Instituto Federal do Rio de Janeiro

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

João Vitor Mattos da Silva

CRÍTICA DA DIDÁTICA FORMALIZADA DE HILBERT DA GEOMETRIA DE EUCLIDES

Volta Redonda

2019

João Vitor Mattos da Silva

CRÍTICA DA DIDÁTICA FORMALIZADA DE HILBERT DA GEOMETRIA DE EUCLIDES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Carlos Roberto Teixeira Alves
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2019

Silva, João Vitor Mattos

S586c Crítica da didática formalizada de Hilbert da geometria de Euclides/João Vitor Mattos Silva. - - RJ: Volta Redonda, 2019.

49f.: il.

Orientador: Profº D.r Carlos Roberto Teixeira Alves

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2019.

1.Geometria - História. 2. Geometria – Ensino. 3. David Hilbert .I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Alves, Carlos Roberto Teixeira.III. Título

CDU 514

João Vitor Mattos da Silva

CRÍTICA DA DIDÁTICA FORMALIZADA DE HILBERT DA GEOMETRIA DE EUCLIDES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 03 de Julho de 2019

Banca Examinadora

Prof^{o} Carlos Roberto Teixeira Alves, Ph.D.
Orientador/IFRJ

Prof^{o} André Vinicius Dias Senra, Ph.D.
Membro Interno/IFRJ

Rafael da Silva Lima

Prof^{o} Rafael da Silva Lima, M.Sc.
Membro Interno/IFRJ

Roberta Fonseca dos Prazeres.

Prof^{a} Roberta Fonseca dos Prazeres, M.Sc.
Membro Interno/IFRJ

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me proporcionar a oportunidade de ter a vida que tenho.

A minha família, por me dar todo suporte e condições para que pudesse ingressar e concluir este curso sem me preocupar.

Ao professor Carlos, por aceitar me orientar nesta dissertação e por suas instruções, que sempre foram de extrema importância.

À professora Roberta, pela ajuda no início deste trabalho com orientações em relação a pesquisa e a formatação.

Aos colegas e professores que fizeram parte desta caminhada.

Aos professores André, Rafael e Roberta por avaliarem este trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a história da geometria. Com intenção de compreender os acontecimentos que motivaram o novo modelo de ensino de geometria que se disseminou pelo Brasil com o Movimento da Matemática Moderna(MMM). De forma bibliográfica buscaremos informações que nos mostrem a importância da geometria para o desenvolvimento matemático, apresentando os *Elementos* de Euclides, sua não alteração por 2 milênios até o século XIX e posteriormente o trabalho do matemático David Hilbert com sua nova axiomatização para a geometria. Com a produção deste trabalho temos um material dedicado a professores, mostrando a motivação do novo modelo de ensino da geometria pelo MMM, no Brasil, e a história da geometria.

Palavras-chave: História da Geometria. Ensino de Geometria. David Hilbert.

ABSTRACT

This work presents a study on the history of geometry. With the intention to understand the events that motivated the new model of geometry teaching that was disseminated by Brazil with the Movement of Modern Mathematics (MMM). In a bibliographical way, we will seek information that shows us the importance of geometry for mathematical development, presenting Euclid's textit Elements, its non-alteration for 2 millennia until the 19th century and later the work of the mathematician David Hilbert with his new axiomatization for the geometry. With the help of this article we have a material dedicated to teachers, showing a new motivation for the teaching of geometry by the MMM in Brazil, and a history of geometry.

Keywords:History of Geometry. Geometry Teaching. David Hilbert.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO **1**

2 – IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA **4**

2.1 TALES DE MILETO 4

2.2 PITÁGORAS DE SAMOS 5

2.3 PARMÊNIDES, ZENÃO E OS ELEATAS 8

2.4 PLATÃO E A ACADEMIA 9

2.5 EUDOXO DE CNIDO 10

2.6 ARQUIMEDES DE SIRACUSA 12

3 – EUCLIDES DE ALEXANDRIA E SEUS ELEMENTOS **14**

4 – A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA **21**

4.1 AS NOVAS GEOMETRIAS 21

4.2 PRÉ DESCOBRIMENTO 21

4.3 DESCOBRIMENTO 24

4.4 CONSEQUÊNCIAS 26

5 – DAVID HILBERT **29**

5.1 VIDA 29

5.2 GRUNDLENGEN DER GEOMETRIE 30

CONSIDERAÇÕES FINAIS **35**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **37**

Apêndices **39**

APÊNDICE A–A EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA **40**

A.1 IDADE MÉDIA 40

A.2 DO RENASCIMENTO AO CÁLCULO 40

A.3 SÉCULO XVIII ADIANTE 47

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo o homem, como ser racional, evoluiu e desenvolveu ferramentas para ter ao seu dispor. Uma dessas ferramentas é o desenho, que acompanha a humanidade desde épocas anteriores à fala. Esses desenhos primitivos são chamados de pinturas rupestres, sendo a mais antiga datada do período Paleolítico Superior, aproximadamente 40 000 a.E.C., gravadas em cavernas ou rochas. Desenhar, portanto, é algo de grande importância para o homem e, além disso, hoje podemos dizer que o homem evoluiu também suas ferramentas e, neste caso, os desenhos.

Quando associamos desenhos à Educação brasileira, percebemos que o desenho está presente logo no início da vida escolar das crianças. O desenho para a educação matemática, de forma mais específica, é chamado de Construções Geométricas, presente em diversos currículos escolares, tendo a cada período maior ou menor importância, conforme os objetivos traçados. Porém Autores com Lorenzato(1995), Pavanelo(1993) e Peres(1991), apontam que "a geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula". Dentro deste contexto os autores atribuem uma parcela de culpa ao Movimento da Matemática Moderna(MMM). Lorenzato(1995) afirma que antes da chegada do movimento no Brasil, o ensino geométrico era de cunho lógico-dedutivo, com demonstrações; e que o movimento veio com uma nova proposta, de algebrizar a geometria que acabou por falhar, porém obtendo "exito"em eliminar o modelo anterior, deixando uma lacuna que perdura até os seus dias.

Movimento que teve suas origens filosóficas após a segunda guerra mundial, como diz Lopes(1994):

> Após a Segunda Guerra Mundial houve um intenso desenvolvimento tecnológico, fundamentado no conhecimento científico, e que determinou uma reformulação no ensino de Ciências em todos os níveis. De uma reunião, em que estavam presentes matemáticos e políticos, na Organização Europeia de Cooperação Econômica, em 1959, veio a solução: a reformulação do currículo de Matemática, que implicaria na reformulação do ensino científico, como desejavam os políticos. Como, à época, a visão de Matemática que estava em voga era a estruturalista, pautada nos trabalhos de Bourbaki[1], esta foi a inspiração para o novo currículo. (LOPES, 1994, p.100)

Visto ao ponto político e científico em que o mundo se encontrava, momento chamado de Guerra Fria, onde os Estados Unidos da América e a, extinta, União Soviética travavam uma luta armamentística, tecnológica e ideológica, a educação matemática não se parecia compatível. Segundo Novaes, Pinto e França(2008):

[1] Nicolas Bourbaki, pseudônimo de um grupo de matemáticos, quase todos franceses, que se reuniu para escrever um tratado de Análise e acabou por reorganizar boa parte da matemática desenvolvida até então, tomando como princípios a unidade da matemática, as estruturas-mães (algébricas, topológicas e de ordem) e o método axiomático

> Para tanto, reconhecendo que a matemática escolar estava defasada em seus conteúdos e métodos, constataram que numa era espacial não era admissível as escolas continuarem ensinando conceitos elaborados há cinco séculos atrás. Era urgente a reestruturação de seus programas e métodos de ensino, introduzindo uma nova linguagem e principalmente uma nova estrutura ao *corpus matemático* utilizado para a escolarização da população. A primeira iniciativa dos matemáticos de vários países foi desencadear um movimento de grande porte com a finalidade de modernizar a matemática escolar. A teoria que orientaria essa proposta revolucionária seria a Teoria de Conjuntos e a ideia central que a fundamentava era o conceito de estrutura, conceito que na época era discutido e assumido por diferentes áreas de conhecimento.(Novaes, Pinto e França; 2008; p. 3351)

Forma estruturalista utilizadas por Bourbaki. Retornando a geometria, que foi afetada pelo movimento, buscaremos neste trabalho encontrar na história da matemática, em especial da geometria, a evolução da geometria para entendermos essa mudança no ensino. Partiremos da importância da geometria, para então sermos apresentados aos *Elementos* de Euclides, o grande clássico Grego da geometria, escrito aproximadamente 300 anos antes da era cristã, que segundo Barker(1969) é um dos clássicos que mais influenciou o pensamento ocidental, desde sua escritura, passando pela Idade Média, pelo período moderno e até no século XIX, sendo não apenas um livro sobre geometria, mas o modelo daquilo que deveria ser o pensamento científico.

Estudando mais a fundo a obra *Elementos* e a geometria Euclidiana, podemos nos deparar com diversificados casos históricos, desde a sua "completude"e grande utilização, tendo como ápice de aplicação com a geometria Descritiva de Gaspar Monge[2], até ao problema do quinto postulado que, no século XVIII, culminou na obtenção das geometrias não Euclidianas, fruto dos trabalhos de Lobachesvisky, Bolya, Gauss, Riemann entre outros. Percebemos também que nos séculos XIX e XX houve um exame dos fundamentos e da estrutura lógica da matemática, acarretando assim um estudo minucioso e intensivo na geometria Euclidiana, surgindo então novos conjuntos de postulados logicamente satisfatórios para embasar a geometria Euclidiana.

Dentre os estudiosos que se debruçaram a buscar os conjuntos satisfatórios de postulados podemos citar M. Pasch, G. Peano, M. Piere, D. Hilbert, O. Veblen, E. V. Huntington, G. B. Birkhoff e L. M. Blumenthal. Dentre estes matemáticos comentaremos o conjunto proposto por David Hilbert, presente no *Grundlangen der Geometrie*, que segundo Eves(2011) juntamente com o material de Birkhoff foram os mais utilizados desde a década de 1950 na tentativa de produção de material de nível médio a partir das bases populacionais e com seu novo padrão de rigor.

[2] Segundo Eves(2011), Monge(1746-1818) desenvolveu a geometria Descritiva ao ser designado a desenhar uma planta de um forte, solucionando o problema, resolvido na época de forma aritmética, de forma geométrica; consistia em uma representação de objetos tridimensionais em um plano bidimensional, sendo adotado pelos militares e considerado segredo absoluto. Pode-se encontrar maiores explanações sobre o trabalho de Monge em *Gaspar Monge e a Sistematização da Representação na Arquitetura*, de Eliane Panisson

A escolha do tema se deu pelo contado com 3 matérias específicas do curso de graduação em matemática. Foram elas: Filosofia da Matemática, História da Matemática e Construções Geométricas. Com essas matérias ficou clara a importância da matemática Grega para o desenvolvimento da matemática atual, gerando assim mais estudos sobre a mesma.

Quanto à organização deste trabalho, iremos dividi-lo em cinco Capítulos. No primeiro, há a introdução do trabalho. No segundo, mostraremos a importância da geometria para a matemática. No terceiro iremos caracterizar o livro *Elementos* e mostrar sua inalteração até o século XIX. No quarto comentaremos sobre a descoberta das geometrias não Euclidianas, que acabaram por mostrar as deficiências dos *Elementos*. No quinto apresentaremos a axiomatização de Hilbert da geometria Euclidiana.

2 IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA

Queremos mostrar, neste capítulo, a importância da geometria para a matemática. Então, teremos de ter uma perspectiva diferente da geometria, pois quando falamos de geometria normalmente pensamos nas formas geométricas e nas construções. Contudo, devemos olhar através disto. Devemos buscar as características e resultados geométricos que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento da matemática.

Como referências históricas da matemática iremos utilizar os livros de Eves(2011), Boyer(1974), Roque e Carvalho(2012) e Mol (2013).

