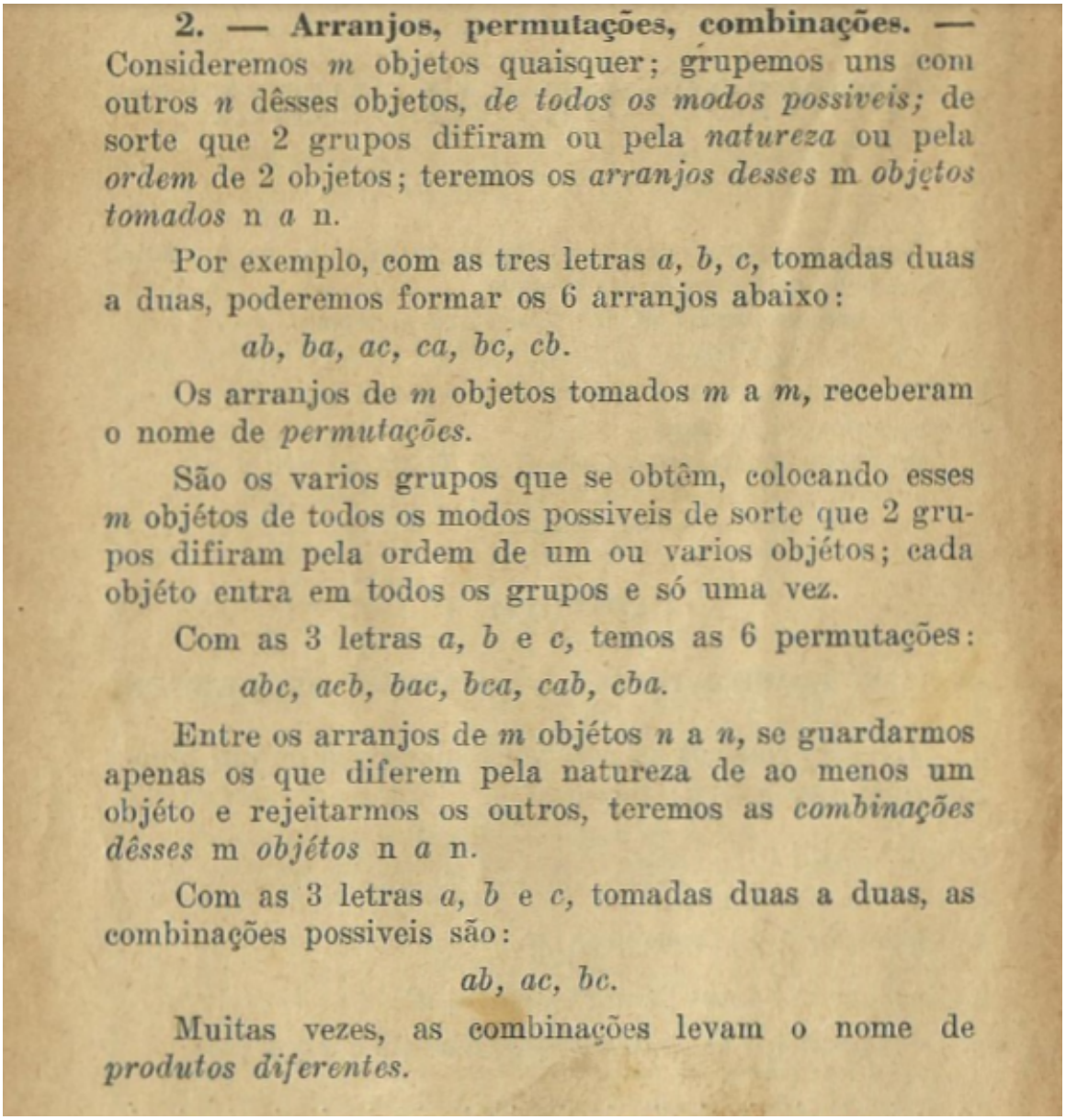
Neste trecho por exemplo podemos ver que o conceito de Binômio de Newton é dado de forma bem sucinta através de um exemplo generalizado, com ausência de exemplos, e de uma explicação mais elaborada com riqueza de detalhes. Em contrapartida alguma parte do conteúdo só poderá ser mais bem explicada com a teoria das combinações que o livro explicará posteriormente.

Existem pelo menos duas formas de poder ser abordados conteúdos em livros didáticos que foram analisadas durante o capítulo 2: Com definições e exemplos ou com metodologias de ensino como por exemplo: resolução de problemas, sugestões de jogos, história da matemática por exemplo. A primeira abordagem seria então uma abordagem mais técnica, baseada em aquisições de técnicas para resolução de problemas, podendo haver contexto ou não durante a explicação como é a preocupação mostrada por Zotti (2006) e a forma metodológica que é uma discussão mais recente que propõe durante algumas explicações de conteúdos uma atividade investigativa pro aluno ou para o professor realizar com o aluno, uma explicação via resolução de problemas ou até usar a história da matemática para descrever e explicar certo conteúdo da álgebra. Como é uma das

preocupações com o ensino de álgebra apresentada por Miguel, Fiorentini e Miriom, (1992) e Constatações feitas através da minha vivência com livros didáticos dos estágios e projetos de extensão da faculdade.

A forma abordada acima no trecho do livro é a abordagem que chamamos de técnica. Este tipo de abordagem é bem específico sem se preocupar com a efetividade total da aprendizagem, uma vez que o objetivo era formar para o contexto social da época. Adiante, o livro toma conceitos de análise combinatória para então voltar a definir binômio de Newton, mas sem abordagem metodológica ou exemplos. Veja abaixo:

Figura 24 – Definições de arranjos, permutações e combinações



2. — Arranjos, permutações, combinações. — Consideremos *m* objetos quaisquer; grupemos uns com outros *n* dêsses objetos, *de todos os modos possiveis;* de sorte que 2 grupos difiram ou pela *natureza* ou pela *ordem* de 2 objetos; teremos os *arranjos desses* m *objetos tomados* n *a* n.

Por exemplo, com as tres letras *a, b, c,* tomadas duas a duas, poderemos formar os 6 arranjos abaixo:

ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Os arranjos de *m* objetos tomados *m* a *m,* receberam o nome de *permutações.*

São os varios grupos que se obtêm, colocando esses *m* objétos de todos os modos possiveis de sorte que 2 grupos difiram pela ordem de um ou varios objétos; cada objéto entra em todos os grupos e só uma vez.

Com as 3 letras *a, b* e *c,* temos as 6 permutações:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Entre os arranjos de *m* objétos *n* a *n,* se guardarmos apenas os que diferem pela natureza de ao menos um objéto e rejeitarmos os outros, teremos as *combinações dêsses* m *objétos* n *a* n.

Com as 3 letras *a, b* e *c,* tomadas duas a duas, as combinações possiveis são:

ab, ac, bc.

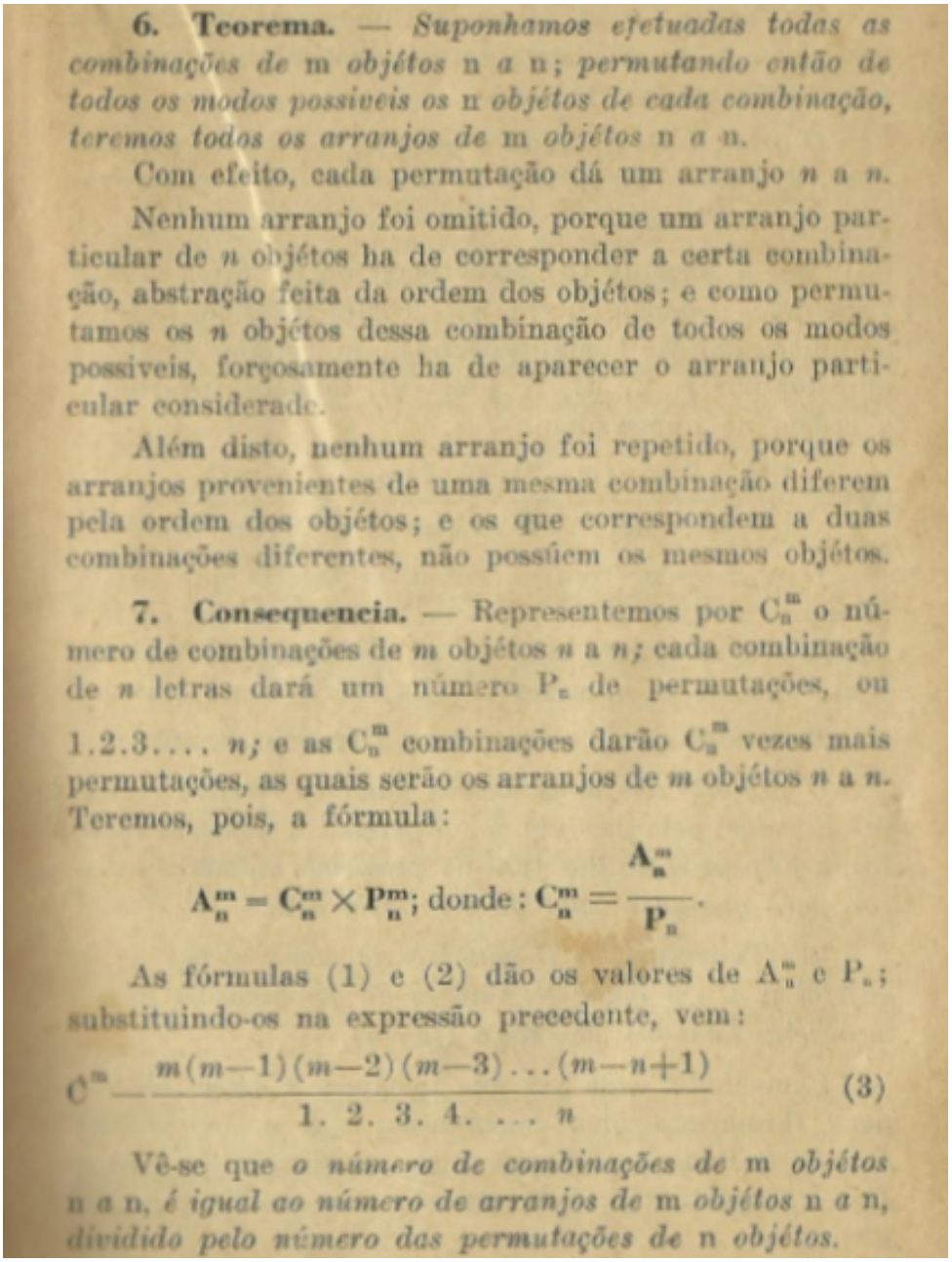
Muitas vezes, as combinações levam o nome de *produtos diferentes.*

Fonte: FTD (1933)

Aqui o autor faz uma explicação sobre o que é arranjo, permutação e combinação e

como determiná-las. Neste momento, podemos perceber que o tema do capítulo é Binômio de Newton, então o autor optou por esclarecer conceitos da análise combinatória para melhor entendimento do tema do capítulo. Explicar os temas: arranjo combinação e permutação, para o autor é definir, exemplificar e demonstrar, sem a preocupação com contexto [5], para enfim dar segmento a temática do capítulo.

Figura 25 – Teorema e demonstração de análise combinatória



6. Teorema. — *Suponhamos efetuadas todas as combinações de* m *objétos* n *a* n; *permutando então de todos os modos possiveis os* n *objétos de cada combinação, teremos todos os arranjos de* m *objétos* n *a* n.

Com efeito, cada permutação dá um arranjo *n* a *n*.

Nenhum arranjo foi omitido, porque um arranjo particular de *n* objétos ha de corresponder a certa combinação, abstração feita da ordem dos objétos; e como permutamos os *n* objétos dessa combinação de todos os modos possiveis, forçosamente ha de aparecer o arranjo particular considerado.

Além disto, nenhum arranjo foi repetido, porque os arranjos provenientes de uma mesma combinação diferem pela ordem dos objétos; e os que correspondem a duas combinações diferentes, não possúem os mesmos objétos.

7. Consequencia. — Representemos por C_n^m o número de combinações de *m* objétos *n* a *n*; cada combinação de *n* letras dará um número P_n de permutações, ou $1.2.3.... n$; e as C_n^m combinações darão C_n^m vezes mais permutações, as quais serão os arranjos de *m* objétos *n* a *n*. Teremos, pois, a fórmula:

$$A_n^m = C_n^m \times P_n^m; \text{ donde: } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}.$$

As fórmulas (1) e (2) dão os valores de A_n^m e P_n; substituindo-os na expressão precedente, vem:

$$C^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n} \qquad (3)$$

Vê-se que *o número de combinações de* m *objétos* n *a* n, *é igual ao número de arranjos de* m *objétos* n *a* n, *dividido pelo número das permutações de* n *objétos.*

Fonte: FTD (1933)

[5] com contexto queremos dizer sobre a atual concepção do que é uma abordagem de ensino contextualizada, que remete a dar sentido a uma definição ou apresentar conteúdos com aplicações cotidianas, apresentadas no capítulo 4

Já aqui podemos ver um exemplo da predominância de teoremas e demonstrações que atualmente, nem são vistas sequer nos cursos de engenharia. O teorema acima refere-se ao cálculo de arranjo e permutação, reforçando a ideia de uma abordagem mais técnicas para atender os fins da época. Isto é, a clareza de conteúdos é feita via demonstração. Os livros da época, em particular o presente exemplar, não contam com a necessidade de usar métodos de ensino para determinados conteúdos, pois após definição e exemplo, a demonstração generaliza o problema proposto, assim poderá prosseguir com o conteúdo.

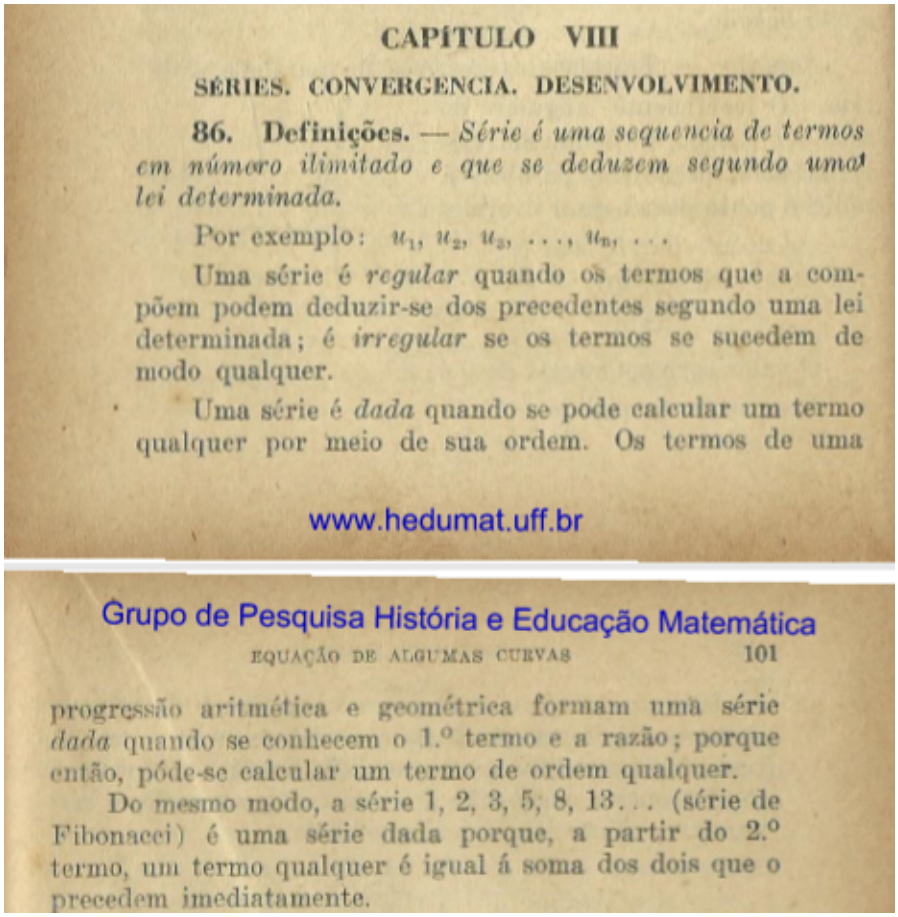
- Generalizações algébricas

As generalizações algébricas merecem ser avaliadas pois é uma preocupação geral com o ensino da álgebra, uma vez que tanto na década de 1930 e 1940 até atualmente, o ensino sempre se preocupou em preparar o aluno para níveis superiores da educação. E de acordo com Zotti (2006), a matemática busca fomentar ideias para o crescimento voltado para estudos universitários, diante disso a ideia era generalizar os estudos científicos afim de deixar o mesmo amplo nos moldes dos estudos para as unidades.

As generalizações expressas nesse exemplar estão apresentadas nas definições e nas demonstrações presentes no livro, uma vez que demonstrações são generalizações provadas para todos os casos, neste caso, de conteúdos algébricos. Algumas vezes o livro apresenta um exemplo simples descontextualizado imediatamente após a definição ser escrita como na figura 24. Em que apresenta um exemplo de arranjo com as três primeiras letras do alfabeto. E em seguida, termina de desenvolver as definições apresentadas no conteúdo.

Em outros casos ele apenas dá início a definição e faz o leitor enxergar a generalização ou na definição ou nos exemplos para aquele caso particular com a finalidade de estabelecer a linguagem algébrica no estudante uma vez que o mesmo já tem maturidade para esse tipo de linguagem tendo em vista que o mesmo se encontra no último ano do curso fundamental. Este caso é visto na figura 22 na introdução ao Binômio de Newton.

Figura 26 – Definição de série



CAPITULO VIII

SÉRIES. CONVERGENCIA. DESENVOLVIMENTO.

86. Definições. — *Série é uma sequencia de termos em número ilimitado e que se deduzem segundo uma lei determinada.*

Por exemplo: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

Uma série é *regular* quando os termos que a compõem podem deduzir-se dos precedentes segundo uma lei determinada; é *irregular* se os termos se sucedem de modo qualquer.

Uma série é *dada* quando se pode calcular um termo qualquer por meio de sua ordem. Os termos de uma

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

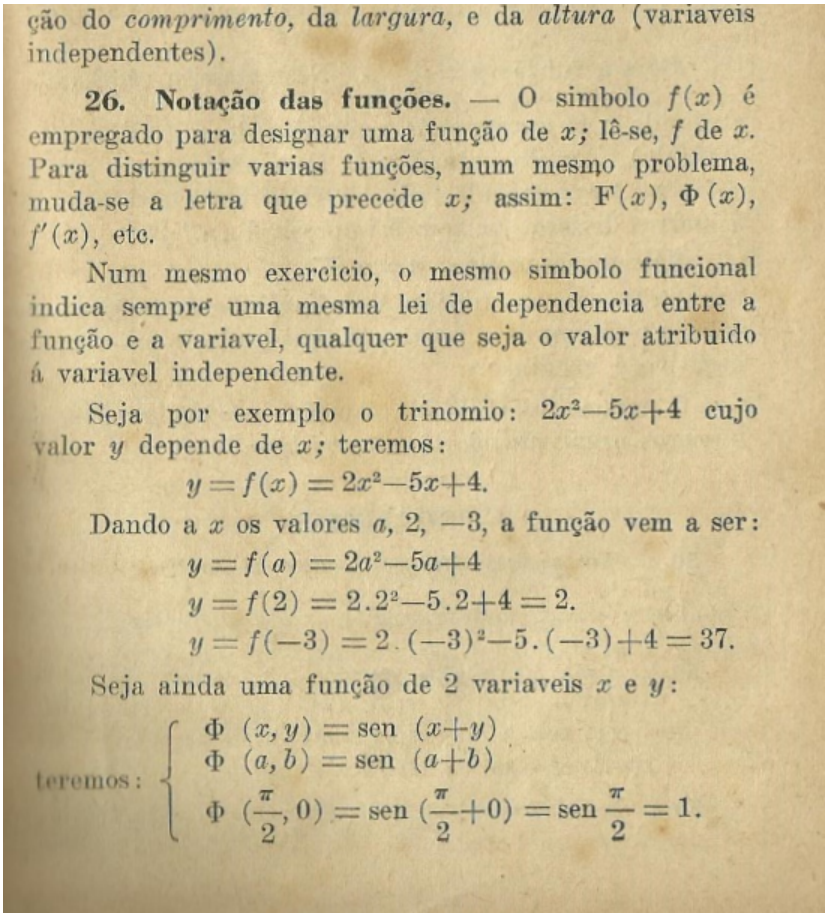
progressão aritmética e geométrica formam uma série *dada* quando se conhecem o 1.º termo e a razão; porque então, póde-se calcular um termo de ordem qualquer.

Do mesmo modo, a série 1, 2, 3, 5, 8, 13... (série de Fibonacci) é uma série dada porque, a partir do 2.º termo, um termo qualquer é igual á soma dos dois que o precedem imediatamente.

Fonte: FTD (1933)

Um caso a se chamar atenção sobre as generalizações da álgebra e em particular da linguagem algébrica se apresenta no trecho disposto pela imagem abaixo;

Figura 27 – Seção para notação de função



ção do *comprimento*, da *largura*, e da *altura* (variaveis independentes).

26. Notação das funções. — O simbolo $f(x)$ é empregado para designar uma função de x; lê-se, f de x. Para distinguir varias funções, num mesmo problema, muda-se a letra que precede x; assim: $F(x)$, $\Phi(x)$, $f'(x)$, etc.

Num mesmo exercicio, o mesmo simbolo funcional indica sempre uma mesma lei de dependencia entre a função e a variavel, qualquer que seja o valor atribuido á variavel independente.

Seja por exemplo o trinomio: $2x^2-5x+4$ cujo valor y depende de x; teremos:

$$y = f(x) = 2x^2-5x+4.$$

Dando a x os valores a, 2, -3, a função vem a ser:

$$y = f(a) = 2a^2-5a+4$$
$$y = f(2) = 2.2^2-5.2+4 = 2.$$
$$y = f(-3) = 2.(-3)^2-5.(-3)+4 = 37.$$

Seja ainda uma função de 2 variaveis x e y:

teremos:
$$\begin{cases} \Phi\ (x, y) = \text{sen}\ (x+y) \\ \Phi\ (a, b) = \text{sen}\ (a+b) \\ \Phi\ (\frac{\pi}{2}, 0) = \text{sen}\ (\frac{\pi}{2}+0) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Fonte: FTD (1933)

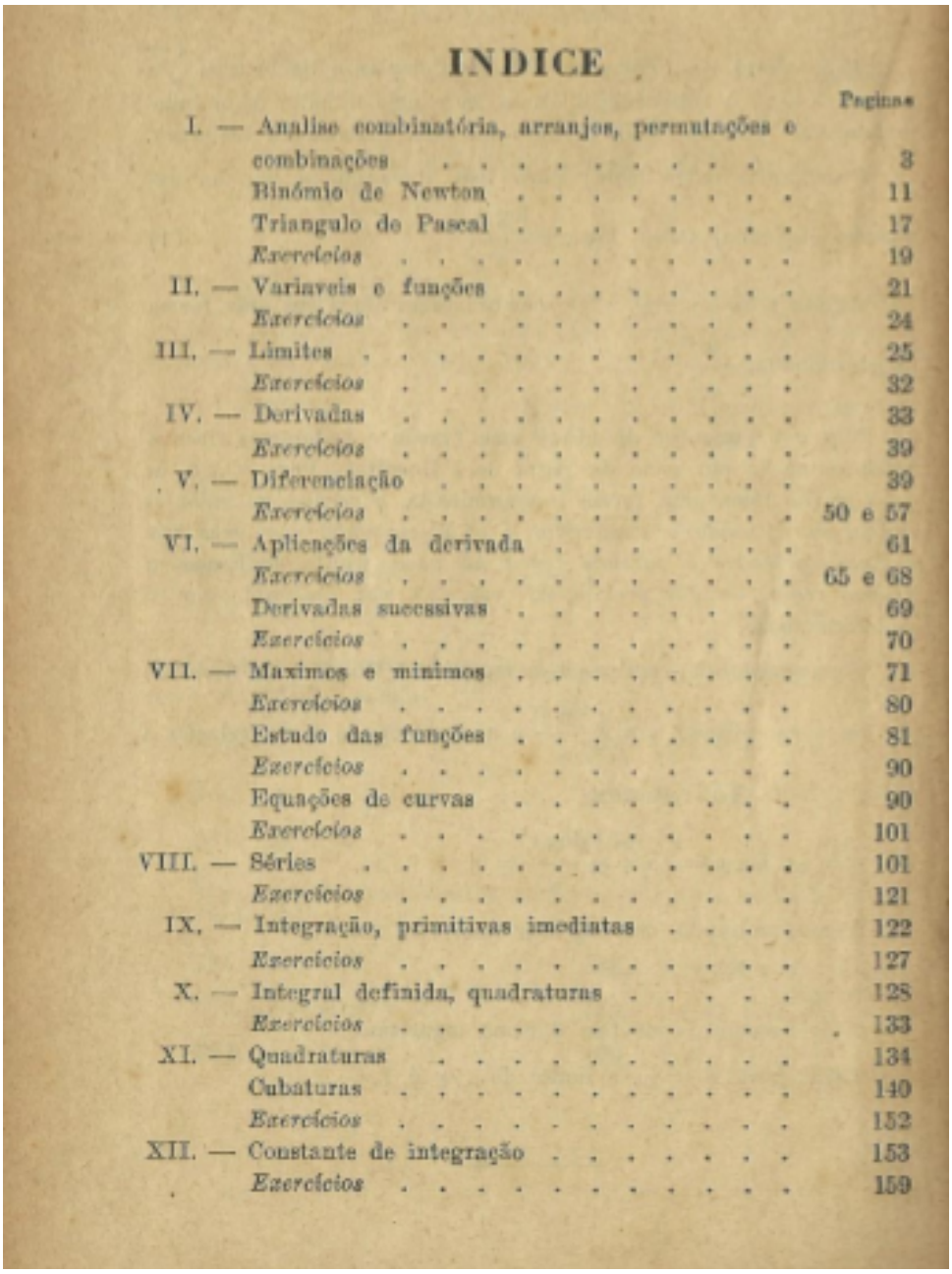
Podemos inferir uma preocupação com um padrão da linguagem. Isto é mais uma preocupação com linguagem do que com o as generalizações, mas esta preocupação com o padrão da linguagem algébrica implica diretamente nas generalizações, pois as generalizações feitas na álgebra são realizadas através da linguagem da mesma. Vemos o padrão descrito sobre as notações de função logo após ser inserido um tópico para a definição de função.

Concluímos assim que os símbolos descritos no livro ajudam a entender as generalizações uma vez que grande parte deles têm explicações acerca de seu uso e também pelo fato de essa modalidade de ensino mais rígida e com forte presença de demonstrações ser característica do período, assim, os estudantes da época já estavam inseridos em uma álgebra mais abstrata podendo então ter mais contato e consequentemente mais visão generalizadora da álgebra.

- Disposição de conteúdo:

Para mostrar a disposição de conteúdo, optamos por analisar o índice do livro. Uma curiosidade interessante é que era costume do período, apresentar o índice na última página do livro.

Figura 28 – índice do livro pontos de álgebra



INDICE

		Paginas
I. —	Analise combinatória, arranjos, permutações e combinações	3
	Binómio de Newton	11
	Triangulo de Pascal	17
	Exercicios	19
II. —	Variaveis e funções	21
	Exercicios	24
III. —	Limites	25
	Exercicios	32
IV. —	Derivadas	33
	Exercicios	39
V. —	Diferenciação	39
	Exercicios	50 e 57
VI. —	Aplicações da derivada	61
	Exercicios	65 e 68
	Derivadas successivas	69
	Exercicios	70
VII. —	Maximos e minimos	71
	Exercicios	80
	Estudo das funções	81
	Exercicios	90
	Equações de curvas	90
	Exercicios	101
VIII. —	Séries	101
	Exercicios	121
IX. —	Integração, primitivas imediatas	122
	Exercicios	127
X. —	Integral definida, quadraturas	128
	Exercicios	133
XI. —	Quadraturas	134
	Cubaturas	140
	Exercicios	152
XII. —	Constante de integração	153
	Exercicios	159

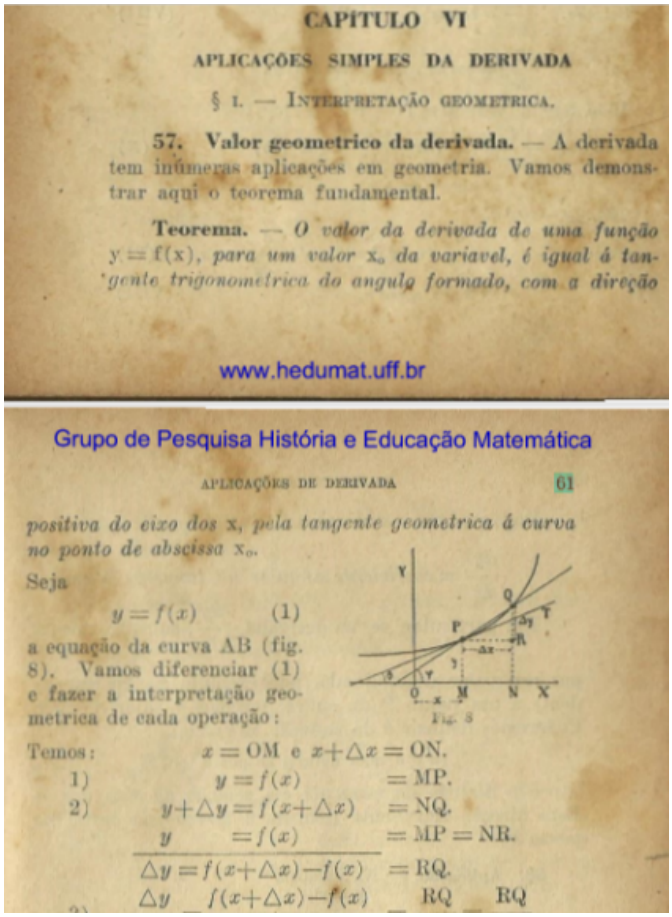
Fonte: FTD (1933)

Podemos notar que a disposição de conteúdos é adequada ao período da reforma Francisco Campos uma vez que o ensino era de caráter tecnicista e industrial como dito por Dalabrida (2009). Esses conteúdos apresentados estão presentes hoje em dia em alguns cursos de Ensino Superior.

Pelo fato de este livro ser do último ano do curso fundamental, vemos a presença mais forte destes tipos de conteúdo, além disso, depois de concluir a quinta série ginasial, os alunos, de acordo com a escolha de curso superior, deveriam fazer mais dois anos de estudos no chamado curso complementar como constatado no capítulo 3. Assim, podemos concluir que os conteúdos de álgebra eram ainda mais profundos e específicos que estes, caso o aluno optasse por seguir cursos nas áreas de engenharias e ciências exatas. Podemos inferir através da disposição de conteúdos uma sequência voltada a conteúdos essencialmente a conteúdos de cálculo diferencial integral, que são os apresentados do capítulo III ao X desta obra. Outra percepção a cerca destes conteúdos, é a pouca preocupação com contexto, isto é, contextualizar assuntos como máximos e mínimos, derivadas e integral não é muito recorrente no livro como é atualmente.

No capítulo 1 ao 5 podemos notar a presença de definições curtas, exemplos seguidos das definições e demonstrações Já o capítulo 6 apresenta as aplicações de derivadas o que é uma novidade nesse livro uma vez que os conteúdos dificilmente são contextualizados. Podemos ver as aplicações descritas com presença de exemplos e exercícios relacionados com o mesmo.

Figura 29 – aplicação de derivadas



CAPITULO VI

APLICAÇÕES SIMPLES DA DERIVADA

§ 1. — INTERPRETAÇÃO GEOMETRICA.

57. Valor geometrico da derivada. — A derivada tem inúmeras aplicações em geometria. Vamos demonstrar aqui o teorema fundamental.

Teorema. — *O valor da derivada de uma função* $y = f(x)$, *para um valor* x_0 *da variavel, é igual á tangente trigonometrica do angulo formado, com a direção*

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

positiva do eixo dos x, *pela tangente geometrica á curva no ponto de abscissa* x_0.

Seja

$$y = f(x) \qquad (1)$$

a equação da curva AB (fig. 8). Vamos diferenciar (1) e fazer a interpretação geometrica de cada operação:

Fig. 8

Temos: $x = OM$ e $x + \Delta x = ON$.

1) $y = f(x) = MP$.

2) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = NQ$.

$y = f(x) = MP = NR$.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = RQ$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{RQ}{RQ}$

Fonte: FTD (1933)

No capítulo 8 ao 12 apresenta se em maior quantidade regras para resolução dos problemas propostos por esse capítulo e voltamos as definições sucintas com presença de simbolismos e exemplos.

• Disposição dos exemplos e exercícios

Para este tópico tomaremos alguns exemplos e exercícios e iremos analisar se a maioria das definições tem exemplos e se os exercícios condizem com as explicações e com os exemplos dispostos. Estamos interessados em verificar se a álgebra é tratada com ênfase nos conceitos ou serve com ênfase na aquisição de técnicas para resolver problemas. Como relata Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e poder estabelecer o retrato de o que era prioridade do ensino, Que segundo Zotti (2006) deveria ser preparatório para nível superior e de caráter social e moralista. No entanto estas duas últimas características não serão possíveis de evidenciar apenas através da análise de exemplos e exercícios. Analisemos as seguintes imagens:

Figura 30 – Definição de continuidade e descontinuidade

33. Funções contínuas e discontínuas. — Uma função $f(x)$ é contínua para $x = a$ se o limite da função quando x tende para a, de um modo qualquer, é o valor que toma a função para $x = a$, isto é, se temos:

$$f(x) = f(a);$$

$f(x)$ é então contínua para $x = a$.

A função $f(x)$ é discontínua para $x = a$ quando esta condição não está satisfeita. Por exemplo, se

$$f(x) = \infty,$$

$f(x)$ é então discontínua para $x = a$.

34. Exemplos de continuidade e discontinuidade das funções. —

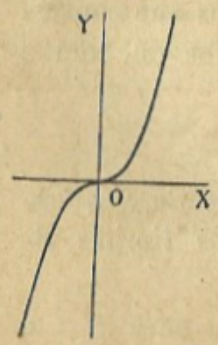


Fig. 2

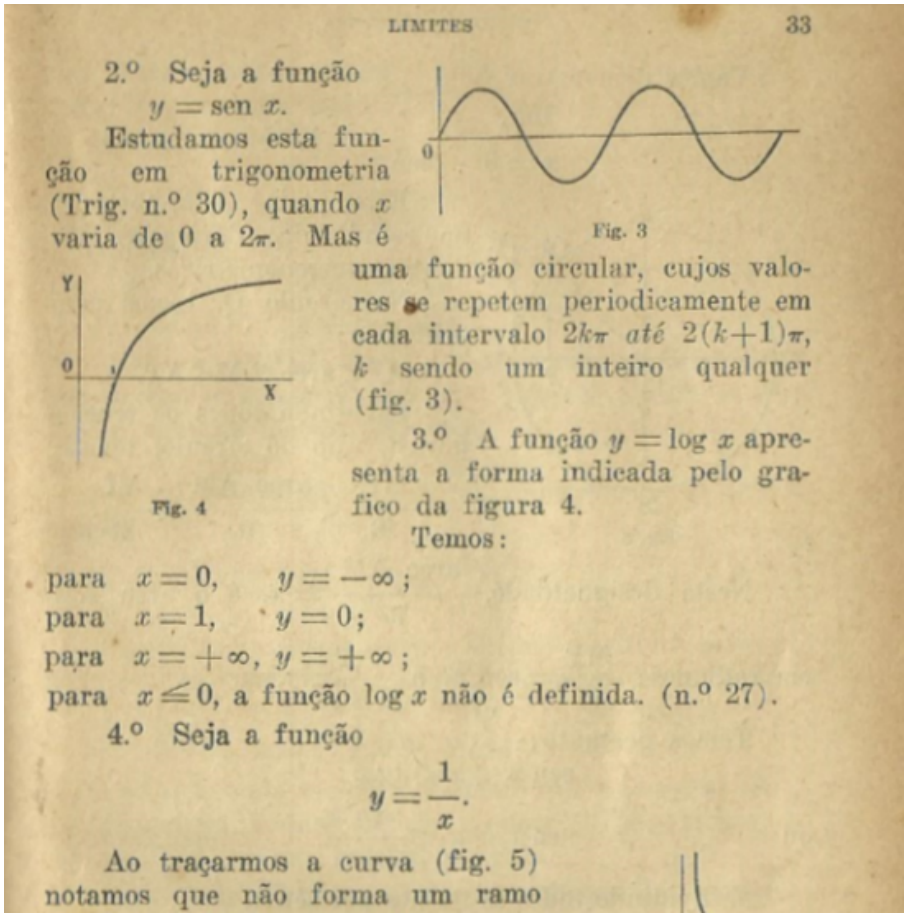
1.º Seja a função

$$y = x^3.$$

A cada valor de x, corresponde um valor bem determinado de y. Podemos construir uma curva ou grafico da função (fig. 2). Ora, notamos que não ha interrupção na curva, quando x varia de — até+ . E' um exemplo de função contínua.

Fonte: FTD (1933)

Figura 31 – Exemplo de continuidade e descontinuidade



LIMITES 33

2.º Seja a função $y = \text{sen } x$.

Estudamos esta função em trigonometria (Trig. n.º 30), quando x varia de 0 a 2π. Mas é uma função circular, cujos valores se repetem periodicamente em cada intervalo $2k\pi$ *até* $2(k+1)\pi$, k sendo um inteiro qualquer (fig. 3).

Fig. 3

Fig. 4

3.º A função $y = \log x$ apresenta a forma indicada pelo grafico da figura 4.

Temos:

para $x = 0$, $y = -\infty$;
para $x = 1$, $y = 0$;
para $x = +\infty$, $y = +\infty$;
para $x \leq 0$, a função $\log x$ não é definida. (n.º 27).

4.º Seja a função

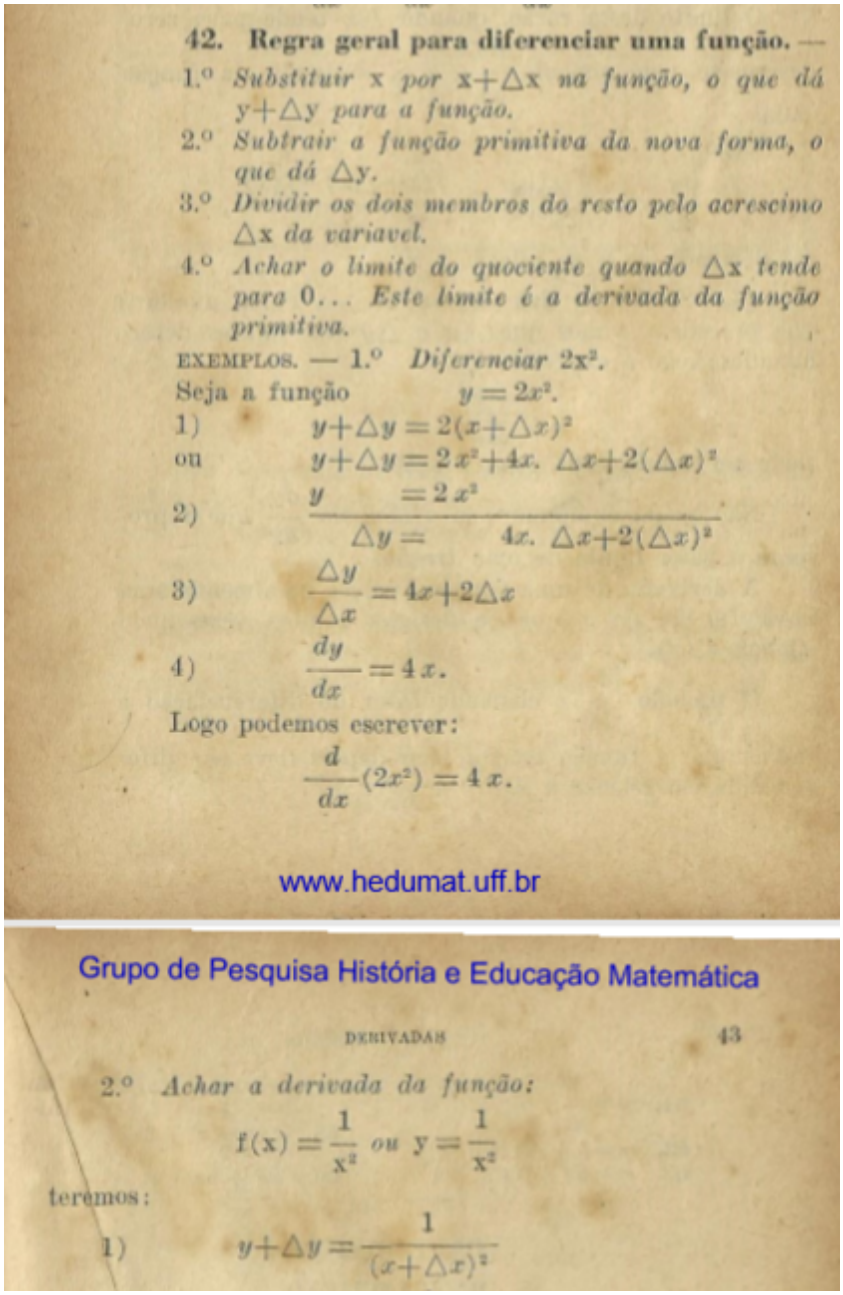
$$y = \frac{1}{x}.$$

Ao traçarmos a curva (fig. 5) notamos que não forma um ramo

Fonte: FTD (1933)

Aqui vemos o conteúdo de continuidade e descontinuidade sendo apresentado de forma sucinta e melhor desenvolvido através dos seguintes exemplos acima. Na maioria das vezes as definições apresentadas no livro são curtas e complementadas de exemplos, definições complementares como notações para a definição dada e por fim, exercícios. Neste exemplo, os casos de continuidade e descontinuidade são dados por meio de exemplos. O conteúdo da análise combinatória já vistos apresentam também definições sucintas seguidas de exemplos, bem como o conteúdo de binômio de Newton.

Figura 32 – Regras para diferenciar uma função



42. Regra geral para diferenciar uma função. —

1.º *Substituir* x *por* x+△x *na função, o que dá* y+△y *para a função.*

2.º *Subtrair a função primitiva da nova forma, o que dá* △y.

3.º *Dividir os dois membros do resto pelo acrescimo* △x *da variavel.*

4.º *Achar o limite do quociente quando* △x *tende para* 0... *Este limite é a derivada da função primitiva.*

EXEMPLOS. — 1.º *Diferenciar* $2x^2$.

Seja a função $y = 2x^2$.

1) $y+\triangle y = 2(x+\triangle x)^2$

ou $y+\triangle y = 2x^2+4x.\ \triangle x+2(\triangle x)^2$

2) $\dfrac{y = 2x^2}{\triangle y = 4x.\ \triangle x+2(\triangle x)^2}$

3) $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = 4x+2\triangle x$

4) $\dfrac{dy}{dx} = 4x.$

Logo podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}(2x^2) = 4x.$$

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

2.º *Achar a derivada da função:*

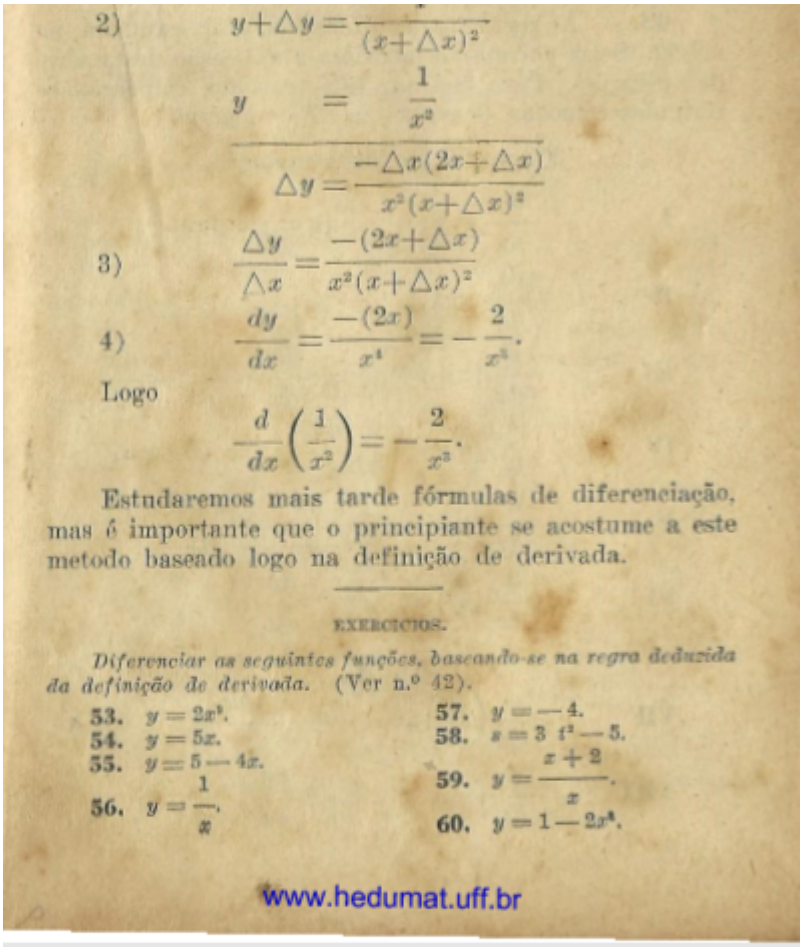
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ ou } y = \frac{1}{x^2}$$

teremos:

1) $y+\triangle y = \dfrac{1}{(x+\triangle x)^2}$

Fonte: FTD (1933)

Figura 33 – continuação Regras para diferenciar uma função



2) $y+\triangle y=\dfrac{1}{(x+\triangle x)^2}$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$\triangle y=\frac{-\triangle x(2x+\triangle x)}{x^2(x+\triangle x)^2}$$

3) $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{-(2x+\triangle x)}{x^2(x+\triangle x)^2}$$

4) $$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x)}{x^4}=-\frac{2}{x^3}.$$

Logo

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^3}.$$

Estudaremos mais tarde fórmulas de diferenciação, mas é importante que o principiante se acostume a este metodo baseado logo na definição de derivada.