2.1 Tales de Mileto

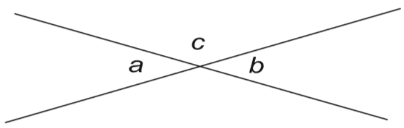
Podemos abordar a história da geometria nos remetendo, primeiramente, a Tales de Mileto(640? - 564? a.E.C), que é o primeiro nome ao qual são associadas descobertas matemáticas. Segundo Eves(2011), a tradição à geometria demonstrativa começou com Tales, um dos "sete sábios"da antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.E.C. Este período, que foi conhecido por idade do Ferro, trouxe consigo inovações como a invenção do alfabeto, a introdução das moedas e o aparecimento de novas civilizações que, numa crescente atmosfera de racionalismo, começaram a indagar "como"e "por quê". Por esses fatores podemos ter uma ideia do porque o nome de Tales foi tão marcante na história.

A Tales são creditados os seguintes resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculos em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente, então esses triângulos são iguais.

A grande importância desses resultados não são sua existência, mas sim a crença de que Tales as obteve adotando uma série de raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentos. Podemos então observar o possível início do pensamento lógico e formal, que obedeceria a determinado rigor da época. Por exemplo, o resultado elementar 3 que diz que ângulos opostos pelo vértice são iguais. Para o povo pré-helênico essa igualdade era considerada tão evidente que para tirar qualquer dúvida sobre ela, bastaria recortar os ângulos e superpor um ao outro. Porém, acredita-se que Tales primeiramente estabeleceu a igualdade dos ângulos a e b por raciocínio lógico, de forma próxima aos feitos hoje, exposto em Eves(2011):

Figura 1 – Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: Eves (2011, p. 95)

Na Figura 1, a soma do ângulo a com o ângulo c é igual a um ângulo raso; o mesmo acontece com a soma dos ângulos b e c. Como todos os ângulos rasos são iguais, então o ângulos a é igual ao ângulos b (subtraindo-se iguais de iguais, então as diferenças são iguais). Estabelecendo assim a demonstração da igualdade dos ângulos a e b por uma curta série de raciocínio lógico dedutivo, tendo como base princípios mais básicos.

Buscando mostrar a importância da geometria para a matemática acabamos de ver que supostamente o início do pensamento lógico demonstrativo, fugindo das respostas puramente intuitivas tiveram início com das demonstração de Tales em objetos geométricos.

2.2 Pitágoras de Samos

O próximo nome que surge na história da matemática é de Pitágoras de Samos(572?-*** a.E.C.), que fundou em Crotona na Itália, a Escola pitagórica, que segundo Eves(2011) além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. De acordo com Eves(2011):

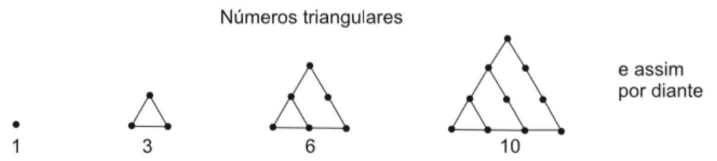
> A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das varias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedade dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagóricos. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *Quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada (EVES, 2011, p. 97)

Um dos costumes dos pitagóricos era de atribuir todas as suas descobertas ao fundador da Escola, Pitágoras. Por isso, iremos atribuir os feitos a seguir a Pitágoras e aos pitagóricos.

A eles é creditado os passos precursores no desenvolvimento da teoria dos números, dado suas relações filosóficas com os números. Também são atribuídos a eles os números amigáveis, perfeitos, deficientes e abundantes. Caracterizando cada grupo, dizemos que dois números são amigáveis caso cada um deles seja igual a soma dos divisores próprios do outro. Perfeitos se o número é igual à soma dos seus divisores próprios, deficiente se excede a soma de seus divisores próprios e abundante se é menor que a soma de seus divisores próprios.

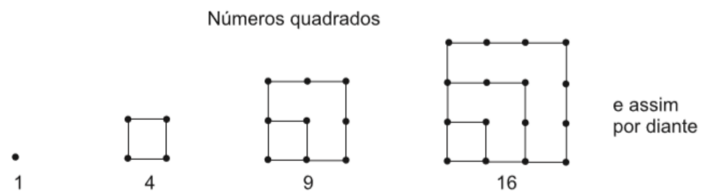
E sendo uma ligação entre a geometria e a aritmética, os números figurados, que são mais uma classificação dos números que expressam o número de pontos de certas configurações geométricas. Ilustrando esses números temos as figuras 2,3 e 4.

Figura 2 – Números Triangulares.



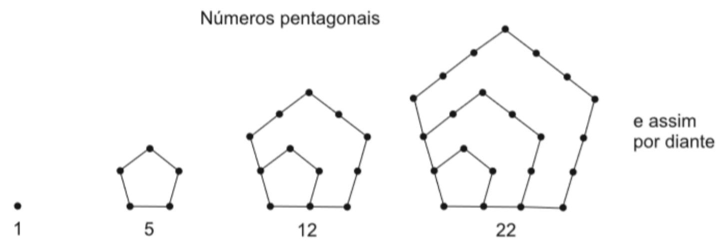
Fonte: Eves (2011, p. 100)

Figura 3 – Números quadrangulares.



Fonte: Eves (2011, p. 101)

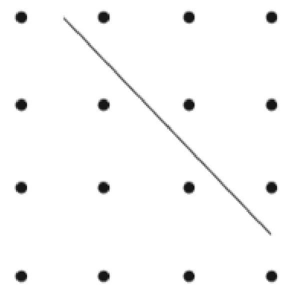
Figura 4 – Números pentagonais.



Fonte: Eves (2011, p. 101)

Alguns teoremas podem ser obtidos com as classificações do números figurados, de forma puramente geométrica. Por exemplo, há o Teorema I, que diz que todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos. Verificamos que um número quadrado qualquer pode ser dividido, como na Figura 5.

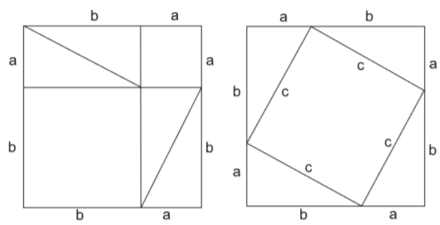
Figura 5 – Divisão dos números quadrangulares.



Fonte: Eves (2011, p. 101)

Aos pitagóricos também é associada a descoberta das grandezas incomensuráveis. O número $\sqrt{2}$, por exemplo, pode ter sido obtido de duas formas distintas. Por exemplo, através da média geométrica entre a unidade e duas vezes a unidade, neste caso, $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$. Assim, a unidade e o número obtidos são incomensuráveis, logo não existe uma unidade básica a partir da qual ambos podem ser obtidos como múltiplos inteiros. Ou pode ter sido obtido ao se calcular a diagonal do quadrado de lado 1, pelo conhecido Teorema de Pitágoras, que diz que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados sobre os catetos. Segundo Eves(2011), este teorema já era conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. Encontramos a demonstração por decomposição do Teorema de Pitágoras em Eves(2011) da seguinte forma, ilustrada na Figura 6:

Figura 6 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por decomposição.

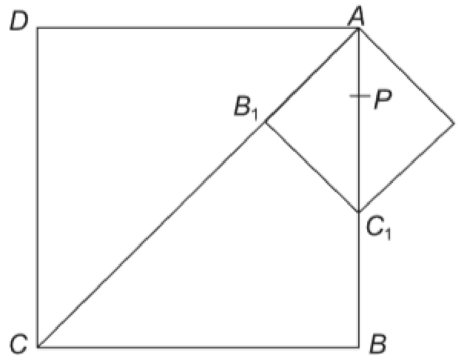


Fonte: Eves (2011, p. 103)

Tal descoberta gerou surpresa e perturbação entre os pitagóricos, devida a sua filosofia que determinava que tudo dependia dos números inteiros e pela visão de que toda grandeza poderia ser expressa por números racionais. Vejamos uma demonstração, encontrada em Eves(2011), da irracionalidade de $\sqrt{2}$, mostrando que um lado e uma diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

Suponhamos o contrário. Isso implica, então, a existência de um segmento AP (ver Figura 7) tal que tanto a diagonal AC como o lado AB do quadrado $ABCD$ são múltiplos inteiros de AP. Isto é, AC e AB são comensuráveis com relação a AP. Em

Figura 7 – Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.



Fonte: Eves (2011, p. 106)

AC tomemos o ponto B_1 de modo que $CB_1 = AB$ e tracemos B_1C_1 perpendicular a CA. Pode-se provar facilmente que $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. Então $AC_1 = AB - AB_1$ e AB_1 são comensuráveis com relação a AP. Mas AC_1 e AB_1 são uma diagonal e um lado de um quadrado de dimensões menores que a metade daquelas do quadrado original. Segue-se então que, repetindo-se o processo, podemos obter finalmente um quadrado cuja diagonal AC_n e cujo lado AB_n são comensuráveis com relação a AP e $ACn < AP$. Esse absurdo prova o teorema.

A descoberta dos incomensuráveis não só confrontou os pitagóricos em relação a sua filosofia como também invalidou sua teoria geral das figuras semelhantes, pois assumindo duas grandezas similares quaisquer como comensuráveis, faziam com que toda a sua teoria das proporções se limitasse aos comensuráveis. Esse problema foi resolvido mais tarde por Eudoxo, como afirma Eves (2011):

> Por volta de 370 a.E.C., o "escândalo"fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872. (EVES, 2011, p. 107)

Além de encontrar os incomensuráveis, que iam em direção oposta com sua filosofia, os pitagóricos deram aos eleatas um grande argumento em seus debates.

2.3 Parmênides, Zenão e os eleatas

Os eleatas eram, assim como os pitagóricos, membros de uma escola filosófica, porém eram seguidores de Parmênides de Eleia (viveu por volta de 450 a.E.C). Os eleatas, tendo sua base na unidade e permanência do ser, divergiam dos pitagóricos quanto à filosofia de multiplicidade e mudança. Para eles, trabalhar com os números incomensuráveis era algo a se fazer, e encontramos em Mol (2013) um comentário sobre os trabalhos dos eleatas com os números incomensuráveis:

> A descoberta das grandezas incomensuráveis revelou a existência de grandezas contínuas, de natureza geométrica, como comprimentos, áreas e volumes, que não podiam ser concebidos como coleções discretas de unidades. Os eleatas tentaram incorporar tais grandezas ao universo matemático ao considerá-las como compostas por uma coleção infinita de objetos muito pequenos. Nesse contexto, a noção de infinito fez sua estreia na matemática grega. Surgiu a semente de uma ideia que, séculos mais tarde, teria papel fundamental no desenvolvimento do conceito de continuidade e da teoria do cálculo diferencial e integral. (MOL, 2013, p. 35)

Dentre os seguidores de Parmênides, podemos citar Zenão de Eleia (c. 450 a.E.C) que, através dos seus paradoxos, mostrou a dificuldade lógica de ambas as escolas da época. Segundo Eves (2011) esses paradoxos, que tiveram influência profunda na matemática, garantem que, admitindo-se qualquer das suposições, o movimento é impossível. Frente ao pensamento dos eleatas com suas noções de infinito e contínuo, foi proposto o *Paradoxo da Dicotomia*.

A Dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

E contra o pensamento dos pitagóricos, com sua filosofia finita e discreta, foi proposto o *Paradoxo da flecha*.

A Flecha: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Em relação aos paradoxos de Zenão, Mol (2013) afirma que seus argumentos são provavelmente o primeiro exemplo de demonstração por redução ao absurdo. Essa técnica é utilizada amplamente no campo matemático desde sua época até os dias atuais para demonstrar diversas questões matemáticas.