EXERCICIOS.

Diferenciar as seguintes funções, baseando-se na regra deduzida da definição de derivada. (Ver n.º 42).

53. $y=2x^3$.
54. $y=5x$.
55. $y=5-4x$.
56. $y=\frac{1}{x}$.
57. $y=-4$.
58. $s=3t^2-5$.
59. $y=\frac{x+2}{x}$.
60. $y=1-2x^4$.

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

61. $y=\frac{2}{x^2}$.
62. $e=3+4{,}9\,t^2$.
63. $r=8t+3t^2$.
64. $s=at^2-2bt$.
65. $z=\frac{1}{2}x^2+2x$.
66. ax^2+bx+c.

CAPÍTULO V

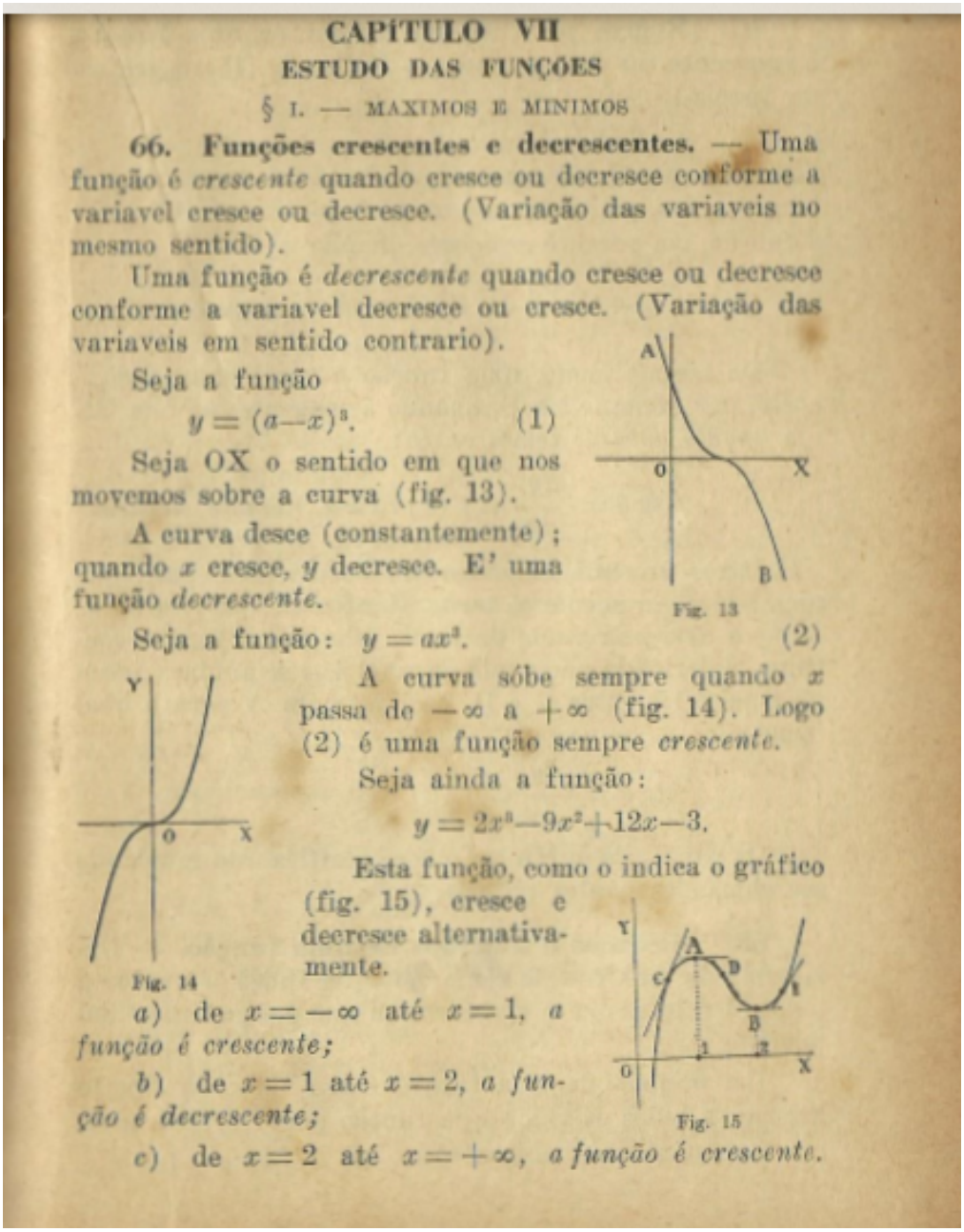
Fonte: FTD (1933)

Após o assunto de Continuidade e Descontinuidade que está presente dentro do conteúdo de derivadas vemos o tópico “regras gerais para diferenciar uma função” novamente com uma definição sucinta e um exemplo. Após, há vários exercícios sobre este tópico, é importante evidenciar que no próprio exercício está mencionado o tópico que o mesmo se refere.

Agora vejamos um conteúdo apresentado em sua totalidade para analisarmos os exemplos e os exercícios. É importante notar que os exercícios não estão dispostos necessariamente após o fim de cada capítulo, apesar deste fato ocorrer na maioria das

vezes, porém há exercício após cada conteúdo.

Figura 34 – Capítulo VII, 1ª página



CAPÍTULO VII

ESTUDO DAS FUNÇÕES

§ 1. — MAXIMOS E MINIMOS

66. Funções crescentes e decrescentes. — Uma função é *crescente* quando cresce ou decresce conforme a variavel cresce ou decresce. (Variação das variaveis no mesmo sentido).

Uma função é *decrescente* quando cresce ou decresce conforme a variavel decresce ou cresce. (Variação das variaveis em sentido contrario).

Seja a função

$$y = (a-x)^3. \qquad (1)$$

Seja OX o sentido em que nos movemos sobre a curva (fig. 13).

A curva desce (constantemente); quando x cresce, y decresce. E' uma função *decrescente*.

Fig. 13

Seja a função: $y = ax^3$. (2)

A curva sóbe sempre quando x passa de $-\infty$ a $+\infty$ (fig. 14). Logo (2) é uma função sempre *crescente*.

Fig. 14

Seja ainda a função:

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

Esta função, como o indica o gráfico (fig. 15), cresce e decresce alternativamente.

Fig. 15

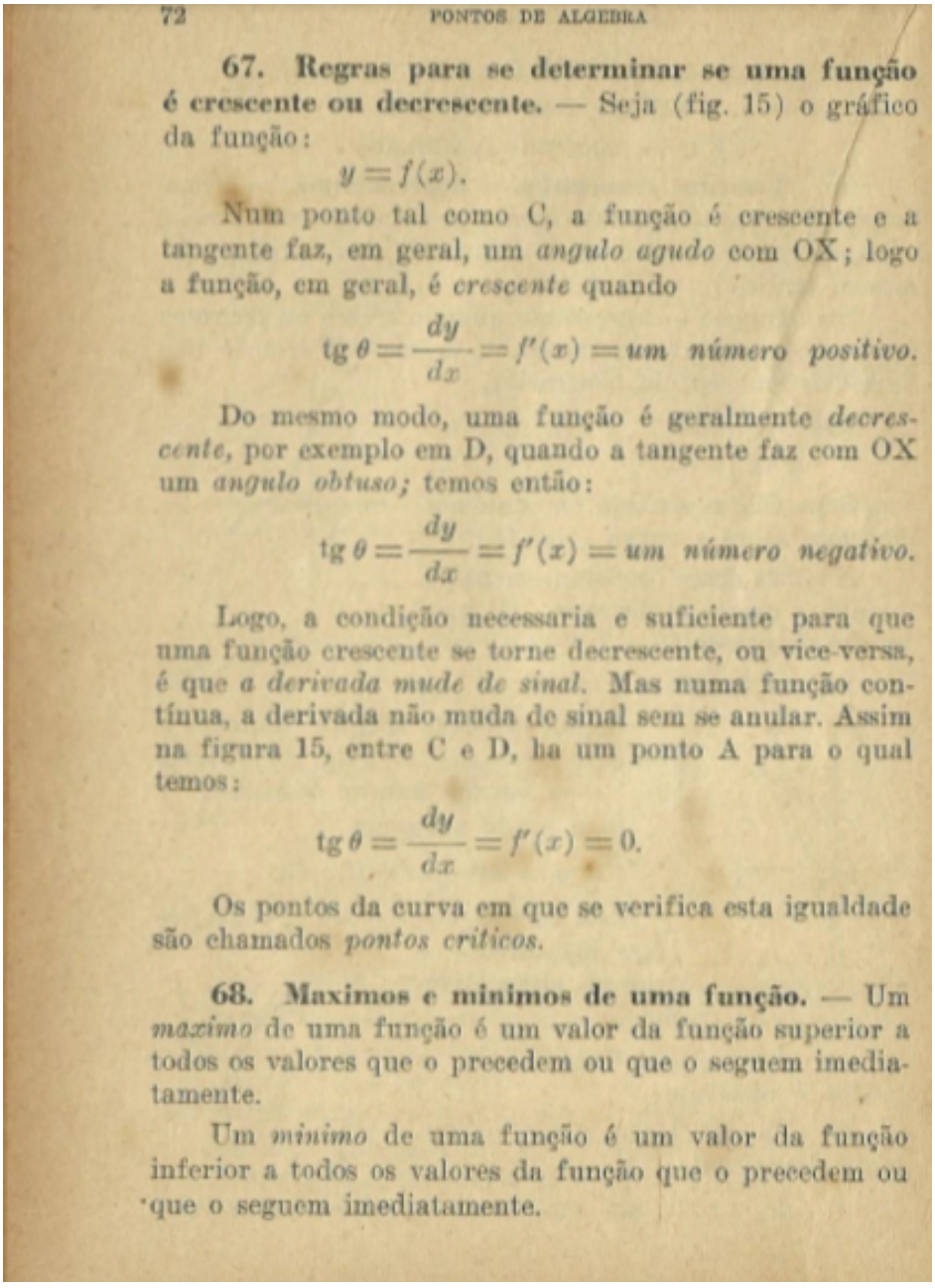
a) de $x = -\infty$ até $x = 1$, *a função é crescente;*

b) de $x = 1$ até $x = 2$, *a função é decrescente;*

c) de $x = 2$ até $x = +\infty$, *a função é crescente.*

Fonte: FTD (1933)

Figura 35 – Capítulo VII, 2ª página



72 PONTOS DE ALGEBRA

67. Regras para se determinar se uma função é crescente ou decrescente. — Seja (fig. 15) o gráfico da função:

$$y = f(x).$$

Num ponto tal como C, a função é crescente e a tangente faz, em geral, um *angulo agudo* com OX; logo a função, em geral, é *crescente* quando

$$\text{tg}\,\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \textit{um número positivo.}$$

Do mesmo modo, uma função é geralmente *decrescente*, por exemplo em D, quando a tangente faz com OX um *angulo obtuso;* temos então:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \textit{um número negativo.}$$

Logo, a condição necessaria e suficiente para que uma função crescente se torne decrescente, ou vice-versa, é que *a derivada mude de sinal.* Mas numa função contínua, a derivada não muda de sinal sem se anular. Assim na figura 15, entre C e D, ha um ponto A para o qual temos:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0.$$

Os pontos da curva em que se verifica esta igualdade são chamados *pontos criticos.*

68. Maximos e minimos de uma função. — Um *maximo* de uma função é um valor da função superior a todos os valores que o precedem ou que o seguem imediatamente.

Um *minimo* de uma função é um valor da função inferior a todos os valores da função que o precedem ou que o seguem imediatamente.

Fonte: FTD (1933)

Nas imagens acima, vemos as definições das Funções Decrescente e Crescente de formas curtas e um exemplo no gráfico, em seguida, apresenta regras para determinar quando uma função é crescente quando é decrescente.

Figura 36 – Capítulo VII, 3ª página

Uma função póde ter varios maximos e varios minimos. Por exemplo na figura 16:

a) Nos pontos A e C a função passa por um maximo.

b) Nos pontos B e D a função passa por um minimo.

Num *ponto critico*, a tangente é paralela a OX; logo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0. \qquad (1)$$

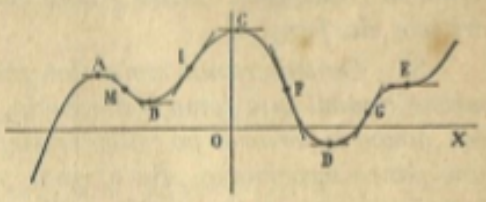


Fig. 13

Na figura 16, A, B, C, D e E, são pontos criticos.

Vê-se que a condição (1) é necessária para que uma função passe por um maximo ou um minimo. Mas não é suficiente. Por exemplo, no ponto E a condição (1) está verificada, e entretanto a função não passa nem por um maximo nem por um minimo.

Num maximo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ } \textit{passa de} + \textit{para} -.$$

Num minimo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ } \textit{passa de} - \textit{para} +.$$

Num ponto tal como E

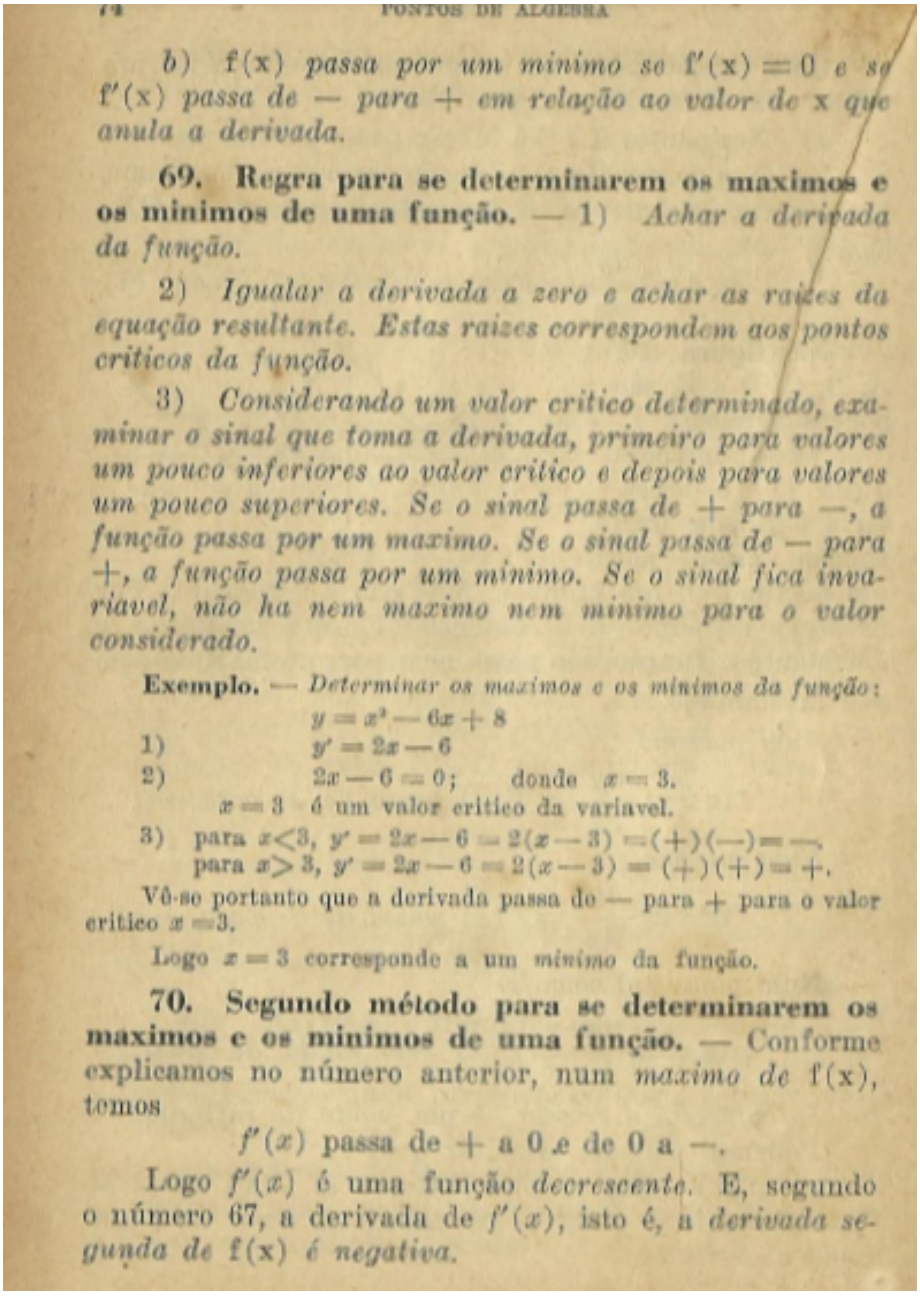
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ } \textit{não muda de sinal;}$$ a função continúa a crescer; é um *ponto de inflexão.*

Podemos portanto concluir que:

a) f(x) *passa por um maximo se* f'(x) = 0 *e se* f'(x) *passa de* + *para* − *em relação ao valor de* x *que anula a derivada.*

Fonte: FTD (1933)

Figura 37 – Capítulo VII, 4ª página



74 PONTOS DE ALGEBRA

b) f(x) *passa por um minimo se* f'(x) = 0 *e se* f'(x) *passa de* — *para* + *em relação ao valor de* x *que anula a derivada.*

69. Regra para se determinarem os maximos e os minimos de uma função. — 1) *Achar a derivada da função.*

2) *Igualar a derivada a zero e achar as raizes da equação resultante. Estas raizes correspondem aos pontos criticos da função.*

3) *Considerando um valor critico determinado, examinar o sinal que toma a derivada, primeiro para valores um pouco inferiores ao valor critico e depois para valores um pouco superiores. Se o sinal passa de* + *para* —, *a função passa por um maximo. Se o sinal passa de* — *para* +, *a função passa por um minimo. Se o sinal fica invariavel, não ha nem maximo nem minimo para o valor considerado.*

Exemplo. — *Determinar os maximos e os minimos da função:*

$$y = x^2 - 6x + 8$$

1) $y' = 2x - 6$

2) $2x - 6 = 0$; donde $x = 3$.

$x = 3$ é um valor critico da variavel.

3) para $x < 3$, $y' = 2x - 6 = 2(x - 3) = (+)(-) = -$.
para $x > 3$, $y' = 2x - 6 = 2(x - 3) = (+)(+) = +$.

Vê-se portanto que a derivada passa de — para + para o valor critico $x = 3$.

Logo $x = 3$ corresponde a um *minimo* da função.

70. Segundo método para se determinarem os maximos e os minimos de uma função. — Conforme explicamos no número anterior, num *maximo de* f(x), temos

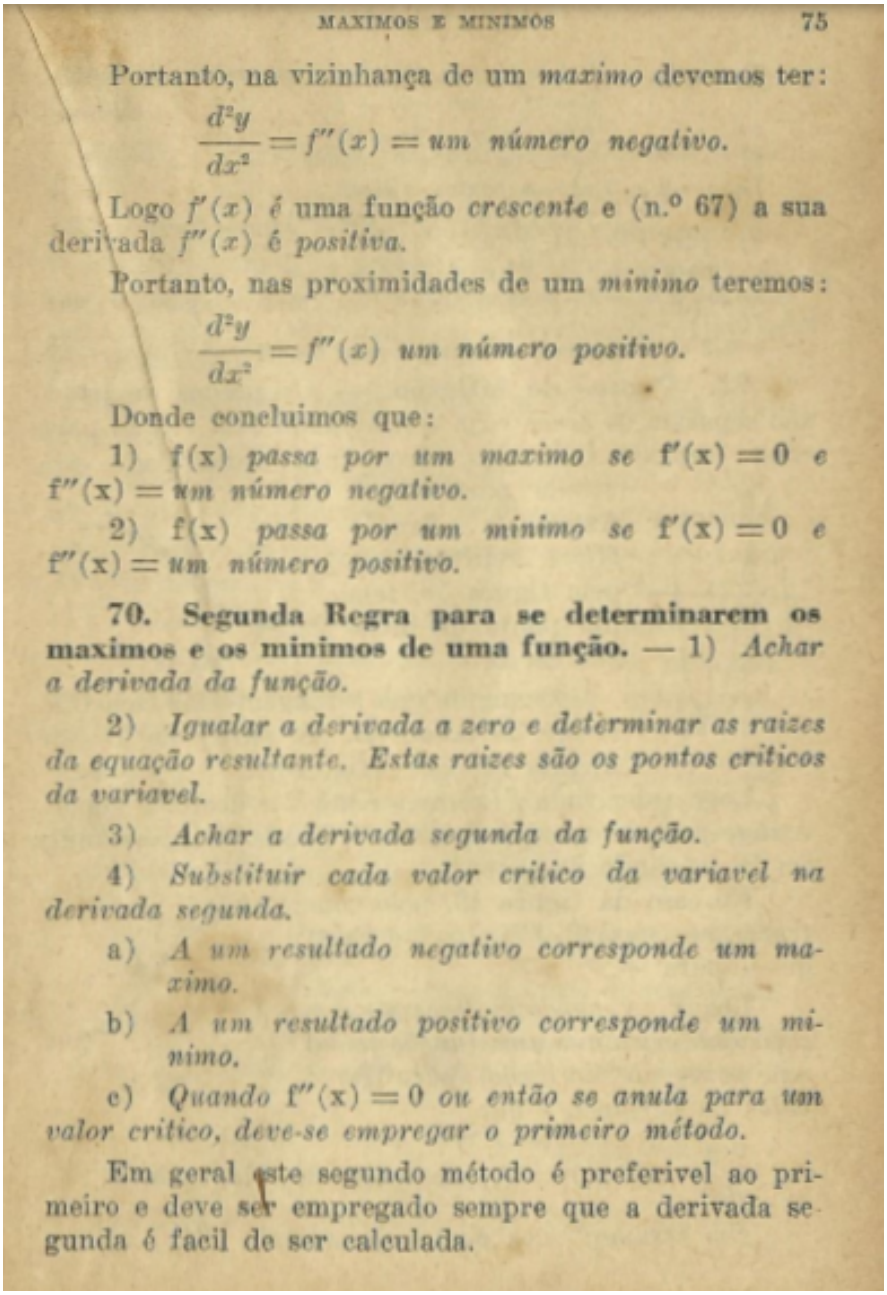
$f'(x)$ passa de + a 0 e de 0 a —.