2.4 Platão e a Academia

Passando para o próximo personagem da história da matemática chegamos a Platão (427 – 347 a.E.C.). Este foi um dos filósofos de seu tempo com grande participação no desenvolvimento filosófico e científico. Nascido em Atenas, fora aprendiz de Sócrates ali mesmo. Posteriormente, partiu em uma longa jornada à procura do saber, retornando, por volta de 387 a.E.C., e fundando sua famosa Academia.

A Academia introduziu Platão na história da matemática, pois a ele não é atribuída nenhuma descoberta, mas sim por suas convicções quanto à importância do estudo da matemática que auxiliava o treinamento do espírito. Sendo assim, foi algo de extrema importância a ser semeado pelos filósofos e governantes. Justificando o lema fixado na entrada da Academia: Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria. Desta forma, podemos perceber que a matemática, de fato, era muito importante a Platão.

É associado a ele o que poderia ser tratado como a tentativa inicial concreta de uma filosofia da matemática. Reforçando sua importância para a matemática, segundo Eves(2011), quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.E.C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, fazendo da Academia o elo da matemática dos pitagóricos mais antigos com a da posterior e duradoura escola de Alexandria.

2.5 Eudoxo de Cnido

Segundo Boyer (1974), a obra de Eudoxo de Cnido(408 - 355 a.E.C.) foi tão significante que cabe a ele a palavra "reforma". Como mencionado anteriormente, Eudoxo resolveu o problema gerado com a descoberta dos incomensuráveis no que se refere a razões e proporções que os gregos já usavam. Aparentemente a ideia de proporção entre quatro grandezas para os gregos era dada por $a : b = c : d$, se as duas razões $a : b$ e $c : d$ têm a mesma subtração mútua. Isto seria o mesmo que dizer que em cada razão a quantidade menor cabe igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes, e assim por diante.

Essa definição é inconveniente e o grande feito de Eudoxo foi descobrir a teoria de proporções. Esse enunciado também é conhecido como "axioma de Arquimedes", uma propriedade que Arquimedes atribuiu a Eudoxo. O conceito ainda exclui o zero e esclarece quanto as ordens a serem comparadas. Uma área, por exemplo, não pode ser comparada em termos de razão com um segmento de reta, nem com um volume. Encontramos em Boyer (1974) uma citação de Heath em relação a definição de Eudoxo:

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente. (Heath, 1981, vol. 2, p.114)

Isto é, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$, ou se $ma > nb$, então $mc > nd$.

Continuando com os feitos de Eudoxo, podemos citar o método de exaustão, desenvolvido para estabelecer um método de comparação entre figuras curvas e retilíneas. Um dos problemas que se enquadra neste quesito é um dos três problemas clássicos, neste caso a quadratura do círculo. Para resolver isto, outros matemáticos já teriam proposto a construção inscrita e circunscrita de polígonos em figuras curvilíneas, multiplicando indefinidamente o número de lados. Porém o argumento não tinha fim, pois não conheciam o conceito de limite.

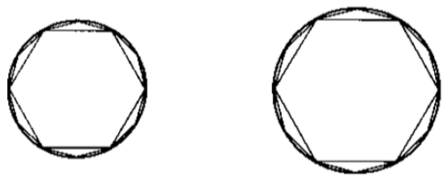
Contudo aplicando uma redução por absurdo no axioma de Eudoxo (ou Arquimedes), a prova de uma proposição da base do método de exaustão grega fica simples, da maneira a seguir encontrada em Boyer(1974):

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1974, p. 63)

Reescrevendo de forma moderna, teríamos: se M é uma grandeza dada, ϵ uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que, $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \epsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto equivale a dizer que $\lim\limits_{n \to \infty} M(a-r)^n = 0$. Encontramos uma exemplo da aplicação do método com uma notação moderna em Boyer (1974):

Sejam c e C os círculos, com diâmetros d e D e áreas a e A. Queremos provar que $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. A prova estará completa se procedermos indiretamente, mostrando que não são verdadeiras as outras duas possibilidades, isto é, $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ e $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. Suponhamos pois o primeiro que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. Então existe uma grandeza $a' < a$ tal que $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

Figura 8 – Ilustração método de Exaustão.



Fonte: Boyer (1974, p. 68)

Seja $a - a'$ a grandeza prefixada $\epsilon > 0$. Vamos inscrever nos círculos c e C polígonos regulares de áreas p_n e P_n com o mesmo número n de lados, e consideremos as áreas intermediárias, fora dos polígonos mas dentro dos círculos(Figura 8). Se dobrarmos o número de lados é evidente que estaremos subtraindo dessas áreas intermediárias mais da metade. Logo , pelo processo de exaustão, dobramos sucessivamente o número de lados(isto é, fazendo crescer n), as áreas intermediárias podem ser reduzidas até que $a - p_n < \epsilon$. Então, como $a - a' = \epsilon$, temos que $p_n > a'$. Agora, de teoremas anteriores sabemos que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$ e como supusemos que $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, temos que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$.

Logo, se $p_n > a'$, devemos concluir que $P_n > A$. Mas como P_n é área de um polígono inscrito dentro do circulo de área A,é evidente que P_n não pode ser maior que A. Como uma falsa conclusão implica que uma premissa é falsa, está excluída a possibilidade que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. De modo análogo, mostramos ser impossível que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ e, com isso, provamos o teorema que diz que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados sobre seus diâmetros.

2.6 Arquimedes de Siracusa

Como visto na seção anterior, Arquimedes (287 - 212 a.E.C.) teve contato com os trabalhos de Eudoxo, tanto que alguns de seus trabalhos são atribuídos a esse último. Arquimedes é considerado como o maior matemático da antiguidade de forma consensual, devido a suas diversas e originais abordagens a problemas, sendo característica dele a dificuldade e o rigor com as demonstrações. Foi um exímio matemático e físico, criando os ramos da estática e hidrodinâmica. Na época foi muito conhecido por suas construções de engenharia, muitas das vezes utilizadas para defender a cidade de Siracusa do invasores.

Dentre os diversos de seus feitos, continuaremos com o método de Eudoxo, que foi muito utilizado por Arquimedes. Com suas técnicas, ele conseguiu determinar áreas de figuras parabólicas, cilíndricas e elípticas; determinando também o volume do cone e da esfera.

Arquimedes, em sua época, se distinguia dos demais matemáticos por seus métodos que divergiam do modo euclidiano (que abordaremos no capítulo posterior). Seu método era tal que o auxiliava com abordagens alternativas na obtenção de propriedades dos problemas, de forma a não utilizar fielmente os devidos passos para prova na obtenção das propriedades. Primeiramente ele chegava a algum resultado aproximado, e posteriormente o demonstrava da forma a qual deveria ser demonstrado. Segundo Roque e Carvalho (2012):

> Arquimedes, um dos mais conhecidos matemáticos gregos, chegou a defender um método que permitisse entender certas realidades matemáticas usando a mecânica, ainda que este método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente. Sabemos hoje que alguns dos resultados demonstrados dessa maneira por Arquimedes eram obtidos de modo puramente mecânico. Haveria, portanto, uma distinção entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstração, que deveriam ser puramente geométricos. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.105)

Em sua obra *Quadratura da Parábola*, em uma carta a Dositeu, Arquimedes diz o seguinte:

> "Um certo teorema geométrico que não foi investigado antes e que foi agora investigado por mim e que eu descobri, primeiramente, por meio da mecânica e que exibi, em seguida, por meio da geometria"(ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 105)

Este método só pode ser realmente entendido após o início do século XX, pois foi no ano de 1899 que o tratado, que ficou conhecido como *O Método*, foi descoberto.

No tratado, existiam várias cartas destinadas a Erastótenes de Cirene(275 - 194 a.E.C.), onde argumentava sobre sua forma de produzir matemática. Para Arquimedes, quando já se obtinha a consolidação de determinados resultados, a demonstração do mesmo era facilitada. Segundo Mol (2013):

> Essas indicações, Arquimedes obtinha por investigações “mecânicas” — pesos teóricos dos objetos matemáticos envolvidos — após as quais uma prova rigorosa deveria ser construída pelo método geométrico tradicional. (MOL, 2013, p.54)

Um trecho da carta de Arquimedes a Erastótenes, que confirma o raciocínio acima, está presente em Roque e Carvalho(2013):

> "[...] Pensei que seria apropriado escrever-lhe neste livro sobre um certo método por meio do qual você poderá reconhecer certas questões matemáticas com ajuda da mecânica. Estou convencido de que ele não é menos útil para encontrar provas para os mesmos teoremas. Algumas coisas, que se tornaram claras para mim, em primeiro lugar, pelo método mecânico, foram provadas geometricamente em seguida, uma vez que a investigação pelo referido método não fornece de fato uma demonstração. No entanto, é mais fácil encontrar a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio."(ROQUE; CARVALHO, 2013, p.105)

Neste fragmento, podemos observar que realmente Arquimedes fazia uso de procedimentos heurísticos em sua obra. Este fato fica explicitado com a citação acima, onde sugere que em *O Método*, Arquimedes tentava explicar sua linha de raciocínio para solucionar problemas e a partir de quais processos chegou nas soluções[3]. Reforçando ainda a ideia temos o seu método mecânico, que utilizava que não era utilizado pelo povo grego, visto que para cada problema ele fazia uso de técnicas diferentes, ao comparar figuras com uso de uma balança abstrata que deveria equilibrar figuras geométricas, por exemplo.

[3] Caso o leitor queira se aprofundar seus estudos sobre o método de Arquimedes o artigo de Mauro Lopes Alvarenga titulado como "O MÉTODO DE EXAUSTÃO E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO", apresentam algumas aplicações do método como na quadratura de parábolas, medida do círculo e o método de equilíbrio sobre o volume da esfera.

3 EUCLIDES DE ALEXANDRIA E SEUS ELEMENTOS

É frustrante saber que muito pouco se sabe sobre este personagem da história da matemática, sabendo apenas que viveu no século III a.E.C. e, possivelmente, fora aluno da Academia de Platão e, posteriormente, professor na Universidade de Alexandria, sendo o chefe do departamento de matemática. Até hoje permanecem vivas 5 obras de Euclides. São elas: Os *Elementos*, Os *Dados*, *Divisão de figuras*, Os *Fenômenos* e *Óptica*. Porém daremos foco especial ao livro que é imediatamente pensado quando citamos Euclides, Os *Elementos*. Este livro demonstra a grande sabedoria do povo daquela época, levando muitos leitores ao fascínio ou incredulidade por perceber o quão longe aqueles homens conseguiram chegar a tanto tempo atrás. Em relação a estes sentimentos, Levi (2008) nos diz o seguinte:

> A crítica histórica se pergunta como pôde se formar tal acervo de conhecimento e se ordenar em uma sólida construção tão pouco comum. Descobre então, por notícias fragmentadas geralmente sem documentos precisos, que três ou quatro séculos antes de Euclides, quiça mais, os gregos já praticavam a geometria - talvez uma geometria puramente utilitária herdada de outros povos, mais antigos; talvez uma geometria entre mística e física - e descobre também que até o título *"Elementos"* não é nada novo e original - ao contrário, é algo tradicional como para nós seria "tratado"ou "curso". Assim seriam Os *Elementos* de Euclides uma compilação mais ou menos boa, mais ou menos adulterada, que um modesto professor redigiu na forma de apontamentos úteis para seus alunos e que tiveram a sorte de parecer úteis também a muitas pessoas cultas e a muitos alunos de gerações posteriores? Ou seria tão irracional empreender uma vez a leitura imaginando que o filósofo-matemático, que tem fé no valor moral da capacidade de raciocínio do homem e que prova suas forças na construção de um *inútil* monumento dedutivo, não tem outro fim senão o de se alegrar ao olhar como a realidade parece curvar-se para se tornar espelho da invenção abstrata? (LEVI, 2008, p.22)

Esses questionamentos não são respondidos por Levi (2008). Contudo, os frutos provindos de todas as suas ideias e contribuições para a humanidade são inegáveis. Desde seu padrão de rigor até a abstração dos problemas foram úteis ao longo dos anos. Confirmando as palavras de Levi (2008) e trazendo mais algumas informações, Mol (2013) afirma que:

> Euclides foi herdeiro de uma tradição matemática iniciada na Grécia pelo menos três séculos antes. Os *Elementos* incorporaram as ideias de Platão quanto à natureza abstrata dos objetos matemáticos, mas sobretudo as de Aristóteles no que diz respeito à estrutura do conhecimento matemático e dos elementos lógicos usados em sua construção. A obra é rigorosa quanto à estrutura lógica, criteriosa na escolha das noções básicas (definições, axiomas e postulados admitidos sem demonstração) e clara nas demonstrações de proposições mais complexas a partir das mais simples. É um perfeito retrato do caráter abstrato e dedutivo da matemática grega. (MOL, 2013, p. 46)

Os *Elementos*, segundo Levi (2008), é um compêndio do desenvolvimento grego da época julgado como matemática elementar que seria a matemática provinda da régua e compasso, sendo de caráter introdutório e dividido em 13 capítulos. Estes capítulos podem ser divididos em blocos. Tratando da geometria plana temos dos livros I ao VI, da aritmética dos livros VII ao IX e sobre a geometria sólida do X ao XIII.

Em relação a sua importância, Mol (2013) afirma que os *Elementos de Geometria*, de Euclides, representa o apogeu da produção matemática na Grécia clássica. Apesar da grande importância do conteúdo desta obra, cabe a ela o título de protótipo da forma matemática moderna. A criação dos gregos antigos da forma postulacional de raciocínio, com intuito de demonstrar proposições a partir de verdades primordiais é indiscutivelmente útil para a matemática, evitando ciclos viciosos na tentativa de provar afirmações. Estas verdades primordiais são os termos indefinidos, noções comuns e os denominados *postulados* ou *axiomas* do sistema e destas devem derivar todas as demais afirmações.

O sistema postulacional fora uma novidade e devido a sua grande disseminação houveram impactos por toda parte a ponto de, segundo Eves (2011):

> Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal dos Elementos de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma consequência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos chamado axiomática, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional. (EVES, 2011, p. 179)

Quanto ao raciocínio postulacional, cabe comentar que dentre os matemáticos gregos antigos existia uma distinção entre "postulados"e "axioma". Por não termos nenhuma cópia que date da época do seu autor, não podemos ter certeza quanto a quais significados estas palavras foram consideradas. Contudo, algumas evidências apontam que, para Euclides, um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.

Na tradução dos *Elementos* de Bicudo (2009), encontramos nove noções comuns e cinco postulados geométricos, sendo suficientes e necessários para provar todas as suas 465 proposições. Mostraremos a seguir os postulados e noções comuns presentes em BICUDO(2009):

- Postulados

1. Fique postulados traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas outras, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado qual estão os menores do que dois retos(π).

   - Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

3. E, se caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.

5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

6. E as Metades da mesma coisa são iguais entre si.

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

8. E o todo [é] maior do que a parte.

9. E duas retas não contém uma área.

Contudo, este sistema tão duradouro presente nos *Elementos* travou grandes embates ao longo dos anos. As criticas foram sobretudo sobre o quinto postulado, que aparentava ser um teorema. As incertezas tiveram início desde o século I d.E.C.,com Ptolomeu, se postergando até o século XIX. Neste período, destacaremos os séculos XVI, XVIII e o XIX respectivamente. O século XVI é um dos séculos com ênfase devido à grande mobilização intelectual da época, com novas visões do mundo e uma nova concepção do saber, pensamentos estes provindos do Humanismo europeu e do Renascimento.

> O século XVI foi uma época de importância capital na história da humanidade, uma época de um enriquecimento prodigioso do pensamento e de uma transformação profunda da atitude espiritual do homem; uma época possuída por uma verdadeira paixão da descoberta: descoberta no espaço e descoberta no tempo; paixão pelo novo e paixão pelo antigo. Os seus eruditos desenterraram todos os textos enterrados nas velhas bibliotecas monásticas. Leram tudo, estudaram tudo, editaram tudo. Fizeram reviver todas as doutrinas esquecidas dos velhos filósofos da Grécia e do Oriente: Platão e Plotino, o estoicismo e o epicurismo, o ceticismo e o pitagorismo, o hermetismo e a cabala. Os seus sábios tentaram fundar uma ciência nova, uma física nova e uma nova astronomia; os seus viajantes e aventureiros sulcaram os continentes e os mares, e os relatos das suas viagens levaram à concepção de uma geografia nova, de uma nova etnografia. Alargamento sem igual da imagem histórica, geográfica, científica do homem e do mundo. Fervilhamento confuso e fecundo de ideias novas e de ideias renovadas. Renascimento de um mundo esquecido

> e nascimento de um mundo novo. Mas também: crítica, abalo, e enfim dissolução e mesmo destruição e morte progressiva das antigas crenças, das antigas concepções, das antigas verdades tradicionais que davam ao homem a certeza do saber e a segurança da ação. De resto, uma coisa supõe a outra: o pensamento humano é, na maior parte dos casos, polêmico. E as verdades novas estabelecem-se, quase sempre, sobre o túmulo das antigas. Seja qual for, de resto, a validade desta tese geral ela é verdadeira para o século XVI que tudo abalou, tudo destruiu: a unidade política, religiosa, espiritual da Europa; a certeza da ciência e a da fé; a autoridade da Bíblia e a de Aristóteles; o prestígio da Igreja e o do Estado (KOYRÉ, 1963, p. 23-24).

Nesta época, vários campos das ciências foram afetados por este movimento tendo, por exemplo, o novo sistema solar de Copérnico, aperfeiçoado por Kepler, posteriormente; mudanças na física com a mecânica de Galileu e a gravitação de Newton, e outras contribuições nas demais ciências. Esse movimento de reflexão dos escritos antigos contribuiu para novas tentativas de provas do quinto postulado, pois os *Elementos* é um clássico da antiguidade e não poderia deixar de ser estudado.

Todas as tentativas de demonstração do quinto postulado como teorema por parte dos matemáticos ao longo dos anos continham falhas. Tanto que no século XVIII , precisamente em 1763, G.S.Klügel apresentou em sua tese de doutorado uma análise de 28 diferentes supostas provas do quinto postulado levantando, assim, a dúvida quanto a esta especulação. Andrade (2013) nos conta que diversos matemáticos, como Gauss, Bolyai e Lobachevsky, se empenharam em prol da demonstração do quinto postulado. Esse estudo levou os três matemáticos citados à descoberta, de forma independente, da geometria que ficaria conhecida por geometria hiperbólica, sendo primeiramente exposta no meio acadêmico por Lobachesvsky, em 1826. Ainda no século XIX se teve o encerramento dessa questão. Segundo Greenberg (2008), em 1868, o matemático italiano Beltrami pôs fim à controvérsia, pois ele demonstrou que é impossível construir uma demonstração para o quinto postulado.

Frente a todos os movimentos e acontecimentos relatados, cada vez que os *Elementos* se esgueirava de ser reformulado, constava com uma vitória para a obra de Euclides, pois o mundo conhecido desde a antiguidade pelo homem estava mudando, enquanto a geometria euclidiana ia se estabelecendo como imutável, acabada e definitiva ao longo do tempo. De todas as ciências, desde as novas criações até as resgatadas e restauradas, a geometria euclidiana permanecia de forma soberana.

Interessante é saber que a geometria euclidiana pode ser resumida a algumas simples construções básicas. Isto pode ser afirmado após os trabalhos do italiano Mascheroni(1750-1800), que mostrou que toda e qualquer construção feita com régua e compasso poderiam ser feitas apenas com o compasso. Munido do teorema de Mohr-Mascheroni vemos que toda a construção geométrica se resume em três construções, sendo elas:

1. Encontrar os pontos de interseção de dois círculos.

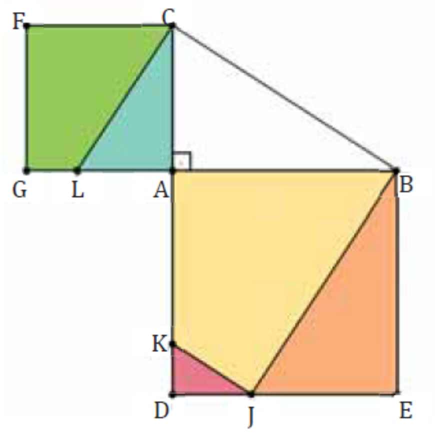
2. Encontrar os pontos de interseção de uma reta e um círculo.

3. Encontrar os pontos de interseção de duas retas.

Logo se feita uma demonstração geométrica, que faça esses passos, ela se mostraria de forma equivalente a com régua e compasso, e agora iremos demonstrar o teorema de Pitágoras feita pelo fracês Jacques Ozanam (1640-1717) segundo Silva(2014) .

Seja ABC um triângulo reto em A. Considere os quadrados $ABED$ e $ACFG$ construídos, respectivamente, sobre os catetos AB e AC. Sejam $J \in DE$ tal que $BJ \perp BC$, $K \in AD$ tal que $JK \perp BJ$ e $L \in AG$ tal que $LC \perp BC$. Dessa forma, os quadrados construídos sobre os catetos ficaram decompostos em 5 polígonos, conforme figura abaixo.

Figura 9 – Decomposição de Jacques Ozanam.



Fonte: Silva (2014, p. 31)

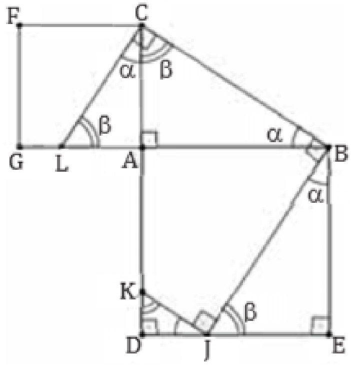
Mostraremos a seguir que na decomposição de Ozanam, a soma das áreas dos polígonos EBJ, DJK, ACL e $CFGL$, obtidos a partir dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado que se constrói sobre a hipotenusa.

Sejam $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $A\widehat{B}C = \alpha$ e $A\widehat{C}B = \beta$. Primeiramente, observe, com o auxílio da figura abaixo, que: $E\widehat{B}J = D\widehat{J}K = A\widehat{C}L = A\widehat{B}C = \alpha$ e $E\widehat{J}B = D\widehat{K}J = A\widehat{L}C = A\widehat{C}B = \beta$.

Temos que os triângulos ABC e EBJ são congruentes por A.L.A.(Ângulo, lado, Ângulo), pois $J\widehat{E}B = C\widehat{A}B$(reto), $EB = AB$(por construção) e $E\widehat{B}J = A\widehat{B}C$. Logo $BJ = BC = a$.

Seja H o ponto de intersecção das semirretas $\overline{JK}$ com $\overline{CL}$. Dessa forma, $BCHJ$é um quadrado de lado a, igual à hipotenusa do triângulo ABC. Como os triângulos ABC e EBJ tem a mesma área, então, basta provarmos que a soma das áreas de DJK e $CFGL$ é equivalente à área de $ALHK$.

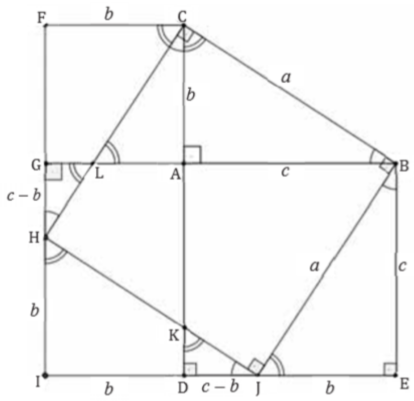
Figura 10 – Indicação dos ângulos na decomposição de Ozanam.