Logo $f'(x)$ é uma função *decrescente*. E, segundo o número 67, a derivada de $f'(x)$, isto é, a *derivada segunda de* f(x) *é negativa.*

Fonte: FTD (1933)

De semelhante modo, as imagens acima apresentam a definição de máximos e mínimos e em seguida exemplo e regras para determinar os mesmo em uma função.

Figura 38 – Capítulo VII, 5ª página



MAXIMOS E MINIMOS 75

Portanto, na vizinhança de um *maximo* devemos ter:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = um\ número\ negativo.$$

Logo $f'(x)$ é uma função *crescente* e (n.º 67) a sua derivada $f''(x)$ é *positiva*.

Portanto, nas proximidades de um *minimo* teremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)\ um\ número\ positivo.$$

Donde concluimos que:

1) $f(x)$ *passa por um maximo se* $f'(x) = 0$ *e* $f''(x) =$ *um número negativo.*

2) $f(x)$ *passa por um minimo se* $f'(x) = 0$ *e* $f''(x) =$ *um número positivo.*

70. Segunda Regra para se determinarem os maximos e os minimos de uma função. — 1) *Achar a derivada da função.*

2) *Igualar a derivada a zero e determinar as raizes da equação resultante. Estas raizes são os pontos criticos da variavel.*

3) *Achar a derivada segunda da função.*

4) *Substituir cada valor critico da variavel na derivada segunda.*

a) *A um resultado negativo corresponde um maximo.*

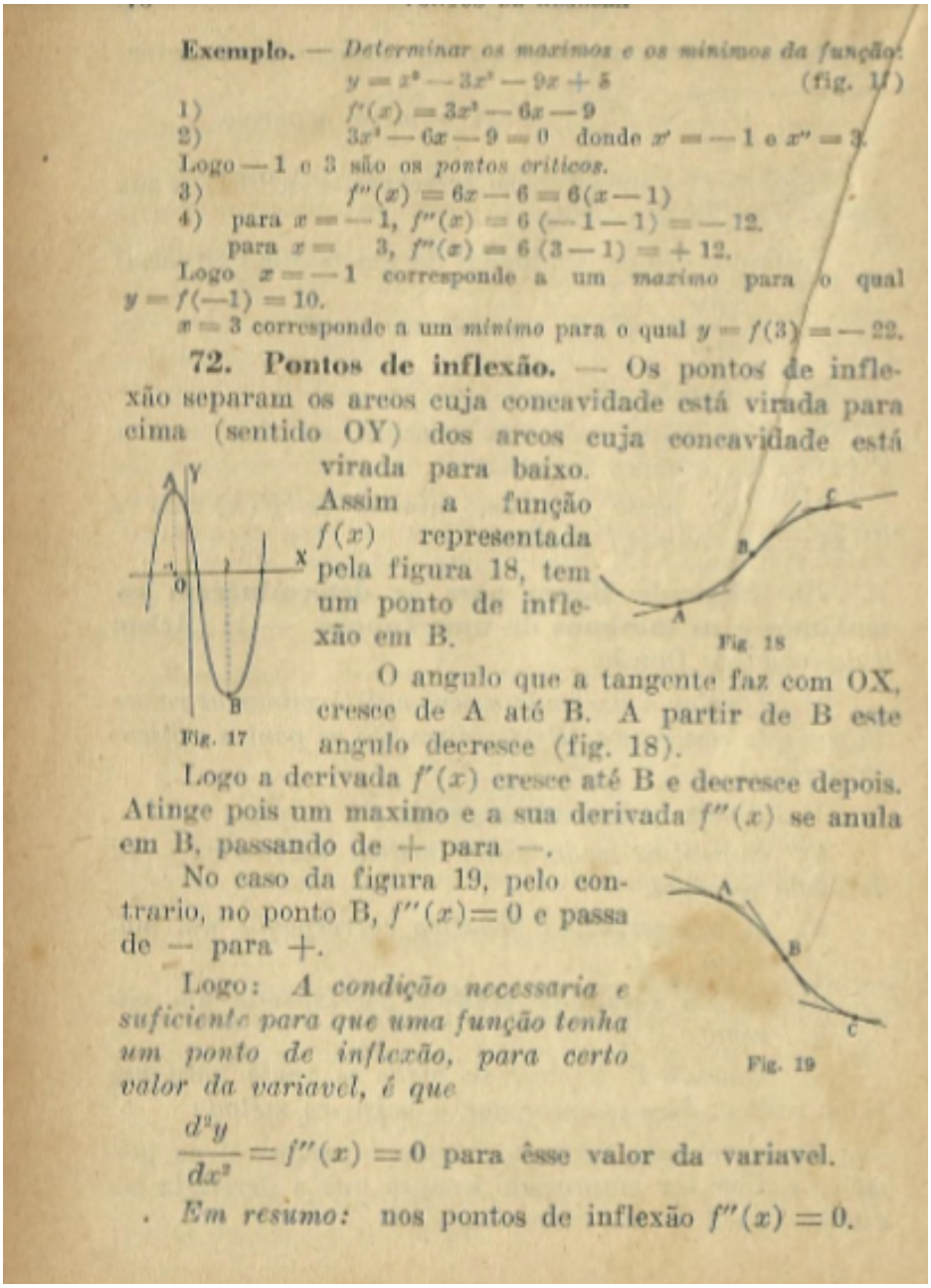
b) *A um resultado positivo corresponde um minimo.*

c) *Quando* $f''(x) = 0$ *ou então se anula para um valor critico, deve-se empregar o primeiro método.*

Em geral este segundo método é preferivel ao primeiro e deve ser empregado sempre que a derivada segunda é facil de ser calculada.

Fonte: FTD (1933)

Figura 39 – Capítulo VII, 6ª página



Exemplo. — *Determinar os maximos e os minimos da função:*

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (fig. 17)

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

2) $3x^2 - 6x - 9 = 0$ donde $x' = -1$ e $x'' = 3$.

Logo -1 e 3 são os *pontos criticos*.

3) $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

4) para $x = -1$, $f''(x) = 6(-1-1) = -12$.

para $x = 3$, $f''(x) = 6(3-1) = +12$.

Logo $x = -1$ corresponde a um *maximo* para o qual $y = f(-1) = 10$.

$x = 3$ corresponde a um *minimo* para o qual $y = f(3) = -22$.

72. Pontos de inflexão. — Os pontos de inflexão separam os arcos cuja concavidade está virada para cima (sentido OY) dos arcos cuja concavidade está virada para baixo.

Assim a função $f(x)$ representada pela figura 18, tem um ponto de inflexão em B.

Fig. 17

Fig. 18

O angulo que a tangente faz com OX, cresce de A até B. A partir de B este angulo decresce (fig. 18).

Logo a derivada $f'(x)$ cresce até B e decresce depois. Atinge pois um maximo e a sua derivada $f''(x)$ se anula em B, passando de $+$ para $-$.

No caso da figura 19, pelo contrario, no ponto B, $f''(x) = 0$ e passa de $-$ para $+$.

Fig. 19

Logo: *A condição necessaria e suficiente para que uma função tenha um ponto de inflexão, para certo valor da variavel, é que*

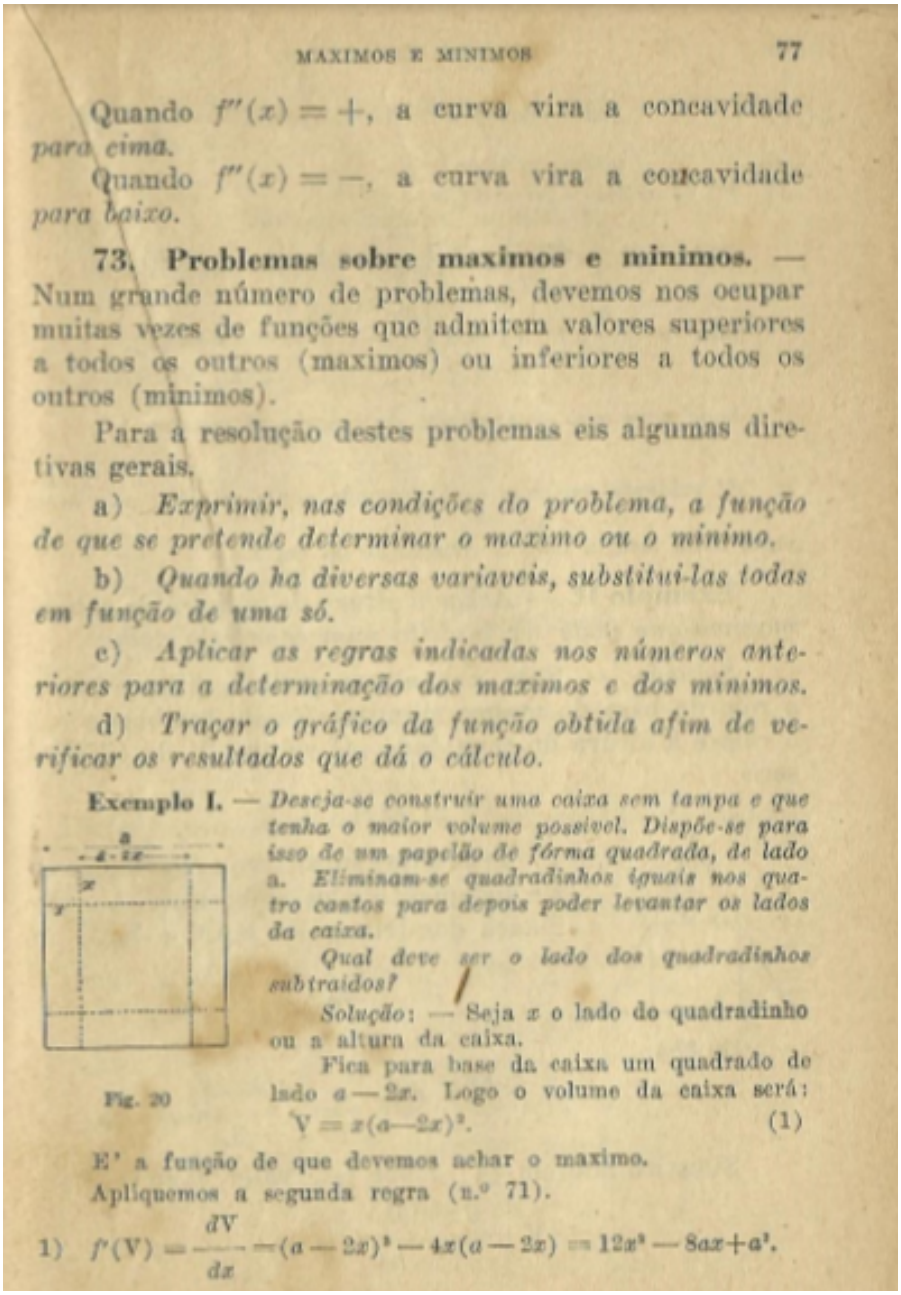
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0$$ para êsse valor da variavel.

Em resumo: nos pontos de inflexão $f''(x) = 0$.

Fonte: FTD (1933)

Nessas imagens há mais exercícios para a realização de outras regras para resolução de problemas de Máximos e Mínimos.

Figura 40 – Capítulo VII, 7ª página



MAXIMOS E MINIMOS 77

Quando $f''(x) = +$, a curva vira a concavidade *para cima*.

Quando $f''(x) = -$, a curva vira a concavidade *para baixo*.

73. Problemas sobre maximos e minimos. — Num grande número de problemas, devemos nos ocupar muitas vezes de funções que admitem valores superiores a todos os outros (maximos) ou inferiores a todos os outros (minimos).

Para a resolução destes problemas eis algumas diretivas gerais.

a) *Exprimir, nas condições do problema, a função de que se pretende determinar o maximo ou o minimo.*

b) *Quando ha diversas variaveis, substitui-las todas em função de uma só.*

c) *Aplicar as regras indicadas nos números anteriores para a determinação dos maximos e dos minimos.*

d) *Traçar o gráfico da função obtida afim de verificar os resultados que dá o cálculo.*

Exemplo I. — *Deseja-se construir uma caixa sem tampa e que tenha o maior volume possivel. Dispõe-se para isso de um papelão de fórma quadrada, de lado a. Eliminam-se quadradinhos iguais nos quatro cantos para depois poder levantar os lados da caixa.*

Qual deve ser o lado dos quadradinhos subtraidos?

Fig. 20

Solução: — Seja x o lado do quadradinho ou a altura da caixa.

Fica para base da caixa um quadrado de lado $a - 2x$. Logo o volume da caixa será:

$$V = x(a-2x)^2. \qquad (1)$$

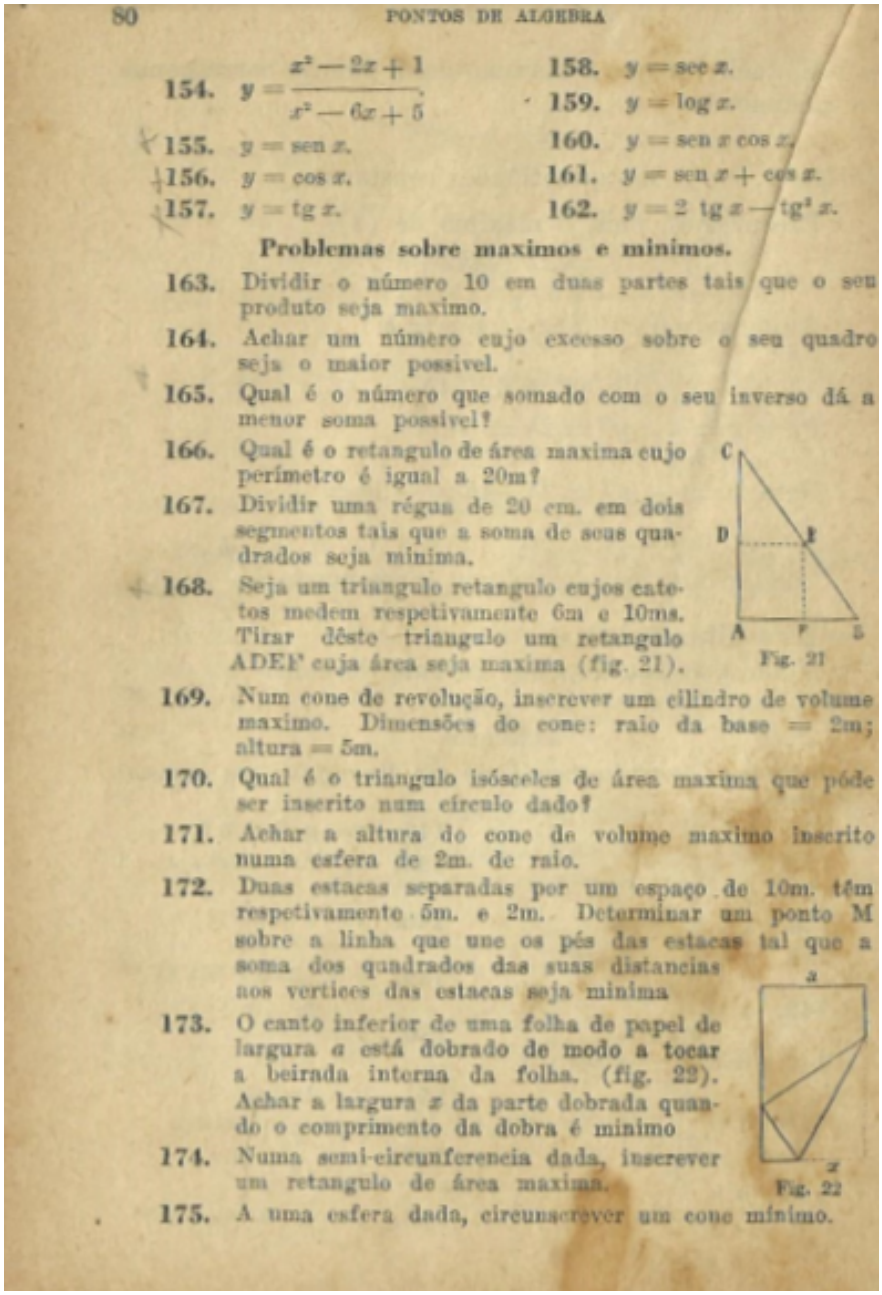
E' a função de que devemos achar o maximo.

Apliquemos a segunda regra (n.º 71).

1) $f'(V) = \frac{dV}{dx} = (a-2x)^2 - 4x(a-2x) = 12x^2 - 8ax + a^2.$

Fonte: FTD (1933)

Figura 41 – Capítulo VII, 8ª página



80 PONTOS DE ALGEBRA

154. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 5}$

155. $y = \operatorname{sen} x$.

156. $y = \cos x$.

157. $y = \operatorname{tg} x$.

158. $y = \sec x$.

159. $y = \log x$.

160. $y = \operatorname{sen} x \cos x$.

161. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

162. $y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$.

Problemas sobre maximos e minimos.

163. Dividir o número 10 em duas partes tais que o seu produto seja maximo.

164. Achar um número cujo excesso sobre o seu quadro seja o maior possivel.

165. Qual é o número que somado com o seu inverso dá a menor soma possivel?

166. Qual é o retangulo de área maxima cujo perímetro é igual a 20m?

167. Dividir uma régua de 20 cm. em dois segmentos tais que a soma de seus quadrados seja minima.

168. Seja um triangulo retangulo cujos catetos medem respetivamente 6m e 10ms. Tirar dêste triangulo um retangulo ADEF cuja área seja maxima (fig. 21).

Fig. 21

169. Num cone de revolução, inscrever um cilindro de volume maximo. Dimensões do cone: raio da base = 2m; altura = 5m.

170. Qual é o triangulo isósceles de área maxima que póde ser inscrito num circulo dado?

171. Achar a altura do cone de volume maximo inscrito numa esfera de 2m. de raio.

172. Duas estacas separadas por um espaço de 10m. têm respetivamente 5m. e 2m. Determinar um ponto M sobre a linha que une os pés das estacas tal que a soma dos quadrados das suas distancias aos vertices das estacas seja minima

173. O canto inferior de uma folha de papel de largura a está dobrado de modo a tocar a beirada interna da folha. (fig. 22). Achar a largura x da parte dobrada quando o comprimento da dobra é minimo

174. Numa semi-circunferencia dada, inscrever um retangulo de área maxima.

Fig. 22

175. A uma esfera dada, circunscrever um cone minimo.

Fonte: FTD (1933)

No conteúdo exposto acima, vemos a presença de definições curtas sem grandes preocupações com está bem contextualizado ou não. Apenas se preocupa com a definição está formalmente dita. Logo após temos exemplos para esclarecer de forma prática as definições. Estes exemplos são sempre para complementar a definição sendo na maioria das vezes apresentam em mais de um. Um caso interessante também é que há forte presença de regras como já mencionamos sobre uma aparente forma de padronização. A cada regra exposta no conteúdo podemos perceber a presença de exemplos para que as regras fiquem claras ao leitor, e por fim os exercícios são mais elaborados do que os

expostos nos exemplos, uma vez que alguns deles apresentam problemas com o caso do exercício 168 a 174. Em contrapartida o livro apresentou um exemplo contextualizado em um problema para que pelo menos o aluno tenha alguma noção do que deve ser feito. Mas o livro indica em que parte da matéria vale à pena pesquisar para tentar resolvê-lo. Outros exercícios são apenas de aplicação das regras descritas no determinado conteúdo, como é o caso da segunda imagem analisada nesse tópico e também dos exercícios 164 a 162.

• Disposição das definições apresentadas nos conteúdos abordados na obra didática

Como já fora mencionado, as definições são em maioria curtas e diretas com a explicação mais elaborada através de exemplos. Em outros casos as definições estão até mais desenvolvidas como é o caso das definições dos casos de análise combinatória explícitos acima, porém sempre com a dependência de exemplos para reforçar as definições. É o caso da definição de Binômio de newton em que primeiro são feitas considerações em um binômio qualquer, depois desenvolve os conteúdos da análise combinatória para então desenvolver o binômio de Newton e finalizar com o triângulo de Pascal. Isto é, esta definição está bem elaborada com a presença de vários conteúdos interligados e exemplos.

Podemos concluir que não era preocupação do período diante de tudo que já vimos, a necessidade de contextualizar as definições uma vez que esta preocupação é recente. Assim, não é incomum não encontrar contexto na maioria dos conteúdos de álgebra.

• Construção do pensamento algébrico

Será analisado se os conteúdos descritos contam com um pensamento algébrico linear ou com interrupções do mesmo pela simples mostra de outro conteúdo. Semelhante a saber se um exercício é dado inteiro ou fragmentado como visto no primeiro tópico faremos este tipo de análise, mas agora em relação a todos os conteúdos de álgebra do livro.

O conteúdo de Binômio de Newton, se apresenta através da construção de um pensamento algébrico, interligando conteúdos da análise combinatória para concluir o conteúdo do Binômio de Newton. Já os de derivada apesar de serem colocados após as definições de máximo e mínimo, pouco usam esse conceito para concluir o assunto. Isto é, os exemplos e exercícios de derivadas estão de acordo com as definições e regras apresentadas no exemplar.

Figura 42 – Exercícios de diferenciação

EXERCICIOS

Diferenciar as funções seguintes:

67. $y = x^3$

Solução: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$ (VI)

68. $y = ax^3 - bx$

Solução: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^3 - bx) = 3ax^2 - b.$

(Fórmulas III, IV e VI)

69. $y = 5\sqrt{x^3}$

Solução: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5\sqrt{x^3}) = \frac{d}{dx}\left(5x^{3/2}\right)$

ou $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right)$ (IV).

ou $\frac{dy}{dx} = \frac{15}{2}x^{1/2} = \frac{15\sqrt{x}}{2}.$ (IV).

70. $y = (x+2)^3.$

Solução: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+2)^3$

ou $\frac{dy}{dx} = 3(x+2)^2 \frac{d}{dx}(x+2);$ (VI).