Fonte: Silva (2014, p. 31)

De fato, seja I o ponto de intersecção das semirretas $\overline{FG}$ e $\overline{ED}$. Note que $G\widehat{H}L = \alpha$ e $I\widehat{H}J = \beta$. Dessa forma, os pontos G, H e I estão alinhados, pois $G\widehat{H}L + L\widehat{H}K + I\widehat{H}K = 180°$ e o quadrilátero $AGID$ é um retângulo de lados b e c.

Figura 11 – Construção auxiliares na decomposição de Ozanam.



Fonte: Silva (2014, p. 32)

Temos que o triângulo FHC congruente ao triângulo ABC, por L.A.L. ($FC = AC$, $F\widehat{C}H = A\widehat{C}B$, $CH = BC$). Logo, $FH = c$ e $GH = c - b$. Então, os Triângulos GHL e DJK são congruentes por A.L.A.

Note o quadrilátero $HIDK$ é congruente ao quadrilátero $CFGL$, pois $\overline{HI} = \overline{CF} = b$, $\overline{HK} = \overline{CL}$, $\overline{KD} = \overline{LG}$, $\overline{DI} = \overline{GF} = b$ e $D\widehat{I}H = G\widehat{F}C$, $I\widehat{H}K = F\widehat{C}L$, $H\widehat{K}D = C\widehat{L}G$, $K\widehat{D}I = L\widehat{G}F$.

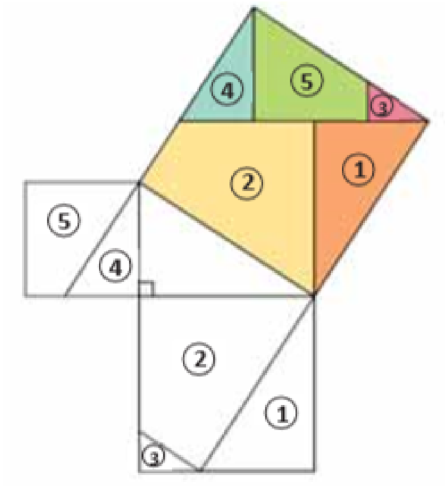
Assim sendo, temos que com a soma das áreas dos quadriláteros e triângulos temos $CFGL + DJK = HIDK + GHL = \frac{b \cdot c}{2}$, pois $IJ = c$. Por outro lado, como $DJK = GHL$, temos que $HIDK + GHL = \frac{b \cdot c}{2}$. Como $HIDK + ALHK + GHL = b \cdot c$, temos que $ALHK = \frac{b \cdot c}{2}$. Logo $DJK + CFGL = ALHK$.

Portanto, $EBJ + DJK + ABJK + ACL + CFGL = CBJH = a^2$.

■

De forma ilustrativa podemos ver a representação das correspondência das figuras construídas abaixo:

Figura 12 – Disposição das peças no quadrado da hipotenusa.



Fonte: Silva (2014, p. 33)

4 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA

Para melhor fluides da leitura deste trabalho, foi realocada para o apêndice a seção que tratávamos da evolução da matemática, fora a geometria, mantendo neste capítulo os acontecimentos que abordam apenas de forma mais incisiva a geometria. Caso o leitor queira, poderá passar neste momento para o apêndice retornando posteriormente a este ponto, tendo como critério sua curiosidade para o quanto foi desenvolvido das demais áreas da matemática, enquanto a geometria de Euclides permanecia soberana.

4.1 As novas geometrias

Nesta parte do trabalho serão abordados pensamentos e produções referentes ao campo geométrico de forma principal, e o dividiremos em três partes. Primeiramente iremos procurar entender os comentários dos variados matemáticos que fizeram críticas ou defesas a geometria de Euclides, visto que esses comentários giravam em torno do famoso quinto postulado, onde alguns o tratavam como teorema, tentando mostrar a sua não independência em relação aos demais postulados. Na segunda parte de fato, iremos tratar dos personagens que apresentaram as geometria não euclidianas. Tendo como base autores como Greenberg (1993). E por último faremos um apanhado geral do reflexo dos trabalhos mencionados ao longo do capítulo.

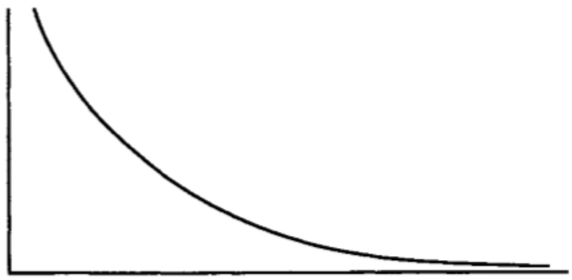
4.2 Pré descobrimento

Com a leitura de Greenberg(1993) percebemos que o problema do quinto postulado é antigo, antigo como a própria geometria de Euclides. Como ja citado no capítulo 3 deste trabalho, Ptolomeu fora o primeiro a tentar provar o quinto postulado, porém como outros matemáticos que ainda viriam, acabou aceitando de forma inconsciente, o próprio quinto postulado reescrito por Hilbert em seu material. Tendo falhado assim em sua prova, que consistia em extrair o chamado quinto postulado dos demais, o tornando assim um teorema. Um dos raciocínios que nos faz perceber os problemas do quinto postulado pode ser encontrados em Greenberg(1993):

> Proclus (A.D. 410- 485), whose commentary is one of the main sources of information on Greek geometry, criticized the parallel postulate as follows: "This ought even to be struck out ofthe Postulates altogether; for it is a theorem involving many difficulties, which Ptolemy, in a certain book, set himself to solve. . ..The statement that since [the two lines] converge more and more as they are produced, they will sometime meet is plausible but not necessary."(GREENBERG, 1993, p. 149)[4]

Podemos perceber que realmente existe um problema, que podemos considerar no mínimo como de comunicação entre o postulado de Euclides e o leitor, pois como argumento de Proclus foi utilizada da hipérbole, construção da qual podemos nos distanciar o quanto quisermos que nunca irá tocar os eixos, contradizendo de forma intuitiva o postulado.

Figura 13 – Ilustração de hiperbole.



Fonte: Greenberg (1993, p. 150)

Frente a esse pensamento, Proclus também tentara provar o quinto postulado, falhando como Ptolomeu, ao admitir propriedades em sua prova que só eram demonstráveis quando admitimos a existência do quinto postulado.

Agora de forma breve mencionaremos os matemáticos Jonh Wallis(1616-1703) e Alexis Claude Clairaut(1713-1765) que tentaram de certa forma substituir o quinto postulado por reformulações feitas por eles. Uma diferença é que Wallis substituiu o quinto postulado pelo seu que teoricamente faria mais sentido e posteriormente tentou provar o quinto postulado com seu novo postulado dentro da geometria neutra[5] enquanto que Clairaut apenas o substituiu por um com equivalência lógica.

Partindo para outros personagens, comentaremos sobre Girolamo Saccheri(1667-1733), Johann Heinrch Lambert(1728-1777) e Adrien-marie Legendre(1752-1833) que contribuíram para a aceitação futura das geometrias não euclidianas.

Iniciando pelo padre Saccheri, que pouco antes de sua morte publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus*(Euclides justificado de toda falha), que fora pouco disseminado na época tendo seu ápice com sua redescoberta em 1866 por Eugênio Beltrami(1835-1900), alcançando o destaque no meio acadêmico. Em seu livro Saccheri tentou aplicar a *"reduio ad absurdum"*(redução ao absurdo) para provar que o quinto postulado não era um teorema. Para isso ele imaginou o quadrilátero que hoje chamamos de Quadrilátero de Saccheri. Este quadrilátero tinha como propriedades os dois ângulos da base retos, lados congruentes

[4] (tradução livre) Proclus (410-485), cujo comentário é uma das principais fontes de informação sobre a geometria grega, criticou o postulado das paralelas da seguinte forma:"Isso deve ser tirado dos postulados por completo; pois é um teorema que envolve muitas dificuldades, que Ptolomeu, em um determinado livro, se propôs a resolver... A afirmação de que, uma vez que [as duas linhas] convergem mais e mais à medida que são produzidas, elas às vezes se encontram é plausível, mas não necessário

[5] Conjuntos de postulados que não satisfazem obrigatoriamente o quinto postulado de Euclides

e os dois ângulos do topo congruentes, aos quais atribuía três possibilidades para seus valores.

Figura 14 – Quadrilátero de Saccheri.

Fonte: Eves (2011, p. 541)

Poderiam ser, ambos retos(como na geometria Euclidiana), agudos ou obtusos. Sua ideia era mostrar que desenvolvendo por *"reduio ad absurdum"*, as hipóteses dos ângulos agudos e obtusos seriam falhas, chegando assim que o quinto postulado seria de fato um postulado, do qual não poderia ser obtido das proposições por ele aceitas no início, que foram os outros quatro postulados. E em relação as suas provas Eves(2011) comenta que:

> Assumindo tacitamente a infinitude da reta, Saccheri prontamente eliminou a hipótese do ângulo obtuso, mas o caso referente à hipótese do ângulo agudo mostrou-se muito mais difícil. Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exibir uma contradição e, em vez disso, tivesse admitido sua incapacidade de alcançá-la e, sem dúvida, os méritos da descoberta da geometria não euclidiana caberiam a ele.(EVES, 2011, p. 540)

Podemos perceber com as palavres de Eves que talvez, Saccheri quisesse tanto provar, que estava tão convicto, que não soube lidar com o caso dos ângulos agudos, que o próprio Saccheri se referiu a ele como o "hostil caso dos ângulos agudos".

Em relação Lambert, sua produção foi paralela a de Saccheri diferenciando no caso de que seu quadrilátero tinha três ângulos retos e apenas um para aplicar as mesmas hipóteses de Saccheri. Seu tratado de nome *Die Teorie der Parallelliniem*(A Teoria da Retas Paralelas) diferenciando em alguns pontos aos trabalhos de Saccheri. Segundo Eves(2011):

> E foi consideravelmente além de Saccheri na dedução de proposições com as hipóteses do ângulo agudo ou do ângulo obtuso. Assim, como Saccheri, ele mostrou que para as três hipóteses a soma dos ângulos de um triângulo é menor que, igual a ou maior que dois ângulos retos,

> respectivamente, e então, indo além, que a deficiência abaixo de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo agudo, ou o excesso de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso, é proporcional à área do triângulo. Observou a semelhança entre a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso e a geometria esférica, na qual a área de um triângulo é proporcional a seu excesso esférico e conjeturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário.(EVES, 2011, p. 541)

Lambert teve uma imaginação aberta e pode interpretar de outra forma seus resultados. O caso dos ângulos obtusos era eliminado rapidamente, porem a hipótese dos ângulos agudos em sua produção também cotinha pensamento e raciocínios nebulosos, gerando uma conclusão insatisfatória e imprecisa.

Legendre não foi diferente no quesito demonstração, divergindo apenas na forma. No lugar de usar um quadrilátero utilizava de um triângulo, considerando a soma dos ângulos internos igual, maior ou menor que 180º, contudo Legendre acabou por não conseguir uma demonstração em suas diversas edições de seus *Élements de Géométrie*(Elementos da Geometria) contribuiu mais para a popularização no meio acadêmico deste problema do que para a solução.

4.3 Descobrimento

Segundo o livro de Greenberg(1993), os três primeiros nomes que desenvolveram e obtiveram resultados expressivos nesses campos foram János Bolyai(1802-1860), Carl Friedrich Gauss e Nikolai Ivanovich Lobachevsky(1979-1856) tendo cada um sua participação independente em seus estudos. A princípio no livro são tratados János e Gauss, numa trama envolvendo esta nova geometria. János desde muito novo desenvolveu grandes capacidades matemáticas, dominando as técnicas do cálculo aos 13 anos. A trama envolvendo estes personagens está ligada de forma íntima as propriedades que ambos descobriram desta nova geometria. Pro meio de cartas que seu pai Farkas Bolyai(1775-1856) escrevia, János tinha suas descobertas compartilhadas com Gauss que sempre quando respondia, anunciava que já havia descoberto tal propriedade. A combinação das cartas de seu pai Farkas, e das respostadas de Gauss, geraram em János a suspeita de que seu pai de forma secreta, informava Gauss de toda nova descoberta feita por ele, sendo desta forma facilitado o pensamento por parte de Gauss.