(Aqui $v = x+2, n = 3$)

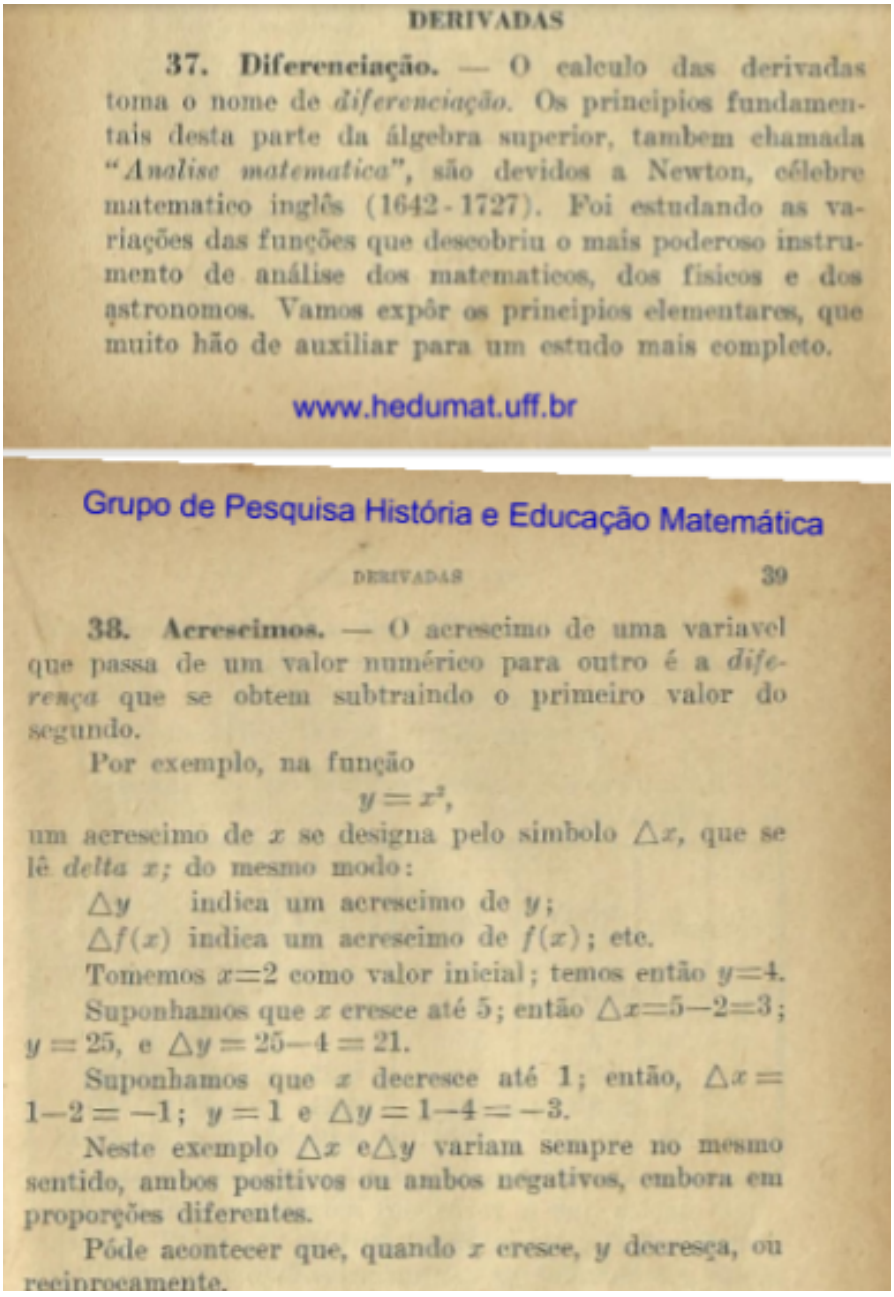
ou $\frac{dy}{dx} = 3(x+2)^2$

Nota. — Poderiamos desenvolver $(x+2)^3$, mas o processo acima é preferivel e muitas vezes o unico applicavel.

71. $y = \sqrt{x^2 - a^2}$

Fonte: FTD (1933)

Figura 43 – Continuação Exercícios de diferenciaçã



DERIVADAS

37. Diferenciação. — O calculo das derivadas toma o nome de *diferenciação*. Os principios fundamentais desta parte da álgebra superior, tambem chamada "*Analise matematica*", são devidos a Newton, célebre matematico inglês (1642-1727). Foi estudando as variações das funções que descobriu o mais poderoso instrumento de análise dos matematicos, dos fisicos e dos astronomos. Vamos expôr os principios elementares, que muito hão de auxiliar para um estudo mais completo.

www.hedumat.uff.br

Grupo de Pesquisa História e Educação Matemática

38. Acrescimos. — O acrescimo de uma variavel que passa de um valor numérico para outro é a *diferença* que se obtem subtraindo o primeiro valor do segundo.

Por exemplo, na função

$$y = x^2,$$

um acrescimo de x se designa pelo simbolo $\triangle x$, que se lê *delta x*; do mesmo modo:

$\triangle y$ indica um acrescimo de y;

$\triangle f(x)$ indica um acrescimo de $f(x)$; etc.

Tomemos $x=2$ como valor inicial; temos então $y=4$.

Suponhamos que x cresce até 5; então $\triangle x=5-2=3$; $y=25$, e $\triangle y=25-4=21$.

Suponhamos que x decresce até 1; então, $\triangle x=1-2=-1$; $y=1$ e $\triangle y=1-4=-3$.

Neste exemplo $\triangle x$ e $\triangle y$ variam sempre no mesmo sentido, ambos positivos ou ambos negativos, embora em proporções diferentes.

Póde acontecer que, quando x cresce, y decresça, ou reciprocamente.

Fonte: FTD (1933)

Figura 44 – Algumas definições de derivadas

DIFERENCIAÇÃO 51

Solução: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - a^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 - a^2\right)^{1/2}$

ou $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - a^2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - a^2)$ (VI).

ou $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - a^2)^{-1/2} 2x = x(x^2 - a^2)^{-1/2}$

ou $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Diferenciar as funções seguintes:

72. $y = 5x^3 + 3x^2 - 6$.
73. $y = 2x^3 - 7x - 1$.
74. $y = \frac{2}{3}x - 7$.
75. $y = x^{m-n}$.
76. $y = \sqrt{x}$.
77. $y = \frac{\sqrt{3x}}{2}$.
78. $y = x^{2/3} - x^{1/2}$.
79. $y = x^{-2}$.
80. $y = \frac{2}{x^3}$.
81. $y = 9t^{4/3} - t^{-1}$.
82. $r = c\theta^3 + d\theta^2 + e\theta$.
83. $s = at^2 + bt + c$.
84. $y = ax^3 + bx^2 + c$.
85. $y = \frac{a + bx + cx^2}{x}$.
86. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/4}$.
87. $y = \sqrt{3x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.
88. $y = (a^2 - x)^3$.
89. $y = (x^3 - a)^{2/3}$.
90. $y = \frac{2}{\sqrt{x - a}}$.
91. $y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
92. $y = \frac{(x-1)^3}{x^{1/2}}$.
93. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$.

Calcular as derivadas seguintes:

94. $\frac{d}{dx}(2x^3 + 3x^2 + 1)$.
95. $\frac{d}{dt}(3t^3 - 4t)$.
96. $\frac{d}{dy}\left(y^{3/2} + \sqrt{y}\right)$.
97. $\frac{d}{dz}(z^3 + bz)$.

Fonte: FTD (1933)

Depois de feita a análise de um livro do último ano de anos finais de ensino secundário, faremos a análise de um livro do segundo ano dos anos finais do ensino secundário da reforma Gustavo Capanema. Após promulgada essa reforma, os anos finais do referido ensino foram chamados de curso clássico e científico. Na primeira análise analisamos o último livro dos anos finais, neste, vamos analisar um livro do segundo ano.

6.3 OBRA REFERENTE A REFORMA GUSTAVO CAPANEMA

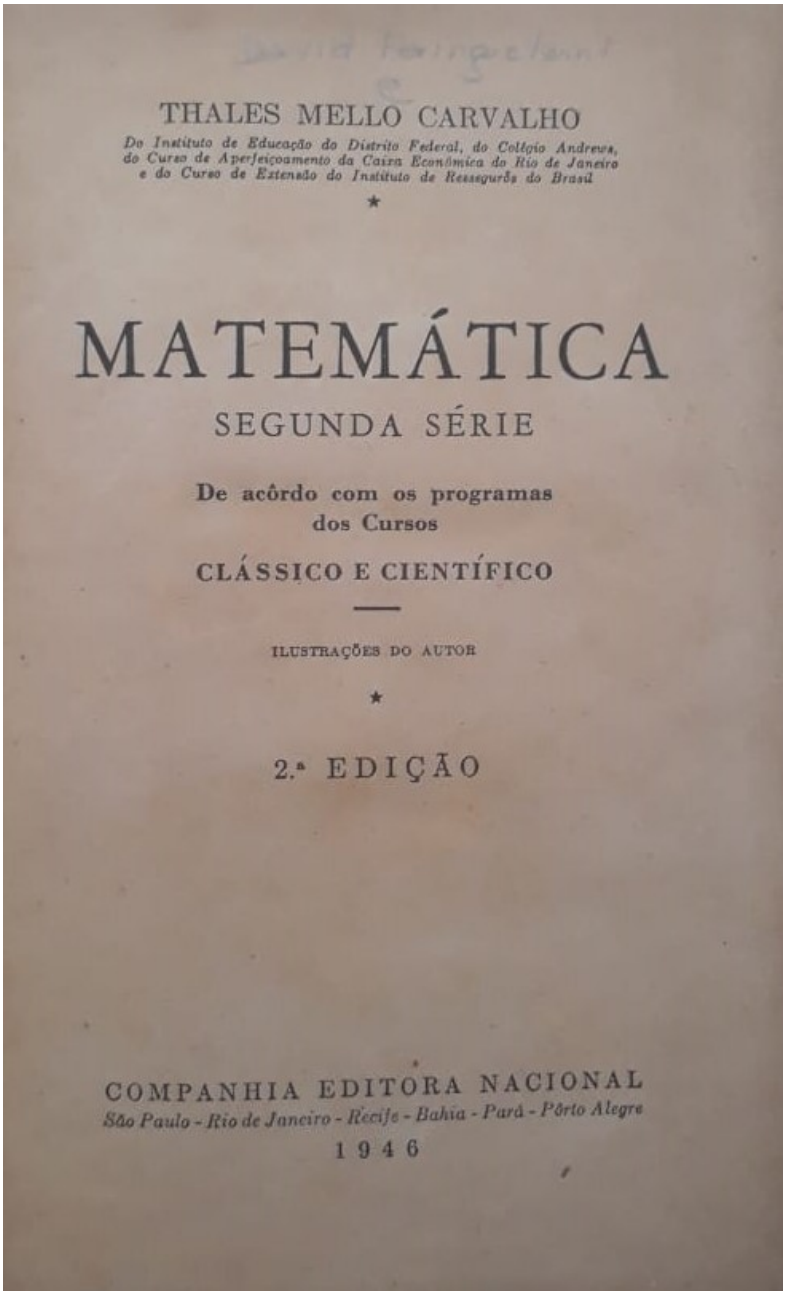
livro: MATEMÁTICA

Autor: Thales Mello Carvalho (1946)

Série: Segunda série dos cursos clássico e científico

Capa:

Figura 45 – Folha de rosto do livro Mathemática



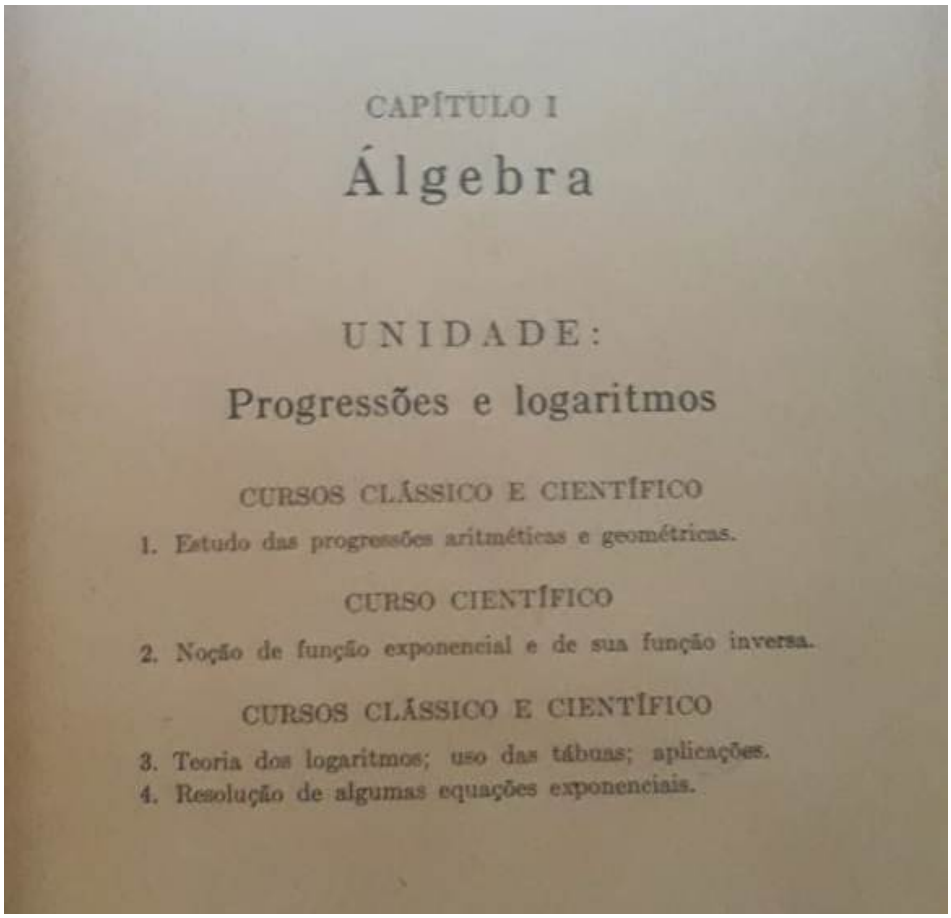
Fonte: T. M. Carvalho (1946)

- Qualidade do texto

Verificamos como o texto apresenta as explicações das definições, exemplos, vocabulário adequado ao tipo de ensino da época, presença de símbolos matemáticos e também se o texto é inteiro ou fragmentado. Para usar estes critérios, usaremos como base o terceiro inciso do decreto de lei 4244 de 1942 que diz: "Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial." (Brasil, 1942, Art. 1)

Tendo em vista que o livro apresenta conteúdos referentes aos cursos clássicos e científicos, o livro é dividido em duas partes a fim de atender a matemática para as duas modalidades de curso. Além disso, dentro dessas divisões existem outras subdivisões que são: álgebra, geometria e trigonometria. Ou seja. O livro apresenta um texto muito organizado e detalhado para atender todas as divisões precisas. Analisaremos apenas os conteúdos algébricos.

Figura 46 – Apresentação de subdivisões conteudistas para os cursos clássicos-científicos


CAPÍTULO I

Álgebra

UNIDADE:

Progressões e logaritmos

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas.

CURSO CIENTÍFICO

2. Noção de função exponencial e de sua função inversa.

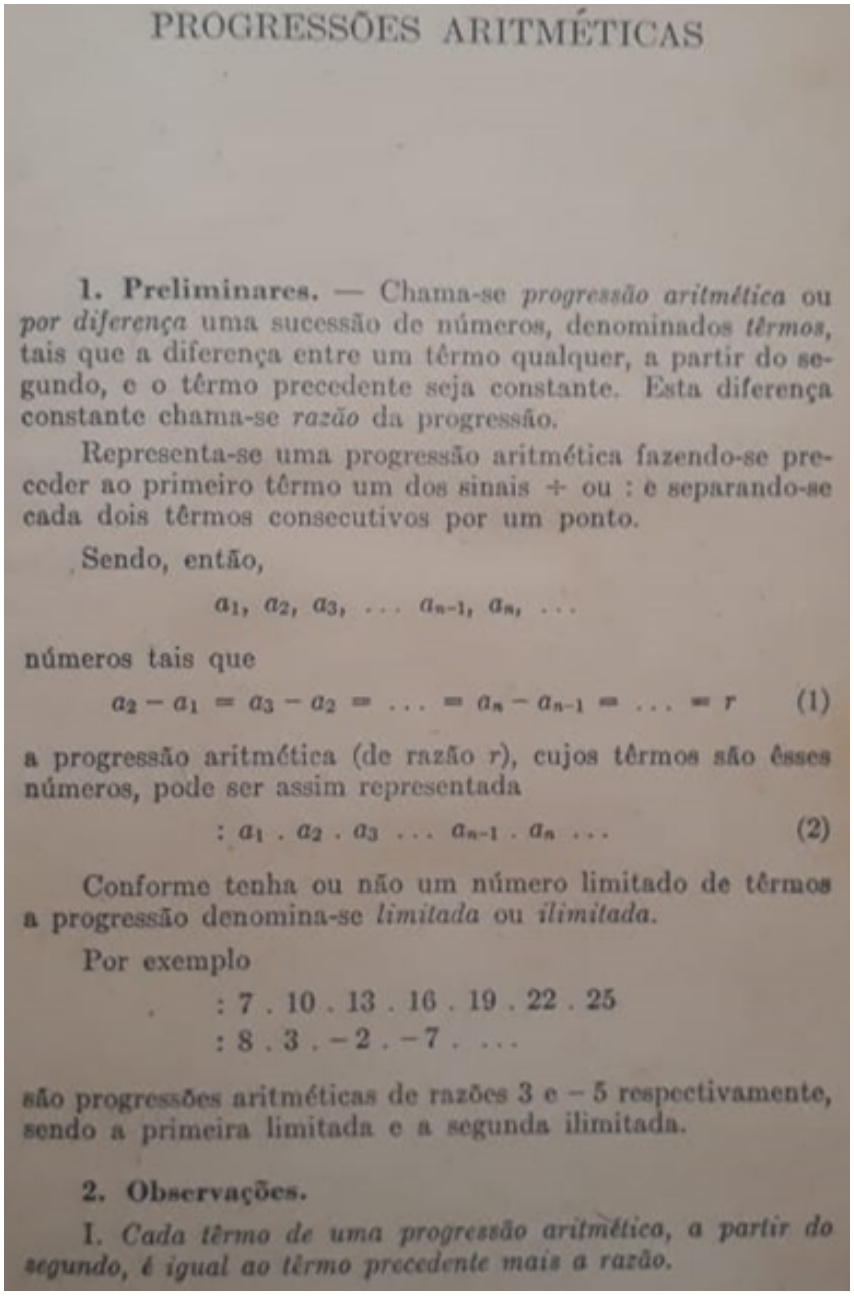
CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações.
4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Nesta imagem vemos as subdivisões que vão atender as necessidades dos alunos de acordo com a escolha do curso.

Figura 47 – Progressões aritméticas



PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Preliminares. — Chama-se *progressão aritmética* ou *por diferença* uma sucessão de números, denominados *têrmos*, tais que a diferença entre um têrmo qualquer, a partir do segundo, e o têrmo precedente seja constante. Esta diferença constante chama-se *razão* da progressão.

Representa-se uma progressão aritmética fazendo-se preceder ao primeiro têrmo um dos sinais + ou : e separando-se cada dois têrmos consecutivos por um ponto.

Sendo, então,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots$$

números tais que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r \qquad (1)$$

a progressão aritmética (de razão r), cujos têrmos são êsses números, pode ser assim representada

$$: a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ \ldots\ a_{n-1} \,.\, a_n \ \ldots \qquad (2)$$

Conforme tenha ou não um número limitado de têrmos a progressão denomina-se *limitada* ou *ilimitada*.

Por exemplo

$$: 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25$$
$$: 8 \,.\, 3 \,.\, -2 \,.\, -7 \,.\, \ldots$$

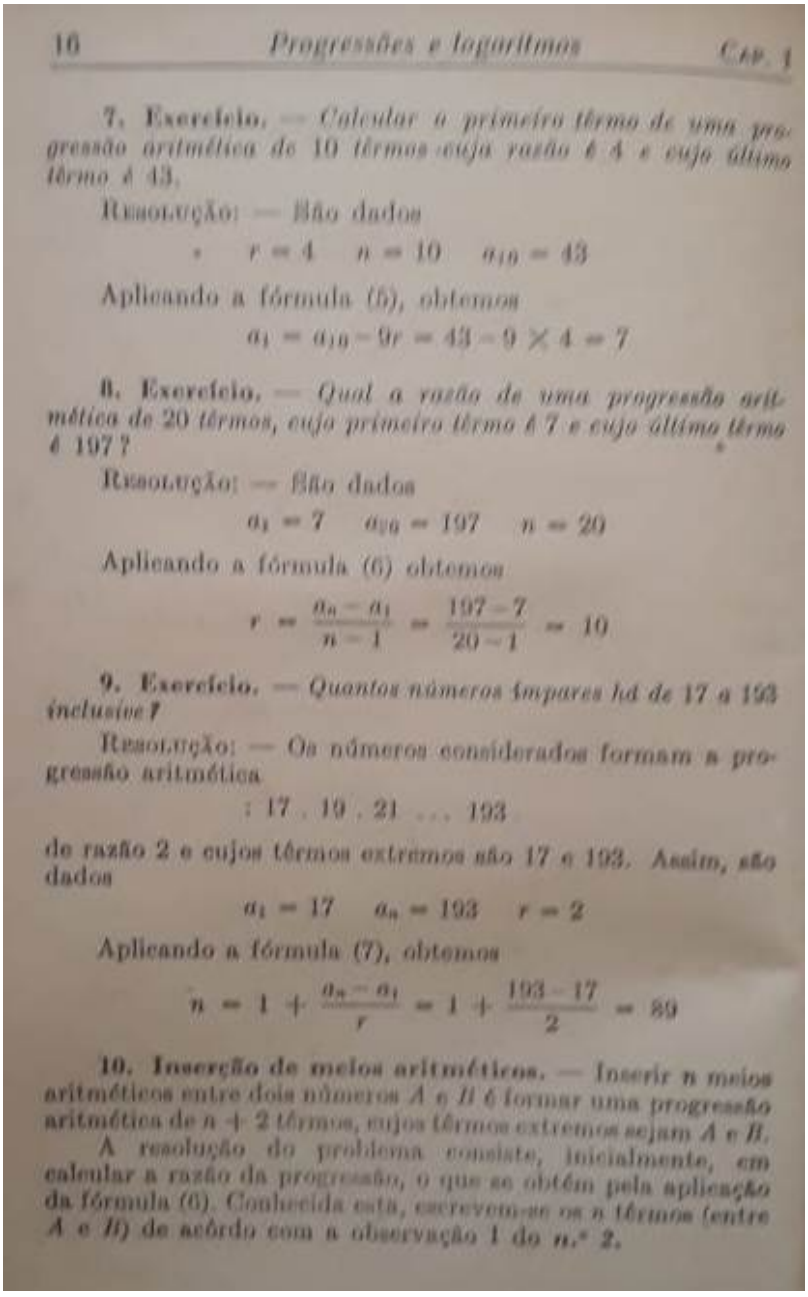
são progressões aritméticas de razões 3 e − 5 respectivamente, sendo a primeira limitada e a segunda ilimitada.