De fato existem evidências de que Gauss teria sim antecipado algumas das descoberta de János, pois teve seus trabalhos nesta área desde 1792, tanto que em 1817 e 1824, encaminhou cartas a Taurinus(1794-1874) onde escrevera que esta geometria não poderia ser provada, e por tão difícil aceitação destas ideias, mesmo que com reflexões que realmente levavam para esse rumo, não publicara nada. Juntando este fato com o lema ja atribuído a Gauss podemos naturalmente aceitar o fato de que Gauss não publicou suas descobertas, assim como diz Eves(2011) concordando com o que ja foi dito e trazendo novas informações:

> É provável que Gauss tenha sido o primeiro a alcançar conclusões penetrantes relativas à hipótese do ângulo agudo, mas, como nunca publicou nada sobre essa matéria em toda a sua vida, a honra da descoberta dessa particular geometria não euclidiana deve ser dividida entre Bolyai e Lobachevsky. Bolyai publicou suas primeiras descobertas em 1832 num apêndice de um livro de matemática de seu pai. Mais tarde ficou-se sabendo que Lobachevsky havia publicado descobertas semelhantes já em 1829-1830, mas, devido às barreiras da língua e à lentidão com que as informações de novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa Ocidental por vários anos.(EVES, 2011, p. 542)

Lobachevsky o matemático russo citado acima foi o primeiro a publicar sobre o tema, tendo como a barreira da língua e a dificuldade da comunicação da época associados a sua tardia percepção. Quanto a sua geometria, Lobachevsky atribuiu dois nomes distintos a ela, hora por 'imaginária' outras por "pangeometria". Procurando mais amplitude e leitores de seu trabalho publicou em 1840 em alemão um pequeno livro chamado *Geometrische Untersunchungen Zur Teorie der Parallellinien*(Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas) e posteriormente em francês em 1855 *Pangeometria*, ao qual foi escrito um ano antes de sua morte, de forma mais densa. A seu trabalho temos esta citação de Greenberg(1993):

> In an 1846 letterto Schumacher, Gauss reiterated his own priorityin developing non-Euclidean geometry but conceded that "Lobachevsky carried out the task in a masterly fashion and in a truly geometric spirit."At Gauss' recommendation, Lobachevsky was elected to the Gottingen Scientific Society. (Why didn't Gauss recommend Janos Bolyai?).(GREENBERG, 1993, p. 184)[6]

Intrigante é o questionamento de Greenber(1993) no final do trecho, visto que as semelhanças entre os trabalhos de János e Lobachevsky são comentadas por Greenberg(1993):

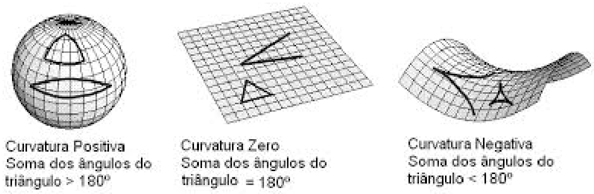
> It is amazing how similar are the approaches of J. Bolyai and Lobachevsky and how different theyare from earlier work. Both developed the subject much further than Gauss. Both attacked plane geometry via the "horosphere"in three-space (it is the limit of an expanding sphere when its radius tends to infinity). Both showed that geometry on a horosphere, where "lines"are interpreted as "horocycles"(limits ofcircles), is Euclidean. Both showed that Euclidean spherical trigonometry is valid in neutral geometry and both constructed a mapping from the sphere to the non-Euclidean plane to derive the formulas of non-Euclidean trigonometry

[6] (tradução livre) Em uma carta de 1846 para Schumacher, Gauss reiterou sua própria prioridade no desenvolvimento da geometria não-euclidiana, mas admitiu que "Lobachevsky desempenhou a tarefa de maneira magistral e com um espírito verdadeiramente geométrico". Por recomendação de Gauss, Lobachevsky foi eleito para a Gottingen Scientific Society. (Por que Gauss não recomendou Janos Bolyai?)

> [...]. Both had a constant in their formulas that theycould not explain; the later work of Riemann showed it to be the *curvature* of the non-Euclidean plane.(GEENBERG, 1993, p. 184-185)[7]

Após este questionamento quanto ao posicionamento de Gauss, voltaremos a falar do impacto por ele causado no meio matemático. Apenas após 1855 com a morte de Gauss, seus estudos referentes as geometrias não euclidianas foram mostrados, abrindo assim a outros matemáticos caminho para as pesquisas neste ramo como os de George Friedrch Bernhard Riemann(1826-1866) que mostrou em 1854 que quando retirada a infinitude da reta, adotando a limitação da reta, e ajustando outros postulados poderia se criar uma outra geometria, oriunda da hipótese dos ângulos obtusos. Em Eves(2011) encontramos que "As três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente"(EVES, 2011, p. 544)

Figura 15 – Modelos das geometrias elíptica, parabólica e hiperbólica.



Fonte: BALADÃO,P.O. (p. 3)

4.4 Consequências

Com o surgimento das novas geometrias muitas perguntas de cunho filosóficas foram feitas assim como nos diz Barker(1969):

> O desenvolvimento das geometrias lobachevskiana e riemanniana surgiu como algo de significado intelectual revolucionário. Pensadores de épocas passadas(em especial o filósofo Kant) haviam afirmado que só existia uma verdadeira Geometria. Essa idéia foi refutada, de modo claro, com o aparecimento dos novos tipos de Geometria? Se os matemáticos permitem o desenvolvimento de geometrias diferentes, cujas leis contraditam as da Geometria euclidiana, que sucede com noção de verdade em matemática? Será possível que as novas Geometrias também sejam igualmente

[7] (tradução livre) É incrível quão semelhantes são as abordagens de J. Bolyai e Lobachevsky e quão diferentes são de trabalhos anteriores. Ambos desenvolveram o assunto muito além de Gauss. Ambos atacaram a geometria plana através da "horosfera"em três espaços (é o limite de uma esfera em expansão quando seu raio tende ao infinito). Ambos mostraram que a geometria em uma horosfera, onde "linhas"são interpretadas como "horociclos"(limites de círculos), é euclidiana. Ambos mostraram que a trigonometria esférica euclidiana é válida em geometria neutra e ambos construíram um mapeamento da esfera para o plano não-euclidiano para derivar as fórmulas da trigonometria não-euclidiana [...]. Ambos tinham uma constante em suas fórmulas que não podiam explicar; o trabalho posterior de Riemann mostrou que era a textit curvatura do plano não-euclidiano.

> verdadeiras? Ou sucede que os matemáticos deixam de buscar a verdade acêrca do espaço?(BARKER, 1969, p. 54)

Podemos perceber que com as geometrias não-euclidianas houve a iniciação de divergências entre os matemáticos. Para os mais conservadores, a pertubação fora algo corrente com o constante crescimento das demais geometrias. Eles acreditavam que a geometria de Euclides era totalmente verdadeira, enquanto que as outras por gerarem teoremas diferentes, teriam que ser necessariamente falsas, como por exemplo a soma dos ângulos internos de um triângulo que difere nas três geometrias. Acreditavam ainda que pelos teoremas divergirem de suas visões sensíveis o sistema lógico deveria conter alguma falha. Mesmo com o empenho dos opositores das novas geometrias, ninguém conseguiu mostrar um par de teoremas que provassem a inconsistência, em virtude apenas da forma lógica, tanto da geometria de Lobachevsky quanto a de Riemannan. Por outro lado, as geometrias não-euclidianas também não se mostravam totalmente consistentes. A questão da consistências permaneceu no ar por algum tempo ao ponto de exigir dos matemáticos a criação de um método lógico mais rigoroso que o de Euclides, pois a consciência de que os *Elementos de Euclides* teria incontáveis deficiências de caráter lógico ja se espalhava.

No século XIX com a elevação dos padrões de rigor matemático foi percebido de forma geral, que o trabalho de Euclides continha falhas lógicas, embora fosse admirável. Em suas demonstrações são encontradas inúmeras passagens que Euclides admite consequências que suas hipóteses não garantiam, transgredindo a barreira lógica formal. Barker(1969) nos da um exemplo deste tipo de passagem de Euclides citando a Proposição I que solicita a criação de um triângulo equilátero em uma reta dada. Em sua demonstração Euclides pede para se traçar duas circunferências, uma com centro A e outra com centro B com raio comum AB para ambas as circunferências. Logo após Euclides começa a falar de um ponto C, que seria onde as circunferências se cortam. Precisamos apenas chegar até este passo para começar a perceber as falhas de Euclides, e continuaremos agora com Barker(1969):

> Qual é, no entanto, a razão lógica para asserverar que existe e é único êsse ponto de interseção C? Que autoriza Euclides a supor que as circunferências devam cortar-se? Que autoriza a admitir, mesmo supondo que as curvas se cruzem, que o ponto de interseção seja único? Euclides não se vale de nenhum postulado de que essas conclusões pudessem ser retiradas; não dispões de postulados que assegure a *continuidade* de segmentos e circunferências. Há, pois, uma lacuna lógica em se raciocínio; das premissas realmente apresentadas não se segue, mediante exclusivo apêlo à Lógica formal, que exista um só ponto C. (BARKER, 1969, p. 55)

Para resolução desde problema na Proposição I deveria existir um acréscimo nos postulados, e visto que já fora encontrado problemas lógicos na primeira proposição, quem dirá a inexistência nos demais. Barker(1969) em seu livro questiona como um erro deste demorou tanto tempo para ser percebido e chega a conclusão que os desenhos feitos por Euclides para ilustrar a demonstração compromete a leitura lógica da demonstração, pois neste caso, é inimaginável não se pressupor que as circunferências se toquem de tão obvio que fica com a imagem.

Então para solucionar o problema da geometria Euclidiana foi necessário o desenvolvimento de um sistema dedutivo mais rigoroso, que não fosse influenciado por diagramas feitos por ocasião do autor. Neste momento iremos introduzir o trabalho que trouxe um novo conjunto de postulados escolhido, dito por Eves(2011) como um dos mais utilizados, abrindo um novo capítulo.

5 DAVID HILBERT

5.1 Vida

Comecemos agora a conhecer David Hilbert, que segundo Eves(2011) é o maior matemático dos últimos tempos. Hilbert nasceu em Königsber em 1862 recebendo o título de Ph.D na universidade local em 1885 com apenas 23 anos. Lecionou em Königsber de 1893 à 1894 e em 1895 passou a lecionar na universidade de Göttingen até 1930 em sua aposentadoria e falecendo na mesma cidade em 1943.

Figura 16 – David Hilbert

Fonte: EVES, (2011, p. 684)

Quanto as suas habilidades Eves(2011) nos diz que:

> Hilbert foi um matemático excepcionalmente abrangente e talentoso, como o provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas. Era comum pôr em ordem caprichosamente cada área da matemática por que passava, antes de voltar sua atenção para outra. Entre essas áreas figuram a teoria algébrica dos invariantes (1885-1892); a teoria dos números algébricos (1893-1899); os fundamentos da geometria, em que se iniciou seu trabalho em axiomática (1898-1899); o problema de Dirichlet e o cálculo de variações (1900-1905); equações integrais, incluindo a teoria espectral e o conceito de espaço de Hilbert (até 1912); seguiram-se contribuições em física-matemática à teoria cinética dos gases e teoria da relatividade; e, finalmente, suas investigações críticas dos fundamentos da matemática e da lógica matemática. (EVES, 2011, p. 684)

Podemos perceber que Hilbert passou por vários ramos da matemática, mostrando o quão completo era em suas capacidades. Hilbert também é conhecido por seus 23 problemas abertos da matemática[8], no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900 e por ser o principal nome da escola formalista, explicada por Eves(2011):

> A tese do formalismo é de que a Matemática é, essencialmente, o estudo dos sistemas simbólicos formais. De fato, o formalismo considera a Matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos; a base mais funda da matemática não está plantada na lógica, mas apenas numa coleção de sinais ou símbolos pré-lógicos e num conjunto de operações com estes sinais. (EVES, 2011, p. 682)

.

Noções formalistas estas que nortearam o trabalho de Hilbert apresentado a seguir.

5.2 Grundlengen der Geometrie

Agora nos encaminhamos para o livro publicado em 1899 intitulado *Grundlengen der Geometrie*(Fundamentos da Geometria). Trabalho este referente a geometria Euclidiana, que necessitava de uma revisão para sua adequação aos padrões de rigor da época. Como exemplo de problema presente na geometria euclidiana podemos citar a estipulação de postulados como auto-evidentes que não o são, como o Segundo e Quinto postulados. Neste aspecto o trabalho de Hilbert foi propor um novo conjunto que descrevesse a geometria, porém não de forma visual, e sim de forma abstrata, livre da necessidade da "experiência sensível de espaço"normalmente presente na geometria, e sim totalmente livre. Como o material e o fim ao qual seu trabalho detinha, eram de cunho acadêmico, a escolha do método axiomático ao invés do método genético[9] se faz explicado por uma opinião de Hilbert presente em Martins(2011):

> Na opinião de Hilbert: "apesar do grande valor pedagógico do método genético, o método axiomático é mais vantajoso por ser uma exposição definitiva de uma ciência e por dar às bases da ciência uma seguridade lógica indispensável". O método axiomático permite expor a teoria da noção de número. (MARTINS, 2011, p.150)

Lógica que vimos anteriormente, fora quebrada em alguns paços das demonstrações de Euclides em seus *Elementos*. A abordagem feita marca uma mudança para o que ficou conhecido como o método axiomático moderno. Os axiomas não mais são verdades auto-evidentes, e sim relações. Mesmo a geometria sendo um campo imerso no mundo

[8] Sobre os 23 problemas de Hilbert, temos o artigo de Ivor Grattan-Guinness, intitulado *A Sideways Look at Hilbert's Twenty-three Problems of 1900*.

[9] Segundo Araújo e Bussmann(2013), O método genético consiste em introduzir novos conjuntos de números, de maneira que novas equações tenham soluções. Na sequência, introduzem-se os números inteiros negativos, fracionários, irracionais e, finalmente, os números complexos.

sensível, uma abordagem desse modo não desqualifica sua possível visão sensível, dado que com a abstração, objetos do cotidiano podem assumir funções de objetos primeiros da geometria como reta, ponto, plano. Neste novo conjunto de axiomas são estabelecidos cinco grupos sendo eles os de incidência, ordem, congruência, paralelismo de retas e continuidade. Como exemplo de abstração dos axiomas podemos citar Barker(1969) que nos mostra uma forma de reescrever o primeiro postulado de Euclides de forma abstrata, ou em outros termos, "não interpretada". O primeiro postulado diz que pode se traçar uma reta por dois pontos. Analisando com olhar não interpretativo, ele seria equivalente a dizer que "Dados dois distintos P, existe uma R com a qual cada um dos P mantém a relação B".

Neste processo de abstração a álgebra foi crucial, pois é o ramo da matemática onde podemos generalizar resultados, para a obtenção dos axiomas livres de interpretações diretas por parte do autor. Em relação entre axiomatização e álgebra em Martins(2011) vemos que:

> Para Hilbert, a axiomatização ou uma álgebra expressam as bases primárias de qualquer estrutura. Em álgebra, dá-se uma estrutura aos objetos, números ou invariantes supostamente conhecidos (ou predefinidos), para que estes consigam produzir outros resultados e contribuir para o crescimento da teoria. Desta forma é possível demonstrar um teorema a partir da estrutura ou das propriedades que os elementos admitem dentro da estrutura. Não importa se os elementos primitivos da estruturas são chamados de ponto, reta ou plano ou mesmo se são conhecidos por mesas, cadeiras ou canecas de chopp. A axiomatização como concebida por Hilbert desassocia a geometria da concepção sensível de espaço e faz abstração de seus conteúdos. “Toda e qualquer demonstração segundo a axiomática de Hilbert, só lança mão do corpo de axiomas que a geometria apresenta, e somente deste corpo de axiomas. Nada a mais, além disso.” Em outras palavras, é possível construir uma geometria sem considerar a natureza de um objeto ou o sentido conotativo de seus termos. A dedução de teoremas é conseqüência da manipulação correta dos axiomas. (MARTINS, 2011, p. 155)

Com esta citação percebemos que, pelas próprias palavras de Hilbert, seu corpo axiomático só se difere da euclidiana em relação aos axiomas, construindo as mesmas formas, logo construindo a demonstração do teorema de pitágoras que por sua vez, atesta as construções básicas de Mascheroni. Além disso pode-se ver que para Hilbert a abstração era algo que abria o leque para encontrarmos geometria em n ambientes, visto que se os entes respeitavam relações que se manipuladas, resultavam em enunciados com valor semântico de verdade, poderia ser considerado uma geometria. Sendo necessário que o sistema não gere absurdos, satisfazendo seu corpo teórico.

Lógica esta, que deveria fazer parte de sua estrutura axiomática devido a um dos motivos desde trabalho, a tentativa de provar a consistência das geometrias, visto que as geometrias não-euclidianas estavam embasadas na euclidiana, tendo assim então resumido a prova da consistência destas geometrias a prova da consistência da geometria euclidiana. Só que por definição um sistema de axiomas deve satisfazer três condições:

1. Ser **consistente**, equivalente a dizer que seus postulados e consequências não devem se contradizer.

2. Ser **completo**, equivalente a dizer que deva ser suficiente para provar todas as proposições da teoria.

3. Ser **independente**, equivalente a dizer cada um de seus postulados não deve ser supérfluo frente as consequências dos demais.

Neste contexto que Hilbert produz seu *Grundlangen der Geometrie*, pois diversos matemáticos começaram a pesquisar e tentar provar a consistências dos postulados de Euclides. A axiomática de Hilbert, pretendia sanar estes problemas, a grosso modo iria "fechar a lacunas de Euclides". Este grupo de Axiomas é encontrado em Martins(2011) da seguinte forma:

I. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

II. Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta AC tal que B está entre A e C.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento AB, ela também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

III. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e A' é um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B em (um dado lado da reta) l, tais que os segmentos AB, e $A'B'$ sejam congruentes.

2. Se um segmento $A'B'$ e um segmento $A''B''$, são congruentes a um mesmo segmento AB, então os segmentos $A'B'$ e $A''B''$são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta l, sejam AB e BC dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos que, exceto por B não têm pontos em comum. Neste caso, se $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, então $AC = A'C'$.

4. Se ABC é um triângulo e se $B'C'$ é um raio, então existe exatamente um raio $A'B'$em cada lado de $B'C'$ tal que $A'B'C' = ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos ABC e $A'B'C'$ as congruências $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BAC = B'A'C'$ são válidas, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes

IV. Axiomas das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta a reta l.

V. Axiomas de Continuidade

1. **Axioma de Arquimedes**: Se AB e CD são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de CD construídas contiguamente de A ao longo do raio AB passará além do ponto B.

2. **Axioma da Completude da Reta**: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem (que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima, menos o das paralelas) é impossível.

E para obtenção da geometria Euclidiana espacial existem mais um grupo de axiomas, chamado de Axiomas sobre Planos:

VI. Axiomas sobre Planos

1. Em todo plano existe ao menos três pontos não colineares.

2. Nem todos os pontos pertencem ao mesmo plano.

3. Três pontos não colineares pertencem a um único plano.

4. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então toda a reta está contida no plano.

5. Se dois planos têm em um ponto em comum eles têm um segundo ponto em comum.

Após apresentar o corpo de axiomas de Hilbert, iremos de fato mostrar que as construções de Mascheroni são construídas por seu grupo de axiomas. Partindo da terceira listada neste trabalho, que é para encontrar os pontos de interseção de duas retas. Neste caso como diz Hilbert em seu livro, o Teorema 1 onde afirma que Duas retas do plano têm um ou nenhum ponto em comum, é resultado direto do grupo de axiomas de incidêncial; logo, podemos encontrar. Partindo para o segundo, referente a encontrar a interseção de uma reta e um círculo. Com a definição de círculo[10] do livro, a interseção da reta com o círculo está justamente no ponto da reta que está a uma distância do centro do círculo, M, igual ao Segmento $\overline{MA}$. Para o primeiro problema faremos de forma análoga aos problema anterior para encontrarmos a interseção de 2 círculos.

Dando continuidade vamos dar uma pequena explicação acerca das três qualidades exigidas pelo método axiomático apresentados anteriormente. Segundo Martins(2011), a demonstração da independência requer a demonstração da consistência, e para esta demonstração Hilbert utiliza de um recurso normalmente utilizado. Primeiramente se procura um sistema mais simples, livre de contradições para se tornar modelo de estrutura para seu corpo de axiomas. Provando a consistência deste primeiro, é provado a consistência do segundo, tendo implicação lógica a "se, então". E suas escolhas e justificativas estão em Martins(2011):

> Baseado na consistência da aritmética de Peano, o matemático prova a consistência dos axiomas propostos em seu trabalho a partir de um modelo formado por números algébricos. Por que a teoria dos números algébricos? Pelo fato dela ser consistente, concisa e incontestável. Assim, se os axiomas da geometria fossem contraditórios, é porque a teoria dos números também seria. (MARTINS, 2011, p. 179)

Interessante é a escolha da teoria dos números algébricos, que de certa forma iria servir de escudo para sua demonstração. Caso alguém discordasse de seu resultado, deveria ser provado que a teoria dos números algébricos era falha, abrindo uma lacuna maior ainda na matemática.

No quesito completude Hilbert esbarra no Teorema da incompletude de Gödel[11] que demonstra que teorias habituais matemáticas da aritmética, como a aritmética de Peano, se são consistentes, então não são completas, e como a teoria utilizada de modelo para demonstração da consistência foi a da aritmética de Peano, a sua completude fica a merce do teorema de Gödel.

[10] Definitions. If M is an arbitrary point in the plane α, the totality of all points A, for which the segments MA are congruent to one another, is called a circle. M is called the centre of the circle.

[11] Para melhor entendimento sobre o Teorema da Incompletude de Gödel é indicada a leitura do artigo de Felipe O.S. Netto intitulado *Os Teoremas de Gödel*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a produção deste trabalho podemos ter uma visão esclarecedora da história da Geometria e dos fatores que influenciaram a tentativa feita pelo Movimento da Matemática Moderna(MMM) no Brasil. A geometria por mais de 2000 anos, e até hoje, é associada aos *Elementos* de Euclides, tendo não só o papel de um livro, mas sim por muitos anos de modelo para toda academia cientifica mesmo que de forma sutilmente equivocada, pois apresentavam erros em sua estrutura percebidas de forma geral pelos matemáticos após o surgimento das geometrias não euclidianas.

Falhas lógicas que foram encobertas pelas construções de Euclides, apresentadas ao longo do trabalho, que mostraram a necessidade de uma revisão na grande obra *Elementos*. Neste trabalho mostramos o caminho adotado pelo matemático David Hilbert, que percebendo que os problemas de Euclides eram oriundos da intuição transmitida pelas construções, decidiu fazer um novo conjuntos de axiomas(postulados) de forma não interpretada, para driblar conclusões sem o devido formalismo necessário para a época e para o método.

Neste processo percebemos que para não interpretar a geometria, deveríamos utilizar de recursos algébricos para generalizar, fazendo assim a obra ser, de um determinado ângulo, algébrico e não geométrico, pois só seria de fato geometria quando constatado que o conjunto criado estivesse acabado, e assim interpretado novamente.