2. Observações.

I. *Cada têrmo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é igual ao têrmo precedente mais a razão.*

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Figura 48 – Exercícios resolvidos



16 *Progressões e logaritmos* Cap. 1

7. Exercício. — *Calcular o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 10 têrmos cuja razão é 4 e cujo último têrmo é 43.*

Resolução: — São dados

$$r = 4 \quad n = 10 \quad a_{10} = 43$$

Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$a_1 = a_{10} - 9r = 43 - 9 \times 4 = 7$$

8. Exercício. — *Qual a razão de uma progressão aritmética de 20 têrmos, cujo primeiro têrmo é 7 e cujo último têrmo é 197?*

Resolução: — São dados

$$a_1 = 7 \quad a_{20} = 197 \quad n = 20$$

Aplicando a fórmula (6) obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{197 - 7}{20 - 1} = 10$$

9. Exercício. — *Quantos números ímpares há de 17 a 193 inclusive?*

Resolução: — Os números considerados formam a progressão aritmética

$$: 17 \ . \ 19 \ . \ 21 \ \ldots \ 193$$

de razão 2 e cujos têrmos extremos são 17 e 193. Assim, são dados

$$a_1 = 17 \quad a_n = 193 \quad r = 2$$

Aplicando a fórmula (7), obtemos

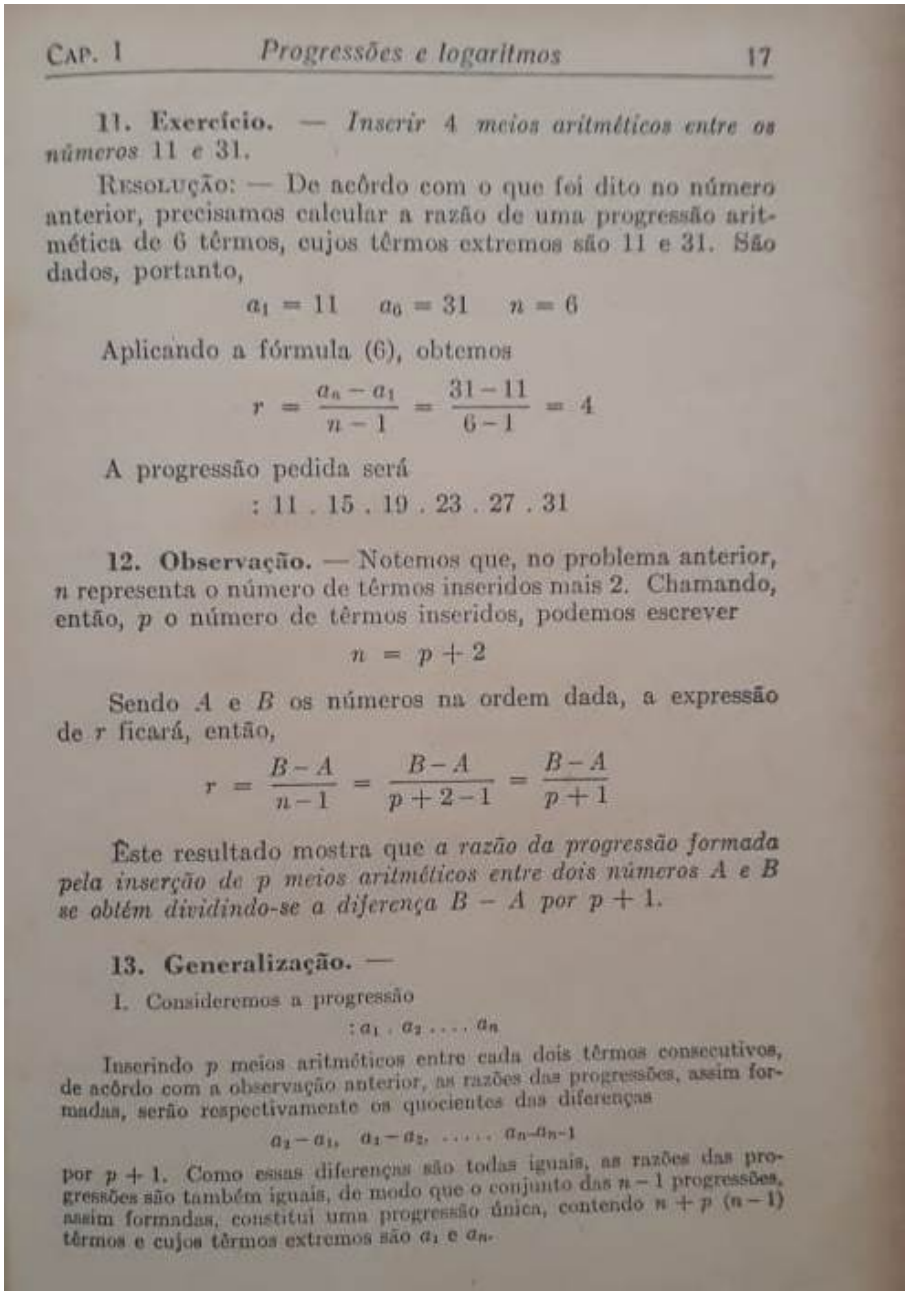
$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r} = 1 + \frac{193 - 17}{2} = 89$$

10. Inserção de meios aritméticos. — Inserir n meios aritméticos entre dois números A e B é formar uma progressão aritmética de $n + 2$ têrmos, cujos têrmos extremos sejam A e B.

A resolução do problema consiste, inicialmente, em calcular a razão da progressão, o que se obtém pela aplicação da fórmula (6). Conhecida esta, escrevem-se os n têrmos (entre A e B) de acôrdo com a observação 1 do n.º 2.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Figura 49 – Generalizações das progressões aritméticas



CAP. 1 *Progressões e logaritmos* 17

11. Exercício. — *Inserir 4 meios aritméticos entre os números 11 e 31.*

RESOLUÇÃO: — De acôrdo com o que foi dito no número anterior, precisamos calcular a razão de uma progressão aritmética de 6 têrmos, cujos têrmos extremos são 11 e 31. São dados, portanto,

$$a_1 = 11 \quad a_6 = 31 \quad n = 6$$

Aplicando a fórmula (6), obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{31-11}{6-1} = 4$$

A progressão pedida será

: 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31

12. Observação. — Notemos que, no problema anterior, n representa o número de têrmos inseridos mais 2. Chamando, então, p o número de têrmos inseridos, podemos escrever

$$n = p + 2$$

Sendo A e B os números na ordem dada, a expressão de r ficará, então,

$$r = \frac{B-A}{n-1} = \frac{B-A}{p+2-1} = \frac{B-A}{p+1}$$

Êste resultado mostra que *a razão da progressão formada pela inserção de p meios aritméticos entre dois números A e B se obtém dividindo-se a diferença B − A por p + 1.*

13. Generalização. —

1. Consideremos a progressão

$$: a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, a_n$$

Inserindo p meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos, de acôrdo com a observação anterior, as razões das progressões, assim formadas, serão respectivamente os quocientes das diferenças

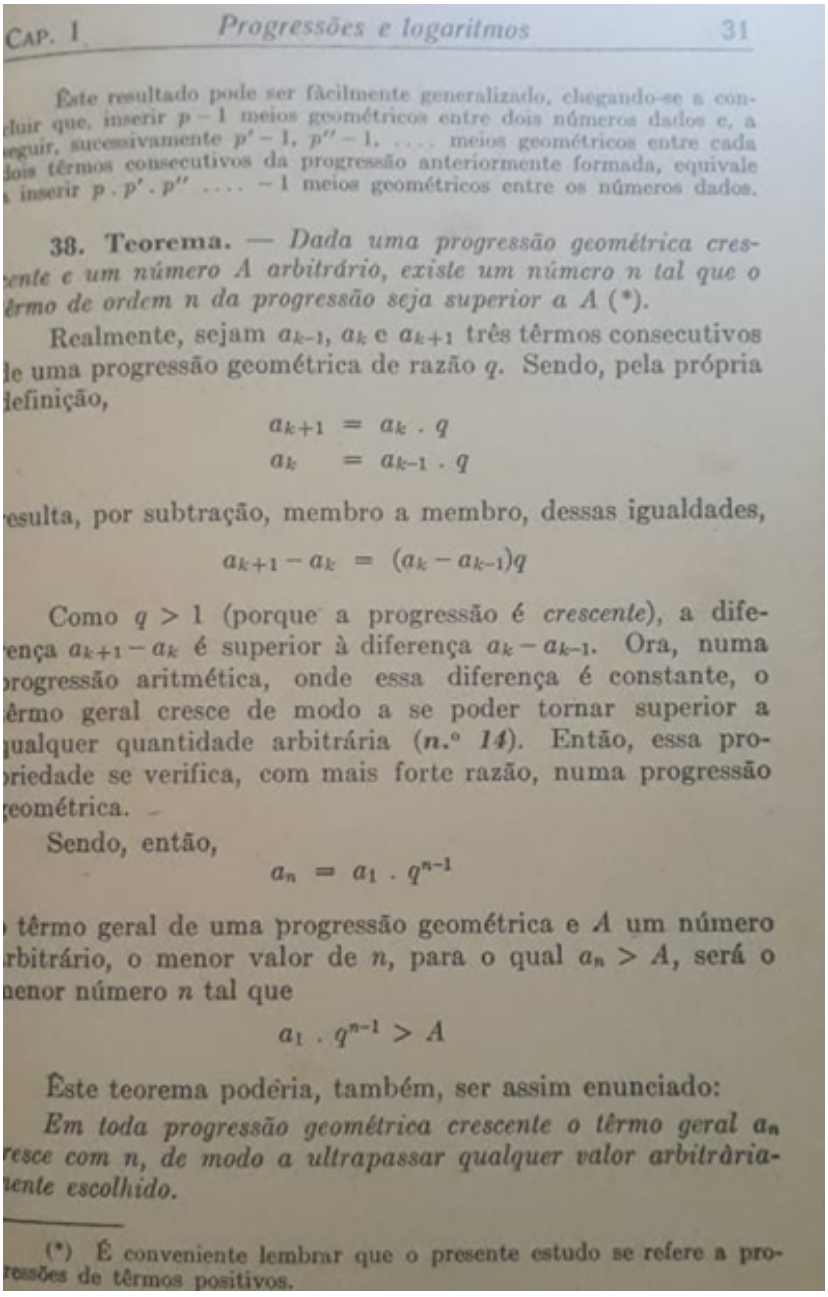
$$a_2 - a_1, \quad a_3 - a_2, \quad . \, . \, . \, . \, . \quad a_n - a_{n-1}$$

por $p + 1$. Como essas diferenças são todas iguais, as razões das progressões são também iguais, de modo que o conjunto das $n-1$ progressões, assim formadas, constitui uma progressão única, contendo $n + p\,(n-1)$ têrmos e cujos têrmos extremos são a_1 e a_n.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Aqui podemos ver definições mais elaboradas que as dispostas no livro anterior. Assim as explicações decorrentes das definições apresentam começo meio e fim com muitos detalhes como no exemplo da imagem acima que, neste caso são, definições mais elaboradas, e ainda, o tópico de generalizações. Também observamos que o texto está de acordo com o tipo de ensino da época, uma vez que como no livro anterior o rigor da época e a presença de demonstrações nos livros demonstra um nível de dificuldade coerente no período. Abaixo vemos o teorema da matéria de progressões geométricas demonstrado depois de feita a definição, observações e exemplos.

Figura 50 – Teorema e demonstração de Progressão geométrica



CAP. I *Progressões e logaritmos* 31

Êste resultado pode ser fàcilmente generalizado, chegando-se a concluir que, inserir $p-1$ meios geométricos entre dois números dados e, a seguir, sucessivamente $p'-1$, $p''-1$, ... meios geométricos entre cada dois têrmos consecutivos da progressão anteriormente formada, equivale a inserir $p \cdot p' \cdot p''$ .... -1 meios geométricos entre os números dados.

38. Teorema. — *Dada uma progressão geométrica crescente e um número A arbitrário, existe um número n tal que o têrmo de ordem n da progressão seja superior a A* (*).

Realmente, sejam a_{k-1}, a_k e a_{k+1} três têrmos consecutivos de uma progressão geométrica de razão q. Sendo, pela própria definição,

$$a_{k+1} = a_k \cdot q$$
$$a_k = a_{k-1} \cdot q$$

resulta, por subtração, membro a membro, dessas igualdades,

$$a_{k+1} - a_k = (a_k - a_{k-1})q$$

Como $q > 1$ (porque a progressão é *crescente*), a diferença $a_{k+1} - a_k$ é superior à diferença $a_k - a_{k-1}$. Ora, numa progressão aritmética, onde essa diferença é constante, o têrmo geral cresce de modo a se poder tornar superior a qualquer quantidade arbitrária (**n.º 14**). Então, essa propriedade se verifica, com mais forte razão, numa progressão geométrica.

Sendo, então,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

o têrmo geral de uma progressão geométrica e A um número arbitrário, o menor valor de n, para o qual $a_n > A$, será o menor número n tal que

$$a_1 \cdot q^{n-1} > A$$

Êste teorema poderia, também, ser assim enunciado:

Em toda progressão geométrica crescente o têrmo geral a_n cresce com n, de modo a ultrapassar qualquer valor arbitràriamente escolhido.

(*) É conveniente lembrar que o presente estudo se refere a progressões de têrmos positivos.

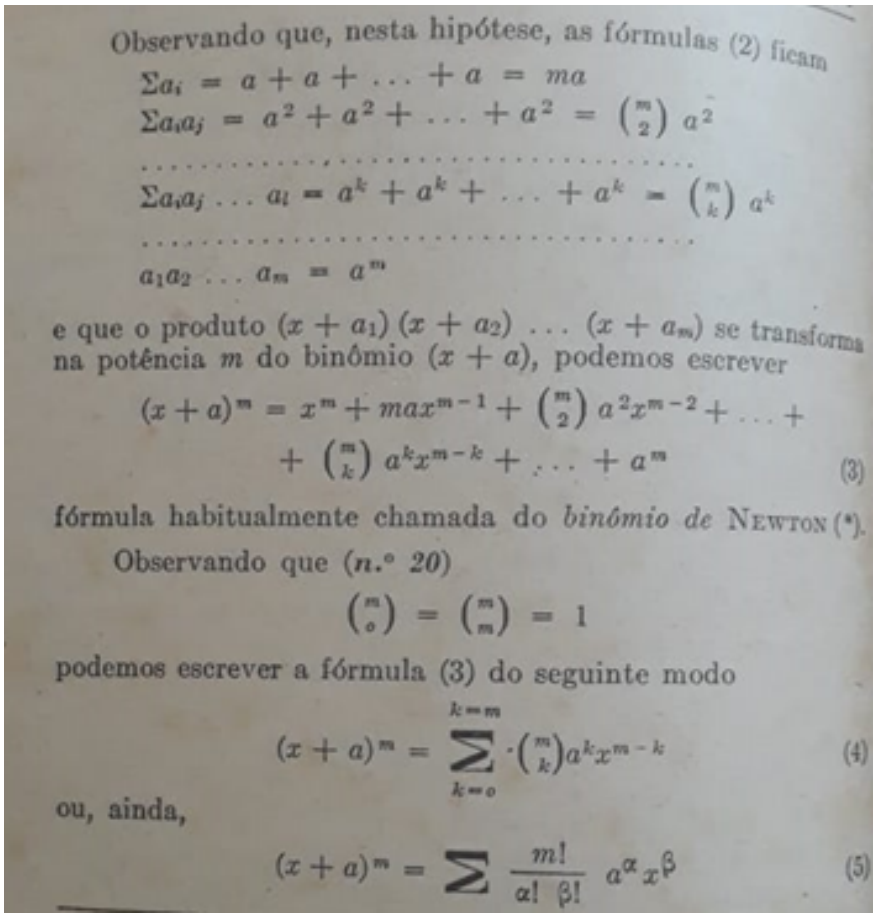
Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Os exemplos são coerentes e complementares as definições estabelecidas e um ponto interessante é a presença de exercícios resolvidos, deixando a conceituação mais completa. Além dos exercícios resolvidos o que chama atenção é o tópico generalizações que é muito importante uma vez que a álgebra é compreender as generalizações.

Sobre a presença de simbolismos, novamente eles aparecem em grande escala uma vez que os livros eram já para anos finais do ensino secundário e temos a presença de demonstrações. Podemos notar o que está sendo dito, abaixo no capítulo 2 de binômio de Newton em que a formalização do conteúdo aparece generalizada com a presença de

simbolismo algébrico. Falando sobre este conteúdo, podemos inferir que como no outro livro, este conteúdo aparece fragmentado com a presença dos conceitos de análise combinatória para depois terminar o conteúdo em sua totalidade. A diferença é que neste livro o conteúdo é exposto de forma mais detalhada.

Figura 51 – Símbolos e demonstrações da progressão geométrica



Observando que, nesta hipótese, as fórmulas (2) ficam

$$\Sigma a_i = a + a + \ldots + a = ma$$
$$\Sigma a_i a_j = a^2 + a^2 + \ldots + a^2 = \binom{m}{2} a^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma a_i a_j \ldots a_l = a^k + a^k + \ldots + a^k = \binom{m}{k} a^k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 a_2 \ldots a_m = a^m$$

e que o produto $(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_m)$ se transforma na potência m do binômio $(x + a)$, podemos escrever

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \binom{m}{k} a^k x^{m-k} + \ldots + a^m \quad (3)$$

fórmula habitualmente chamada do *binômio de* NEWTON (*).

Observando que (*n.° 20*)

$$\binom{m}{o} = \binom{m}{m} = 1$$

podemos escrever a fórmula (3) do seguinte modo

$$(x+a)^m = \sum_{k=o}^{k=m} \binom{m}{k} a^k x^{m-k} \quad (4)$$

ou, ainda,

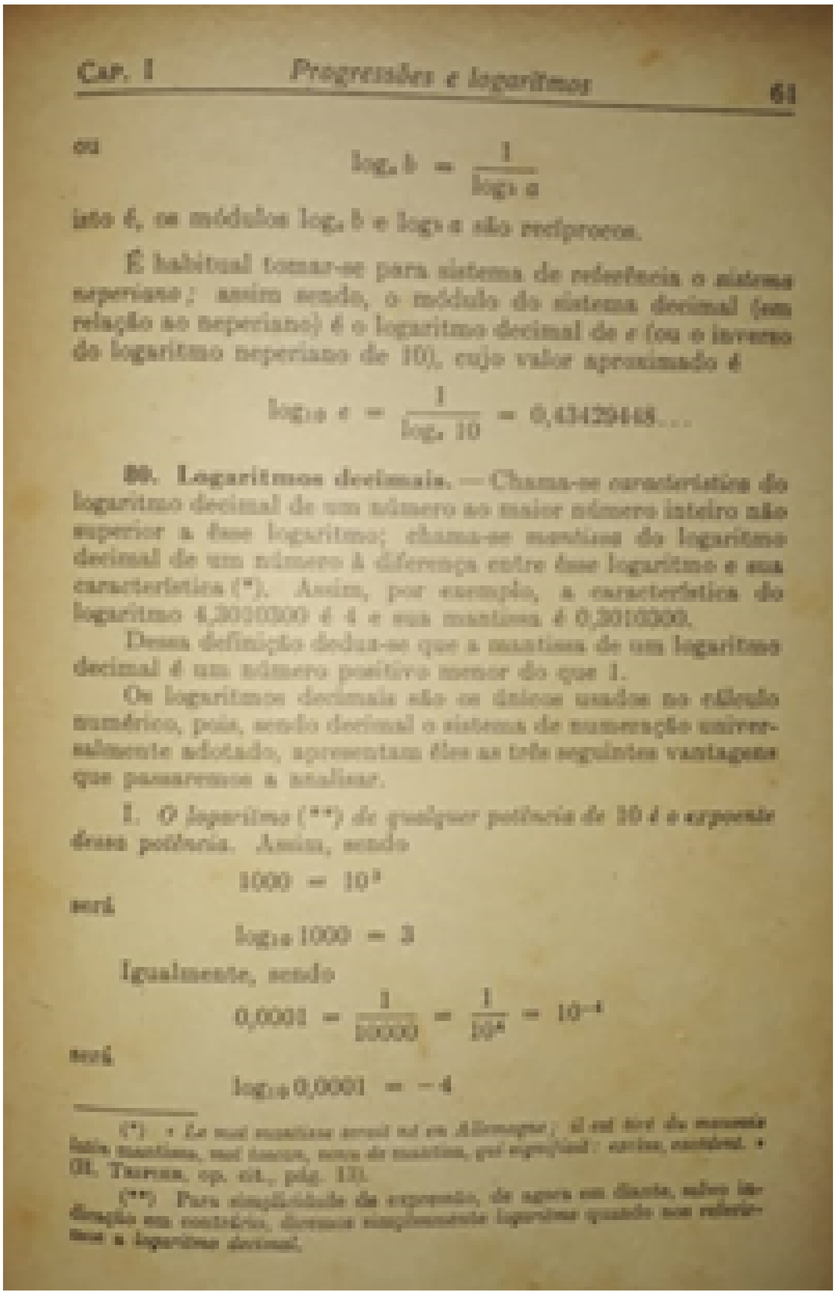
$$(x+a)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\ \beta!}\ a^\alpha x^\beta \quad (5)$$

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

- Clareza da linguagem em concordância com a proposta da época.

Vejamos um fragmento do conteúdo de logaritmos. Vale adiantar o uso de termos e definições muitas vezes diferente da vista hoje em dia:

Figura 52 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 1ª parte



CAP. I *Progressões e logaritmos* 61

ou

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

isto é, os módulos $\log_a b$ e $\log_b a$ são recíprocos.

É habitual tomar-se para sistema de referência o *sistema neperiano*; assim sendo, o módulo do sistema decimal (em relação ao neperiano) é o logaritmo decimal de *e* (ou o inverso do logaritmo neperiano de 10), cujo valor aproximado é

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} = 0{,}43429448\ldots$$

80. Logaritmos decimais. — Chama-se *característica* do logaritmo decimal de um número ao maior número inteiro não superior a êsse logaritmo; chama-se *mantissa* do logaritmo decimal de um número à diferença entre êsse logaritmo e sua característica (*). Assim, por exemplo, a característica do logaritmo 4,3010300 é 4 e sua mantissa é 0,3010300.

Dessa definição deduz-se que a mantissa de um logaritmo decimal é um número positivo menor do que 1.

Os logaritmos decimais são os únicos usados no cálculo numérico, pois, sendo decimal o sistema de numeração universalmente adotado, apresentam êles as três seguintes vantagens que passaremos a analisar.

I. *O logaritmo (**) de qualquer potência de 10 é o expoente dessa potência.* Assim, sendo

$$1000 = 10^3$$

será

$$\log_{10} 1000 = 3$$

Igualmente, sendo

$$0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

será

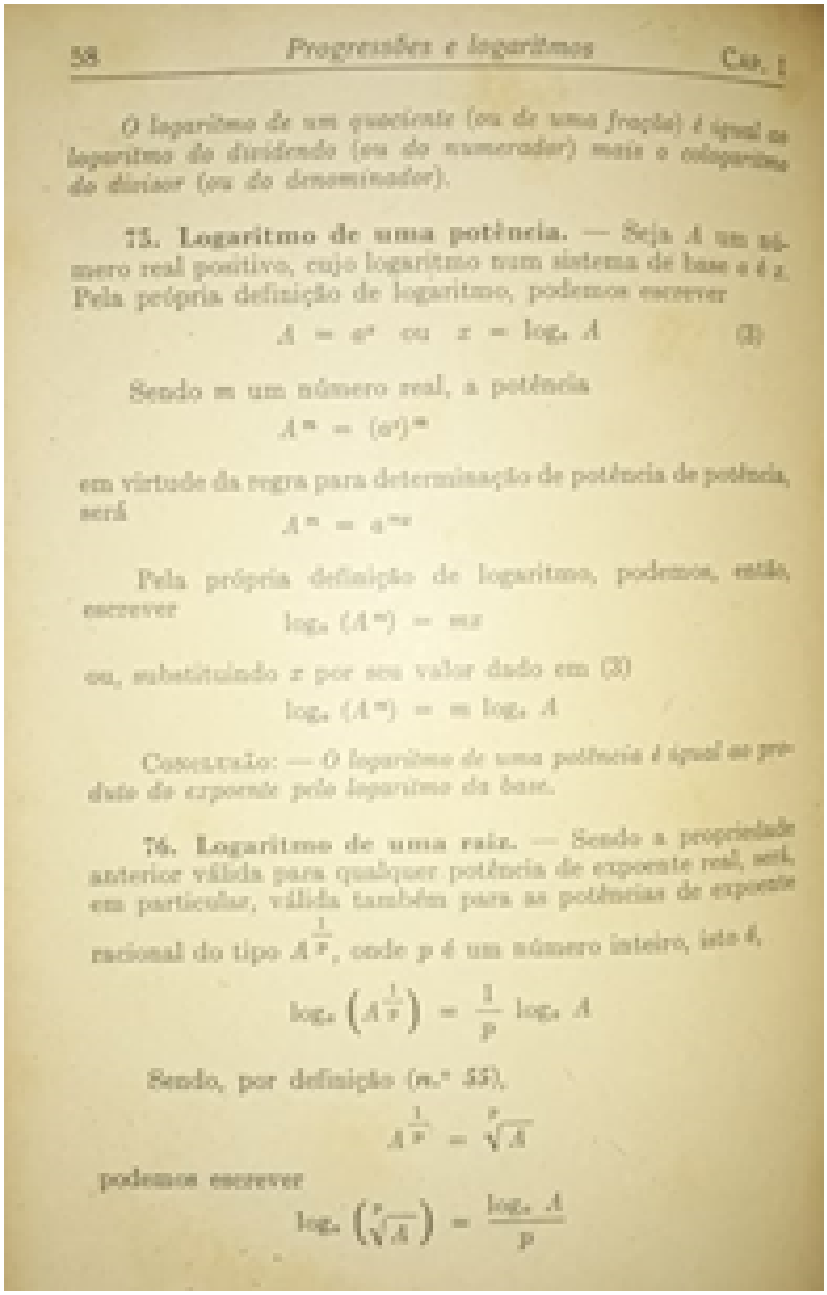
$$\log_{10} 0{,}0001 = -4$$

(*) « *Le mot mantisse* [illegible] *Allemagne*; [illegible] » (H. Tropfke, op. cit., pág. 13).

(**) Para simplicidade da expressão, de agora em diante, salvo indicação em contrário, diremos simplesmente *logaritmo* quando nos referirmos a logaritmo decimal.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Figura 53 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 2ª parte



58 *Progressões e logaritmos* Cap. I

O logaritmo de um quociente (ou de uma fração) é igual ao logaritmo do dividendo (ou do numerador) mais o cologaritmo do divisor (ou do denominador).

75. Logaritmo de uma potência. — Seja A um número real positivo, cujo logaritmo num sistema de base a é x. Pela própria definição de logaritmo, podemos escrever

$$A = a^x \quad \text{ou} \quad x = \log_a A \qquad (3)$$

Sendo m um número real, a potência

$$A^m = (a^x)^m$$

em virtude da regra para determinação de potência de potência, será

$$A^m = a^{mx}$$

Pela própria definição de logaritmo, podemos, então, escrever

$$\log_a (A^m) = mx$$

ou, substituindo x por seu valor dado em (3)

$$\log_a (A^m) = m \log_a A$$

Conclusão: — *O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base.*

76. Logaritmo de uma raiz. — Sendo a propriedade anterior válida para qualquer potência de expoente real, será, em particular, válida também para as potências de expoente racional do tipo $A^{\frac{1}{p}}$, onde p é um número inteiro, isto é,

$$\log_a \left(A^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} \log_a A$$

Sendo, por definição (*n.º 55*),

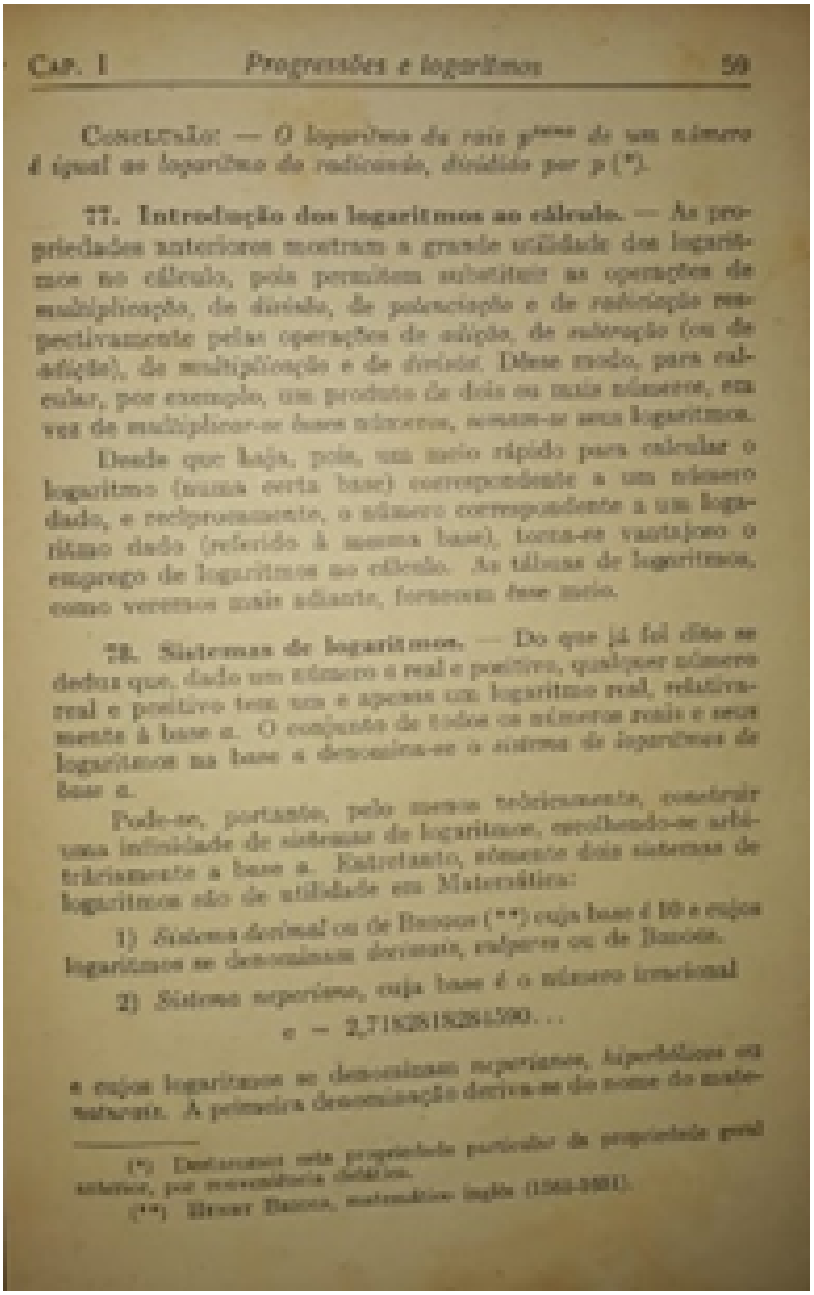
$$A^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{A}$$

podemos escrever

$$\log_a \left(\sqrt[p]{A}\right) = \frac{\log_a A}{p}$$

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Figura 54 – Fragmentos do conteúdo de logaritmo, 3ª parte



CAP. I *Progressões e logaritmos* 59

Corolário: — *O logaritmo da raiz $p^{ésima}$ de um número é igual ao logaritmo do radicando, dividido por p* (*).

77. Introdução dos logaritmos ao cálculo. — As propriedades anteriores mostram a grande utilidade dos logaritmos no cálculo, pois permitem substituir as operações de multiplicação, de divisão, de potenciação e de radiciação respectivamente pelas operações de adição, de subtração (ou de adição), de multiplicação e de divisão. Deste modo, para calcular, por exemplo, um produto de dois ou mais números, em vez de multiplicar-se esses números, somam-se seus logaritmos.

Desde que haja, pois, um meio rápido para calcular o logaritmo (numa certa base) correspondente a um número dado, e reciprocamente, o número correspondente a um logaritmo dado (referido à mesma base), torna-se vantajoso o emprego de logaritmos no cálculo. As tábuas de logaritmos, como veremos mais adiante, fornecem esse meio.

78. Sistemas de logaritmos. — Do que já foi dito se deduz que, dado um número a real e positivo, qualquer número real e positivo tem um e apenas um logaritmo real, relativamente à base a. O conjunto de todos os números reais e seus logaritmos na base a denomina-se o *sistema de logaritmos de base a*.

Pode-se, portanto, pelo menos teòricamente, construir uma infinidade de sistemas de logaritmos, escolhendo-se arbitràriamente a base a. Entretanto, sòmente dois sistemas de logaritmos são de utilidade em Matemática:

1) *Sistema decimal* ou de Briggs (**) cuja base é 10 e cujos logaritmos se denominam *decimais*, *vulgares* ou de Briggs.

2) *Sistema neperiano*, cuja base é o número irracional

$$e = 2{,}71828182845900\ldots$$

e cujos logaritmos se denominam *neperianos*, *hiperbólicos* ou *naturais*. A primeira denominação deriva-se do nome do matemático

(*) Demonstra esta propriedade particular da propriedade geral anterior, por sucessivas divisões.

(**) Henry Briggs, matemático inglês (1561-1631).

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Nesse caso temos subdivisões do conteúdo e logaritmo como logaritmo da raiz e logaritmo de expoente que hoje nem sempre vem com tanta subdivisões, um ponto relevante é que a obra faz questão de ressaltar a importância do logaritmo para o cálculo uma vez que este conteúdo apresenta como fazer cálculos com algarismos cada vez maiores reduzindo o esforço para tal. Esta observação da obra reflete a relevância da aquisição de técnicas presentes nesta modalidade de abordagem de conteúdo. O conteúdo de logaritmo era comum tanto para os cursos clássicos quanto para o científico.

• Generalizações algébricas

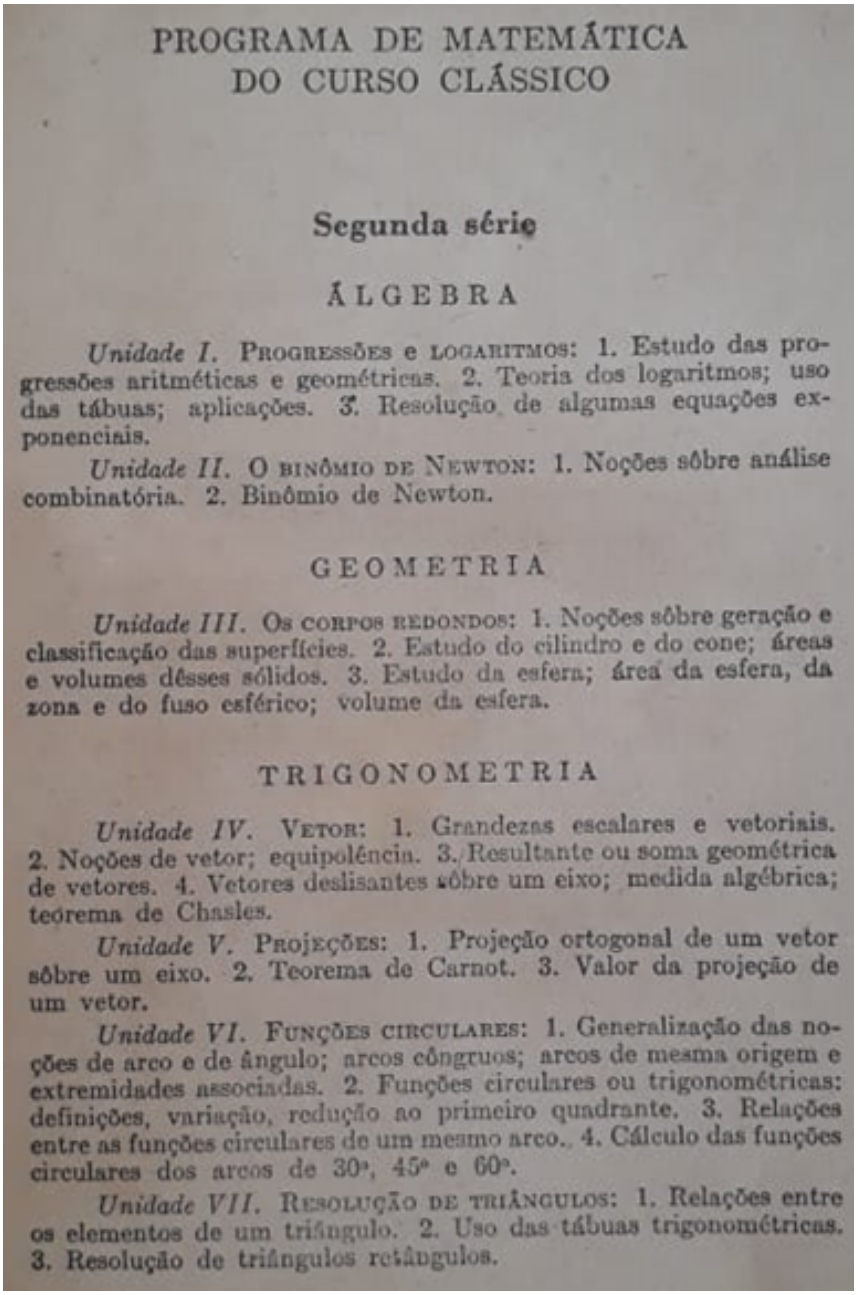
As generalizações algébricas expressas nesse exemplar estão apresentadas em sequência das definições e nas demonstrações presentes no livro, o que indica uma valorização da aplicação de exercícios (ZOTTI, 2006). Isto é, alguns poucos conteúdos algébricos do livro apresentam um tópico chamado generalizações. Como no livro anterior, é apresentada a definição com exemplos e teoremas que já fazem o aluno tentar visualizar a generalização tendo em vista que o livro já se trata de anos finais do ensino secundário e já poderia ter maturidade para entender as possíveis generalizações.

Vale dizer que nem todos os conteúdos algébricos eram vistos por todos os estudantes dos cursos finais. Os alunos do curso científico, por exemplo, estudavam muito mais conteúdos que os alunos do curso clássico. Sendo assim, exigia se do aluno que escolhesse o curso científico maior visão algébrica generalizadora uma vez que o mesmo conhecia maior quantitativo de conteúdos algébricos.

• Disposição de conteúdo:

Para mostrar a disposição de conteúdo, optamos por analisar o índice do livro. Neste o índice aparece no início do exemplar como estamos habituados atualmente, porém a novidade é a disposição de conteúdos algébricos vem divididas para atender aos cursos clássicos e científicos. Vejamos abaixo:

Figura 55 – Disposição de conteúdos, 1ª parte



PROGRAMA DE MATEMÁTICA
DO CURSO CLÁSSICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. Progressões e logaritmos: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

GEOMETRIA

Unidade III. Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade IV. Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noções de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

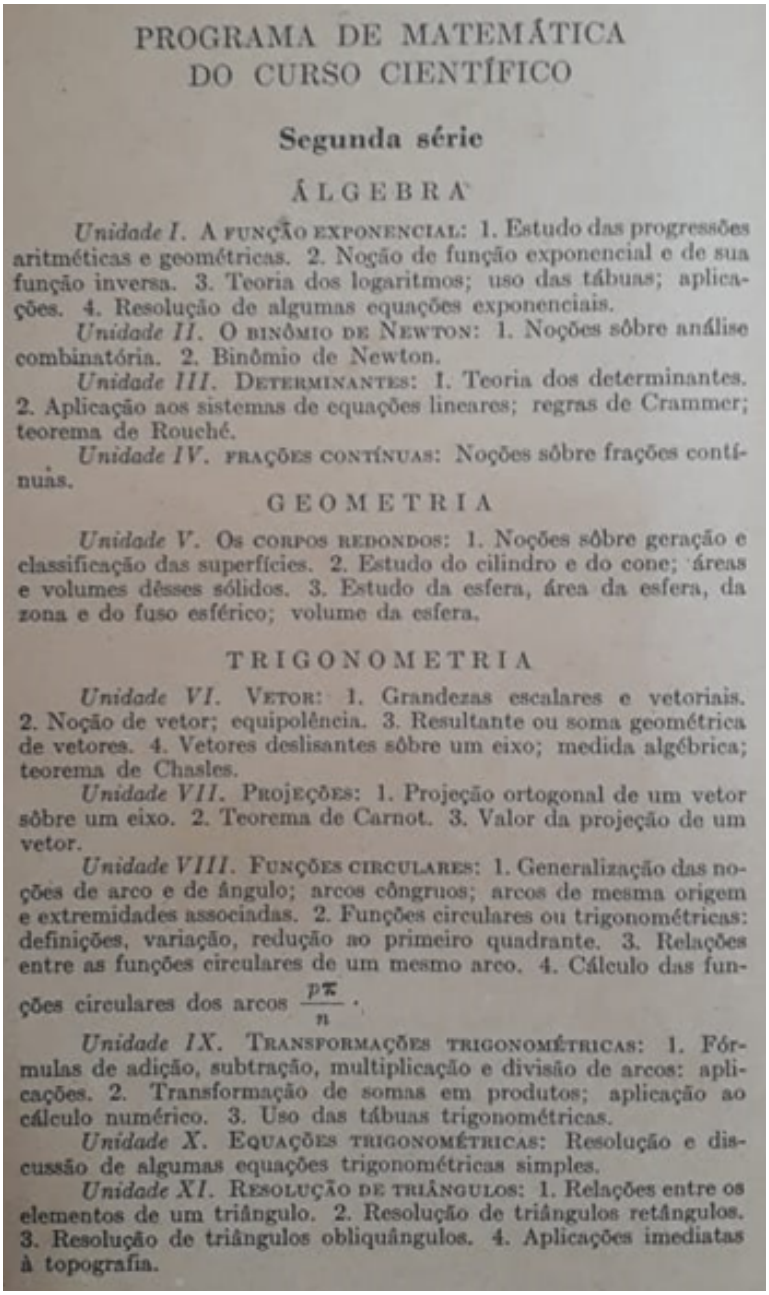
Unidade V. Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VI. Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30°, 45° e 60°.

Unidade VII. Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de triângulos retângulos.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Figura 56 – Disposição de conteúdos, 2ª parte



PROGRAMA DE MATEMÁTICA
DO CURSO CIENTÍFICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. A FUNÇÃO EXPONENCIAL: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O BINÔMIO DE NEWTON: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. DETERMINANTES: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV. FRAÇÕES CONTÍNUAS: Noções sôbre frações contínuas.

GEOMETRIA

Unidade V. Os CORPOS REDONDOS: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. VETOR: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. PROJEÇÕES: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. FUNÇÕES CIRCULARES: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

Unidade XI. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. 3. Resolução de triângulos obliquângulos. 4. Aplicações imediatas à topografia.

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Olhando somente os conteúdos algébricos que são o foco deste trabalho, podemos inferir que alguns conteúdos que são comuns no nosso Ensino Médio embora ensinados de forma diferenciada devido ao tempo e interesses sociais. O que já é diferenciado se compararmos os conteúdos do primeiro livro que estão em sua maioria no ensino superior atual.

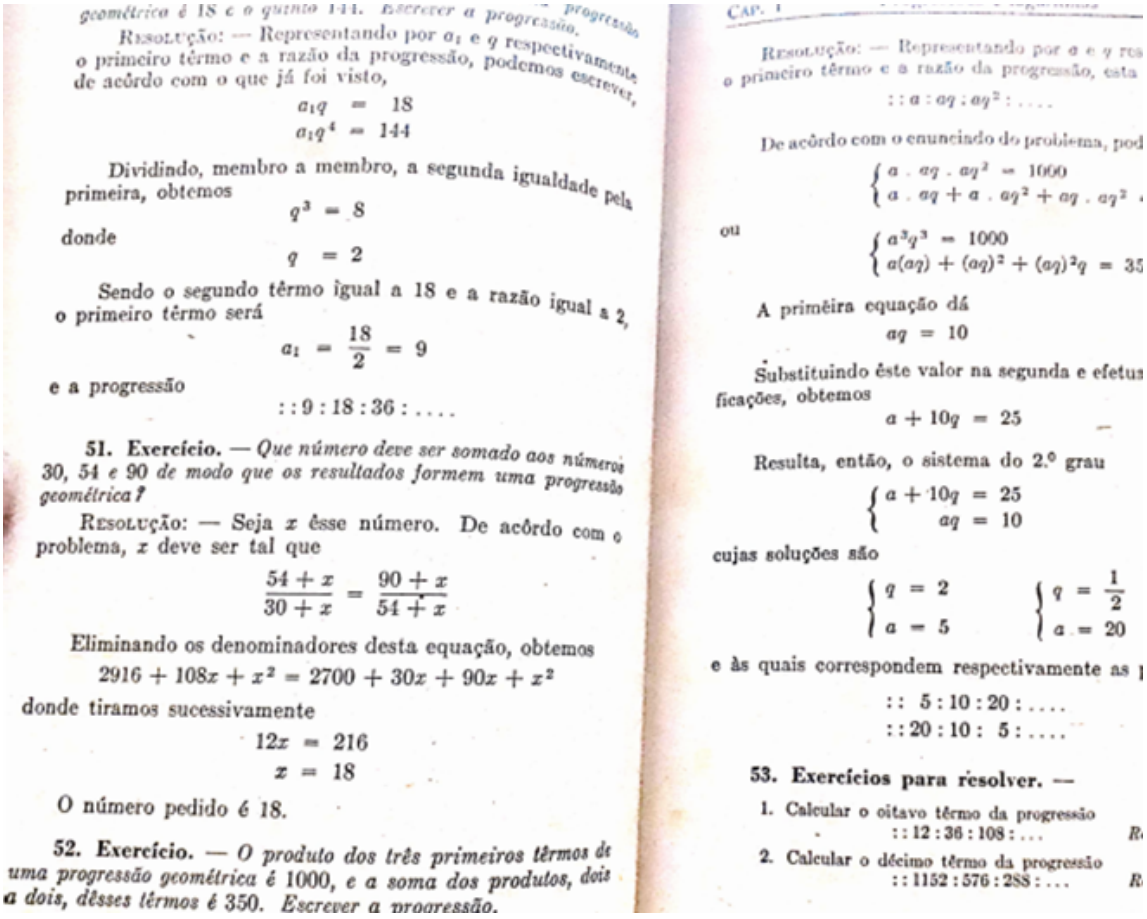
Note que certos conteúdos se repetem nos dois tipos de curso como: toda a unidade 2 e os conteúdos de progressões e logaritmos da unidade 1. Já toda a unidade 3 e 4 e o restante da unidade 1 não mencionados é comum apenas aos estudantes do curso científico.

Assim essa disposição de conteúdos é adequada ao período uma vez que a demanda da época era uma sociedade mais tecnicista e ainda aos estudantes que gostariam de se fixar mais ao mercado engenheiro ou a qualquer outro que se assemelha ao mesmo tinham a chance de explorar um quantitativo maior de conteúdos provenientes da álgebra. Logo, o ensino da álgebra continha mais conteúdos no curso científico, o que pode interferir na compreensão da ideia de generalização algébrica. Novamente não há grande presença de contexto.

- Disposição dos exemplos e exercícios

A novidade deste exemplar é a presença de exercícios resolvidos. Vamos perceber que os exemplos e exercícios estão bastante relacionados estando, portanto, de acordo um com o outro, em muitos casos temos a álgebra vista como a aquisição de técnicas para desenvolver problemas, como no caso abaixo:

Figura 57 – Exercícios resolvidos de progressão geométrica



geométrica é 18 e o quinto 144. Escrever a progressão.

Resolução: — Representando por a_1 e q respectivamente o primeiro têrmo e a razão da progressão, podemos escrever, de acôrdo com o que já foi visto,

$$a_1 q = 18$$
$$a_1 q^4 = 144$$

Dividindo, membro a membro, a segunda igualdade pela primeira, obtemos

$$q^3 = 8$$

donde

$$q = 2$$

Sendo o segundo têrmo igual a 18 e a razão igual a 2, o primeiro têrmo será

$$a_1 = \frac{18}{2} = 9$$

e a progressão

$$:: 9 : 18 : 36 : \ldots.$$

51. Exercício. — *Que número deve ser somado aos números 30, 54 e 90 de modo que os resultados formem uma progressão geométrica?*

Resolução: — Seja x êsse número. De acôrdo com o problema, x deve ser tal que

$$\frac{54 + x}{30 + x} = \frac{90 + x}{54 + x}$$

Eliminando os denominadores desta equação, obtemos

$$2916 + 108x + x^2 = 2700 + 30x + 90x + x^2$$

donde tiramos sucessivamente

$$12x = 216$$
$$x = 18$$

O número pedido é 18.

52. Exercício. — *O produto dos três primeiros têrmos de uma progressão geométrica é 1000, e a soma dos produtos, dois a dois, dêsses têrmos é 350. Escrever a progressão.*

CAP. I

Resolução: — Representando por a e q res
o primeiro têrmo e a razão da progressão, esta

$$:: a : aq : aq^2 : \ldots.$$

De acôrdo com o enunciado do problema, pod

$$\begin{cases} a \cdot aq \cdot aq^2 = 1000 \\ a \cdot aq + a \cdot aq^2 + aq \cdot aq^2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a^3q^3 = 1000 \\ a(aq) + (aq)^2 + (aq)^2q = 35 \end{cases}$$

A primeira equação dá

$$aq = 10$$

Substituindo êste valor na segunda e efetuas ficações, obtemos

$$a + 10q = 25$$

Resulta, então, o sistema do 2.º grau

$$\begin{cases} a + 10q = 25 \\ aq = 10 \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} q = 2 \\ a = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a = 20 \end{cases}$$

e às quais correspondem respectivamente as

$$:: 5 : 10 : 20 : \ldots.$$
$$:: 20 : 10 : 5 : \ldots.$$

53. Exercícios para resolver. —

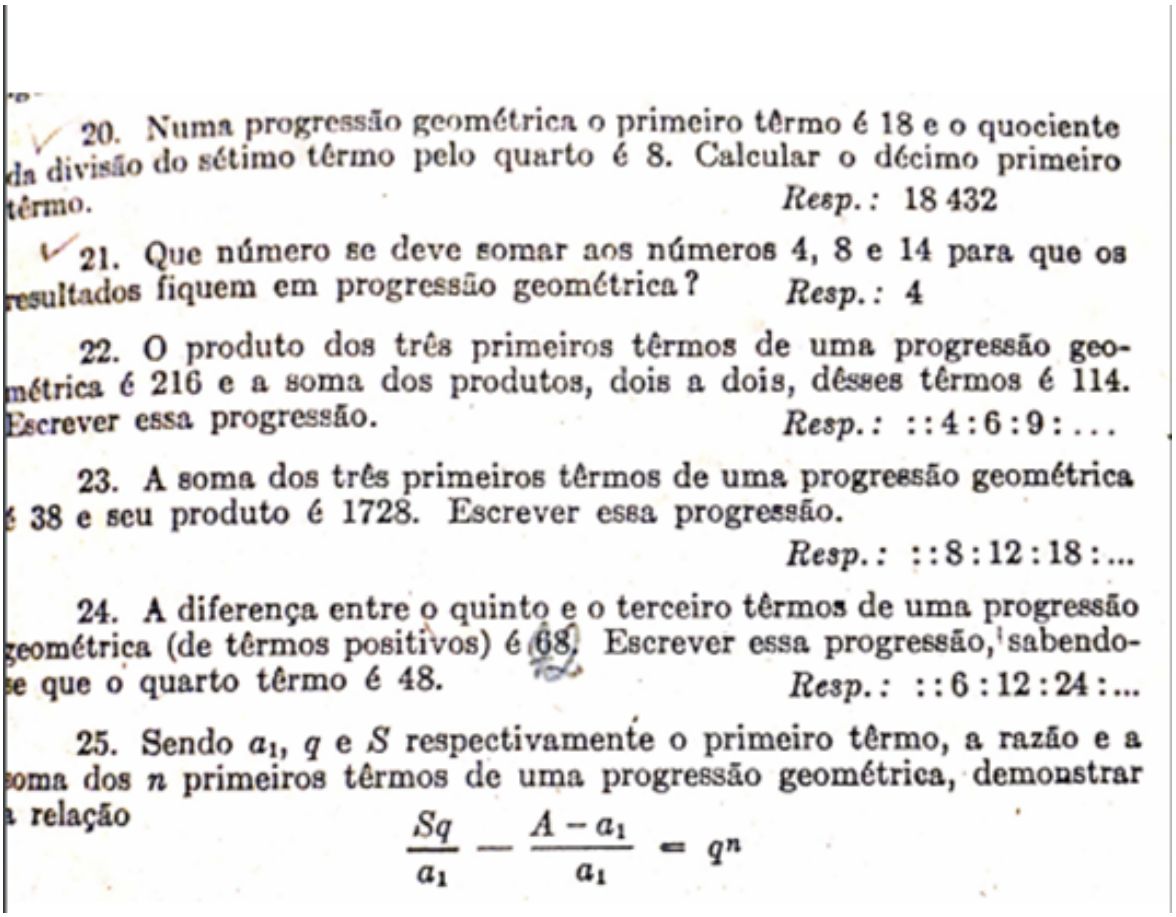
1. Calcular o oitavo têrmo da progressão
$:: 12 : 36 : 108 : \ldots$ R
2. Calcular o décimo têrmo da progressão
$:: 1152 : 576 : 288 : \ldots$ R

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Observe que o exercício 52 é um exercício resolvido. Abaixo observe um exercício 22

para o aluno resolver. Note que para resolvê-lo basta apenas reproduzir como no exemplo acima. Além disso, como o livro cobra a compreensão de demonstrações, as mesmas são requeridas como exercício como é o caso do último problema.

Figura 58 – Exercícios de progressão geométrica



20. Numa progressão geométrica o primeiro têrmo é 18 e o quociente da divisão do sétimo têrmo pelo quarto é 8. Calcular o décimo primeiro têrmo. *Resp.:* 18 432

21. Que número se deve somar aos números 4, 8 e 14 para que os resultados fiquem em progressão geométrica? *Resp.:* 4

22. O produto dos três primeiros têrmos de uma progressão geométrica é 216 e a soma dos produtos, dois a dois, dêsses têrmos é 114. Escrever essa progressão. *Resp.:* ::4:6:9:...

23. A soma dos três primeiros têrmos de uma progressão geométrica é 38 e seu produto é 1728. Escrever essa progressão. *Resp.:* ::8:12:18:...

24. A diferença entre o quinto e o terceiro têrmos de uma progressão geométrica (de têrmos positivos) é 68. Escrever essa progressão, sabendo-se que o quarto têrmo é 48. *Resp.:* ::6:12:24:...

25. Sendo a_1, q e S respectivamente o primeiro têrmo, a razão e a soma dos n primeiros têrmos de uma progressão geométrica, demonstrar a relação

$$\frac{Sq}{a_1} - \frac{A - a_1}{a_1} = q^n$$

Fonte: T. M. Carvalho (1946)

Vale como uma curiosidade é que este livro apresenta a resposta que o discente deve apresentar ao final de cada exercício. Há grande quantitativo de exemplos bem como exercícios ao longo da obra.

• Disposição das definições apresentadas nos conteúdos abordados na obra didática

As definições apresentadas nesta obra estão mais elaboradas, isto é, embora semelhante ao caso anterior de possuir exemplos para complementar a definição, as mesmas vêm precedidas de um tópico chamado preliminares, que são o porquê deste conteúdo e o que o mesmo abrange. Em seguida apresenta a definição com mais riqueza de explicações que no livro anterior. Por fim, finaliza com exemplos e teoremas se for o caso.

- Construção do pensamento algébrico

Para este tópico será analisado se os conteúdos descritos contam com um pensamento algébrico linear ou com interrupções do mesmo pela simples mostra de outro conteúdo. Esta análise será feita de semelhante modo anterior.

Um ponto a saber sobre a construção do pensamento algébrico é observar que o pensamento de quem cursou o curso clássico não era tão linear uma vez que os mesmos não estudavam todos os conteúdos propostos no livro apresentado pois os discentes que estudavam todos os conteúdos estavam inscritos no curso científico. Como por exemplo na figura 46. Podemos notar que o conteúdo de Noção da Função Exponencial e Logaritmo é comum apenas ao curso científico e os conteúdos da teoria de Logaritmo e Resolução das Equações Exponenciais valem para os dois cursos. Assim, por vezes, não há construção linear do pensamento algébrico para os estudantes do curso clássico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa é possível observar que o ensino de cada período, em particular o ensino de álgebra depende das demandas governamentais e sociais de cada período da história. Refletir sobre o ensino da álgebra de um período anterior a nossa vivência nos faz considerar e analisar o contexto com uma visão da presente realidade, uma vez que estamos inseridos em uma demanda social e política e cultural, diferente da analisada. Assim, atender um olhar para o período vigente nos garante estabilidade para discursarmos sobre os diferentes períodos sem perder nosso lugar de fala.

As análises dos livros das décadas de 1930, 1940 e o período atual foram feitas a luz de preocupações referentes ao ensino de álgebra, exigências governamentais subdivididas em critérios para que fosse possível concluir que o ensino algébrico passa por constantes mudanças que dependem essencialmente das prioridades sociais de cada época e de diferentes reflexões sobre o ensino da mesma como por exemplo: O que é importante um estudante aprender, quais conteúdos são prioritários e até como ensinar. Ressaltando que as décadas de 30 e 40 foram marcadas por reformas no meio educacional: as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema, respectivamente, reforçando a ideia de preocupações com a educação recorrentes em cada período.

Os livros didáticos foram proporcionalmente tornando-se mais relevantes ao longo do tempo. Na reforma Francisco Campos temos a livre produção de livros didáticos, na reforma Gustavo Capanema temos a criada CNLD e hoje os livros didáticos nas escolas devem ser aprovados pelo PNLD. Assim, a as análises dos títulos didáticos selecionados são criteriosas a fim de obtermos resultados conclusivos, sem juízo de valor de modo que vejamos as diferenças entre os livros analisados contando com um paralelo entre as décadas remotas e o período vigorante.

O que pode ser notado nas análises dos livros antigos era que nas décadas de 1930 e 1940, vemos uma prática de padronização da álgebra, como por exemplo dizer quais letras usar para incógnita, variável, reta ou ponto. Além de tópicos exclusivos de regras como: regras para determinar máximos e mínimos ou regras para verificar quando uma função é crescente ou decrescente. Hoje podemos ver textos mais contextuais, e sem tanta necessidade de padronização, uma vez que mudaram-se os interesses políticos e discussões sociais.

Como pesquisadora, espero poder analisar mais livros para obter maior visão das práticas analisadas mencionadas acima e futuramente construir outro trabalho semelhante analisando outras décadas com a mesma iniciativa de investigar sobre o ensino de álgebra através da história no Brasil.

Obtive como aprendizado a percepção das mudanças do ensino de álgebra e como

a matemática pode sofrer alterações ao longo do tempo, além disso, fazer reflexões da história mesmo com o nosso período sendo distante e divergente, faz nos pesquisar a fim de conhecer mais nossa prática de trabalho.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Elizabeth Adorno de. Ensino de Álgebra e Formação de Professores. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 10, n. 2, ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/1740/1130>. Acesso em: 26 jan. 2019. P.1-16, mar. 2009.

BRASIL, 1997, Parâmetro Curricular Nacional (PCN) introdução aos PCN'S. Disponível em: <https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-01-introducao-aos-pcns.pdf>. Acessado em: 13 MAR 2019.

BRASIL, 1998, Parâmetro Curricular Nacional (PCN) Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental, Brasília, DF. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf acessado em: 13 MAR 2019.

BRASIL, 2000, Parâmetro Curricular Nacional (PCN) CIÊNCIAS DA NATUREZA, MATEMÁTICA E SUAS TÉCNOLOGIAS, Brasília, DF, disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acessado em 13 MAR 2019.

BRASIL, 2000, Parâmetros Curriculares Nacionais (ENSINO MÉDIO) , Brasília, DF, disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acessado em: 13 MAR 2019.

BRASIL, LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Brasília, DF. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm acessado em: 13 MAR 2019 BRASIL, LEI 13-005-2014, Plano Nacional de Educação. Disponível em: http://pne.mec.gov.br/18-planos-subnacionais-de-educacao/543-plano-nacional-de-educacao-lei-n-13-005-2014. Acessado em: 13 MAR 2019.

BRASIL, DECRETO Nº 19.890, de 18 de ABRIL de 1931 - Publicação Original, Brasília, DF. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html. Acessado em: 13 FEV 2019.

BRASIL, DECRETO Nº 4.244, de 9 de ABRIL de 1942, lei orgânica do ensino secundário. Brasília, DF. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/1937-1946/Del4244.htm acessado em: 13 FEV 2019.

CAMPELO, C. L. F. REFORMA CAPANEMA E REFORMA MENDONÇA FILHO: PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES. In: **VIII Jornada Internacional de Políticas Públicas**, 2017. Universidade Federal do Maranhão, Programa de pós-graduação em políticas públicas p. 1-10, 2017.

CÂNDIDO, T. PATRÍCIA. Comunicação em Matemática: Ler, escrever e resolver problemas. **Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CAPELLO, D. F. R. Do Curso Complementar aos Cursos Clássico e Científico: a organização dos ensinos de Matemática como uma disciplinar escolar. In: VI Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação, 2006, Uberlândia. **VI Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação:** percursos e desafios da pesquisa e do ensino de História da Educação. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, p. 171-172, 2006.

CARVALHO, D.; CARNEIRO, R.l; MARTINS, H. F. A.; SARTORATO, E. **Pesquisa Bibliográfica**. Goiânia, 16 jun. 2004. Disponível em: http://pesquisabibliografica.blogspot.com.br. Acesso em 02 FEV 2019.

CARVALHO, T. M. **matemática para os cursos clássico e científico**, companhia editora nacional. vol 2, Rio de Janeiro, 1946.

CARGA HORÁRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. Disponível em: http://www.fito.edu.br/arquivos/Ensino-Fundamental.pdf. Acessado em: 12 MAR 2019.

CARGA HORÁRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. Disponível em: http://www.fito.edu.br/arquivos/Ensino-Medio-Basico.pdf. Acessado em: 12 MAR 2019.

DALLABRIDA, Norberto. **A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário**. Artigo. Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5520, Rio Grande do Sul. Acessado em: 24 JUN 2018. p: 185-191, 2009.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas/SP: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em educação matemática), 1996.

D'AMBROSIO, B. S. (1989) COMO ENSINAR MATEMÁTICA HOJE? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. P. 15-19,1989

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e Aplicações**,vol. 1, Rio de Janeiro: Editora Ática,2017.

DASSIE, B.A. **Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil**. Tese de Doutorado, Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DASSIE, B. A.; CARVALHO, J. B. P. F. Euclides Roxo: Engenheiro, Professor, Intelectual e Educador Matemático. In: **BOLEMA**, Rio Claro – SP, v. 23, n. 35A, p: 1-22, abr. 2010.

DASSIE, B. A. A Comissão Nacional do Livro Didático Após 1945 e os Livros de Matemática Aprovados Para Uso no Ensino Secundário. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, nv.47, ISSN: 1676-2584, p.88 -107, Set.2012.

DIVISÃO DO SISTEMA EDUCACIONAL BRASILEIRO. Disponível em: https://www.politize.com.br/sistema-educacional-brasileiro-divisao. Acessado em: 12 MAR 2019.

EDUCAÇÃO BÁSICA PÚBLICAÇÕES. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acessado em: 14 MAR 2019.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. Â., MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar. a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas - SP, v4(1); p 78-91, 1993.

F.T.D. Pontos de Álgebra. Rio de janeiro: Livraria Francisco Alves, 1933.

GERHARDT, T. E. e SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. EAD graduação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre., 2009

GIL, K.H. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Ciência Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio grande do sul. Rio Grande do Sul, 2008.

JACOMELLI, K.Z. **A Linguagem Natural e a Linguagem Algébrica**. Dissertação de

mestrado, Programa de Pós-graduação em educação científica e tecnológica universidade federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO COMPLETA 20 ANOS. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/43311-lei-de-diretrizes-e-bases-da-educacao-completa-20-anos-e-continua-atual. Acessado em 12 MAR 2019.

LIMA, T. C. S. e MIOTO, R. C. T., Procedimentos Metodológicos na Construção do Conhecimento Científico: A Pesquisa Bibliográfica. **Rev. Katál**. Florianópolis v. 10 n. esp. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). p.37-45, 2007.

Lins, R.C.; Gimenez, J. **Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas/SP: Papirus, 1997.

MASSUIA, C. S, **AS MUDANÇAS PROVOCADAS PELA REFORMA DE GUSTAVO CAPANEMA NA ERA VARGAS** - Publicado em 07 FEV 2010 disponível em web artigos, acessado em 11 OUT 2018.

OLIVEIRA, S. C. ; LAUDARES, J. B. . Pensamento Algébrico: Uma relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria. In: **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**, 2015, São João Del Rei. Práticas Educativas e Pesquisas em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFJF, v. 1. pp. 1-12, 2015.

PEREIRA, R. S. AS REFORMAS EDUCACIONAIS DO SÉCULO XX E A DISCIPLINA LÍNGUA PORTUGUESA ENTRE O ENSINO CLÁSSICO E O MODERNO VIII JORNADA DO HISTEDBR - História Sociedade e Educação no Brasil. 2008. (Encontro). p. 1-20, 2008.

PINTO, N.B. Marcas e Implicações da Matemática Moderna nas Práticas Escolares. **Revista Educação e Linguagem** (Online). V.5, n.16 Santa Catarina universidade federal de Santa Catarina, p. 1-15, 2005.

PNE EM MOVIMENTO, disponível em: http://pne.mec.gov.br/, por: ministério da educação. Acessado em: 18 JUN 2018.

PONTE, J. P., at. al. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC, 2007.

REVISTA ELETRÔNICA disponível em: http://www.helb.org.br/index.php?option=com_content&view=article&id=88:a-reforma-francisco-de-campos&Itemid=2. Acessado em: 13. AGO. 2018.

REVISTA ELETRÔNICA disponível em: http://www.helb.org.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13:francisco-campos&catid=1072:1891&Itemid=2. Acessado em: 13. AGO. 2018.

REVISTA ELETRÔNICA disponível em: http://www.helb.org.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13:francisco-campos&catid=1072:1891&Itemid=2. Acessado em: 13. AGO. 2018.

RIBEIRO, A. J. A Álgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores. Universidade Federal do ABC (UFABC), **XIV CIAEM-IACME**, Chiapas, México, 2015; p. 1-9.

ROMANELLI, O. História da educação no Brasil 1930-73. Petrópolis, Vozes, 1978; ARANHA, M.L.A. História da Educação. São Paulo, Moderna, 2002.

ROXO, E. G. Mathemática elementar. volume II. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1931.

Sá-SILVA, J. R., ALMEIDA C.D., GUINDAN, J. F. (2009). Pesquisa Documental: Pistas Teóricas e Metodológicas. **Revista Brasileira de História & Ciências Sociais**, Ano I - Número I - Julho de 2009. www.rbhcs.com. ISSN: 2175-3423. pp.1-15.

SANTOS, B. P.; A Etnomatemática e Suas Possibilidades Pedagógicas: Algumas Indicações. In: Ribeiro, J. P. M, Domite, M. do C. S, Ferreira, R. (Org.). **Etnomatemática:** papel valor e significado. 1ed.São Paulo: Zouk, 2004, v., p. 203-218.

SANTOS, L. G. Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo, Espirito Santo, 2007.

SCHWARTZMAN, S.; BOMENY, H.M.B. & COSTA, V.M.R. Tempos de Capanema. 2ª Edição. Fundação Getúlio Vargas e Editora Paz e Terra, 2000.Arquivo Gustavo Capanema, and Simon Schwartzman. 1983. Estado Novo, um auto-retrato: Arquivo Gustavo Capanema. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

SILVA, J. **O ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL:** DIFICULDADES E DESAFIOS. Monografia de especialização, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Especialização em ensino de ciências. 2013.

SILVA SOUZA, S. C. O Curso Fundamental da Reforma Francisco Campos: Um Olhar Sob as Instruções Pedagógicas do Programa de Matemática de 1931. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, n.46, ISSN: 1676-2584 p. 325-346, jun 2012.

SORTISSO, A. F. Considerações Iniciais de Uma Professora em Formação Sobre o Ensino da Álgebra. **Revista da Graduação**, Rio Grande do Sul, Vol. 4 No. 2, p. 1-11, 2011.

SOUSA, E. K. V.; FOSSA, J. A. Júlio César de Mello e Souza e a Educação Matemática. In: II Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, Bauru, SP. **Anais do II Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática**, 2014. v. II, 2014.

TELO, R. M. **AS COMISSÕES AVALIADORAS DE LIVROS DIDÁTICOS ENTRE 1938 E 1971 NO BRASIL**, Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, rio de Janeiro, 2017.

TELO, R. M. e SCHUBRING, G. A Comissão Nacional do Livro Didático e a Avaliação dos Livros de Matemática Entre 1938 e 1969. **Revista Brasileira de História da Educação**, 18(48). DOI: http://dx.doi.org/10.4025/rbhe.v18.2018.e014. p.1-27, 2018 ZOTTI, S. A. (2006) O ensino secundário nas reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema: um olhar sobre a organização do currículo escolar. In: Anais do IV congresso brasileiro de história da educação. Universidade católica de Goiás, Goiânia.