Com essas informações podemos deduzir que a estratégia de algebrizar a geometria no ensino brasileiro, feito pelo MMM, substituindo as construções geométricas foi motivada pela produção de Hilbert e dos demais matemáticos que navegaram nestes mares. Tudo indica que a intenção era de fato melhorar a educação, visto que por meio das construções os alunos poderiam se deparar com as falhas de Euclides sem as perceberem, postergando assim as falhas aos leigos em matemática e geometria.

Tendo ciência que o modelo anterior, que era de ensinar via construções geométricas, foi substituído pelo algébrico deixo uma ponderação. Acredito que a exclusão das construções foi equivocada, visto que assim como Fainguelernt(1999) acredito que a Geometria é uma ferramenta utilizada para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos, porém como descreveremos se não soubermos construí-los? Também me alinho com Marmo e Marmo(1995) e julgo fundamental a disciplina Construções Geométricas por sua natureza intuitiva, contribuindo com o desenvolvimento mental do aluno. Sendo também alinhado com Piaget e Inhelder(1975) que com suas ponderações sobre o MMM diz que uma criança não é capaz de raciocinar a partir de hipóteses puras expressas verbalmente, e precisando, para poder realizar uma dedução coerente, aplica-lás a objetos manipuláveis. Por último, ressaltando que para a construção de um edifício matemático provém de constantes abstrações reflexionantes, partindo de estruturas mais concretas. Com base nestes fatos fundamento minha crítica quanto a substituição das construções pela forma algébrica, acreditando que a melhor opção seria a inclusão do modo algébrico.

Em um contexto histórico geral da matemática, vimos que a geometria foi fundamental desde o início, e percebemos que com o tempo as demais áreas da matemática foram ascendendo ao ponto de se entranharem na própria geometria e quanto a isso podemos dizer que dos tempo de Euclides até hoje, a geometria deixou de ser a "rainha"da matemática para ser uma simples acompanhante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de poincaré**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Primeira Edição).

2. BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Tradução Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

3. BICUDO, I. **Os Elementos de Euclides, tradução e introdução Irineu Bicudo**. [S.l.]: São Paulo: Editora Unesp, 2009.

4. BOYER, C.B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

5. COURNT, Richar; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Modera Ltda., 2000.

6. ESQUICALHA, Agnaldo da C. **Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna**. Fundação CECIERJ/ PUC-SP; Revista de Educação, Ciências e Matemática v.2 n.3 set/dez 2012.

7. EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradadução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

8. FAINGUELERNT, Estela K. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

9. GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. New York, US: W. H. Freeman and Company, 1993. (Third Edition).

10. HEATH, T.L. (ed.). **The works of Archimedes**. New York: Dover, 2002.

11. HILBERT, David. **Foundations of Gemeometry** Tradução de TOWNSEND, E.J. Illinois: The Open Court Publishing Co., 1902

12. KOYRÉ, Alexandre. **Considerações Sobre Descartes**. Lisboa: Editorial Presença, 1963.

13. LEVI, Beppo. **Lendo Euclides: a Matemática e a Geometria Sob um Olhar Renovador**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

14. LOPES, M. L. M. L. **GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática**. Em Aberto, Brasília, ano 14, n.62, abr/jun. 1994.

15. LORENZATO, Sergio Apparecido. **Porque não ensinar Geometria?**. A Educ. Matem. em Revista, Blumenau:SBEM, ano III nº4, p. 3-13, 1995.

16. MARMO, Carlos. MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1995. 3v .

17. MARTINS,D.F.N. **David Hilbert e sua produções acadêmicas: O Grundlangen der Geometrie como exemplo de solidariedade lógica entre a aritmética e a geometria**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado - UFRJ, 2011.

18. MONTOITO, R; GARNICA, A.V.M. **Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'*Os Elementos***. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, p. 95-123, 2014.

19. MOL,Rogperio S. **Introduão à História da Matemática**. Belo Horizonte CAED-UFMG, 2013.

20. NOVAES, B. W. D., PINTO, N. B. e FRANÇA, I. S. **Estruturalismo e Matemática Moderna: dilemas e implicações para o ensino.** 2008 Disponível em:

    estruturalismo.files.wordpress.com/2013/01/estruturaliismo-e-matemc3a1tica-moderna-dilemas-e-inplicac3a7c3b5es-para-o-ensino.pdf. Acessado em 02/05/2019.

21. Pavanelo, R. M., **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências**, Zetetiké - nº 1, UNICAMP, 1993.

22. Perez, G., **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da Geometria para as camadas populares (1º e 2º graus)**,Campinas: tese de doutorado - UNICAMP, 1991.

23. PIAGET, J., INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

24. ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**.Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

25. ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janiero: Zahar, 2012.

26. SILVA,João E.B. da **Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e atividades com Sowftware GeoGebra**. São José dos Campos: Tese de Mestrado - UNESP, 2014.

Apêndices

APÊNDICE A – A EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA

A.1 Idade Média

A Idade Média se refere à época situada após a queda de Roma, em 476 d.C, até a conquista de Constantinopla (atual Istambul) pelos Otomanos, em 1453. Ficou conhecida também por idade das trevas, motivada por uma visão eurocentrista pela falta da atividade cientifica geral em comparação com o mundo árabe, chinês e indiano.

Um dos passos iniciais foi o de Gerberto de Aurillac (946 - 1003), um francês que se tornou Papa com o nome de Silvestre II, em 999. A Gerberto é creditada a iniciativa de se disseminar os algarismos indo-arábicos (sem o zero) no ocidente, encontrando muita resistência, a princípio, por serem elementos vindos de outra cultura.

Após Gerberto, houve um período que ficou conhecido como período de transmissão, onde a Europa ocidental estava absorvendo conhecimentos a muito tempo perdida ou nunca descoberta de outras civilizações. O século XII em específico ficou conhecido como século das traduções. Com a obtenção do conhecimento o terreno ficava fértil novamente para a evolução da ciência e, nos séculos XII e XIII, as primeiras universidades foram fundadas: Bolonha (1088), Oxford (1096), Salamanca (1134), Paris (1150), Cambridge (1209), Montpellier (1220) e Pádova (1222), entre outras.

Nestes mesmos séculos Leonardo de Pisa(1170 - 1250), também conhecido como Fibonacci, trouxe consigo a preparação para a alvarada dos progressos matemáticos que o período renascentista necessitaria mais tarde. Filho de mercador, viajou pelo mundo árabe aprendendo o idioma árabe, estudando aritmética e tomando apreço pela matemática. Retornando à Itália em 1202, escreveu *Liber Abaci*(Livro do Ábaco), que juntamente com sua *Practica Geometriae* de 1220, se tornariam o material de disseminação com a álgebra que aprendera.

O livro *Liber Abaci* também teve relevância na introdução da numeração indu-arábica. Fibonacci o apresentou com os nove símbolos usuais mais o zero, e mostrou sua grande aplicabilidade na matemática comercial, para conversões, cálculo de juros e etc. Atualmente Fibonacci é mais conhecido pela *sequencia de Fibonacci*, apresentado no *Liber Abaci*.

A.2 Do Renascimento ao Cálculo

O Renascimento se refere à época que surgiu após a Idade Média, que teve em seu final alguns problemas sendo esses a Guerra dos Cem Anos (1337 - 1452) e a Grande Peste

(1348 - 1352), por exemplo. O Renascimento mudou o panorama em que se encontrava a Europa ocidental devido ao florescimento das atividades criativas envolvendo as artes, literatura e ciências. O conhecimento clássico foi revalorizado e reestruturado. Com a criação do alemão Johannes Gutemberg(1398 - 1468), a prensa de tipo móvel contribuiu com a divulgação do conhecimento, tendo em vista que no final do seculo XV as prensas oficiais de Veneza já superavam em quantidade de produção todos os copistas juntos.

Segundo Mol (2013), um dos grandes marcos da Revolução Científica Renascentista foi a evolução das concepções astronômicas clássicas na direção de modelos matematizados e apoiados em verificação experimentais. O primeiro pensador renascentista a contestar os modelos astronômicos clássicos foi Nicolau Copérnico (1473 - 1543), em seu livro *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, apontando incoerências frente ao modelo ptolomaico e defendendo que a Terra girasse em torno do Sol[12]. O modelo defendido por Copérnico foi aperfeiçoado e sedimentado matematicamente (modelo heliocêntrico), com o alemão Johann Kepler(1571 - 1630) e suas três leis, porém, obteve uma base definitiva com os trabalhos do italiano Galileu Galilei (1564 - 1642).

Galileu fez melhorias em técnicas com o telescópio e observou incompatibilidades com o modelo de Ptolomeu. Tão grande foi o legado deixado por Galileu com seu método cientifico, que é considerado por muitos como "pai" da ciência moderna, combinando a matemática a experimentações de forma inovadora e sendo o primeiro a afirmar que as leias da natureza são matemáticas dentre os pensadores modernos. Ainda, segundo Mol (2013), temos que:

> A evolução das ideias astronômicas promovida pelos sábios renascentistas teve enormes consequências filosóficas. O modelo clássico de universo hierarquizado, onde cada corpo tinha seu lugar natural, foi substituído por uma concepção de espaço homogêneo e infinito. O homem deixou de ocupar o centro imóvel do universo e a Terra perdeu sua primazia para se transformar em um astro como os outros. Pela primeira vez na história da ciência, um modelo teórico consagrado pela tradição e pela religião foi suplantado por uma formulação apoiada em verificares experimentais e em suas vantagens matemáticas. (MOL, 2012, p. 87-88)

É perceptível, com a citação acima, que após o engajamento e descobrimento astronômicos no período renascentista houve uma quebra de paradigmas, onde a ciência se prevaleceu frente à tradição e à religião, abrindo assim, espaço para os futuro cientistas que fossem contestar dogmas populares ja estabelecidos.

No campo algébrico não nos aprofundaremos nos alemães oriundos da escola *Die Coss*[13] e passaremos para os matemáticos que protagonizaram uma grande rivalidade e são eles Gerolamo Cardano (1501 - 1576) e Nicollo Fontana (1499 - 1557), conhecido como Tartaglia. A rivalidade dos personagens reside no resultado de um desafio público vencido por Tartaglia envolvendo as resoluções de equações cúbicas do tipo:

[12] Caso o leitor queira se aprofundar ler "Mover-Se-Á a Terra? - a Obra de copérnico e de Tycho".
[13] *Die Coss* é o nome a qual ficou conhecida a escola de algebristas alemães.

$$x^3 + px^2 = p \text{ e } x^3 + px = q.$$

Os métodos empregados por Tartaglia foram confiados a Cardano sob juramento de segredo, que não foi mantido pelo mesmo. Em 1545, no seu tratado de álgebra intitulado *Ars Magna*, apresentava a solução de Tartaglia. Dentre os vários tipos de abordagens presentes no livro, uma em especial proporcionou a Cardano o encontro do que é chamado atualmente como número complexo. Ao tratar de equações do tipo "cubo igual a coisa e número", como por exemplo $x^3 = 15x + 4$, chegando a igualdade a seguir:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Com esse resultado Cardano não foi capaz de explicar o encontrado, pois sabia que não existe raiz quadrada de números negativos. Porém, por verificação direta, $x = 4$ era uma solução da equação. Assim, os números complexos apareceram e foram denominados por Cardano de "números sofistas" e tratados como "sutis e inúteis". Em 1572 com Rafael Bombelli(1526-1572), pouco antes da morte de Cardano, publicou uma álgebra que auxiliou na resolução de equações cúbicas. Na sua álgebra, Bombelli encontrou anomalias que teriam assombrado algebristas anteriores e os caracterizou como *caso irredutível* das equações cúbicas e chamou a atenção que somente nesses casos as raízes de números complexos se fazia presente. Nesse contexto, Bombelli também aprimorou algumas notações algébricas.

Ainda no campo algébrico, podemos citar o francês François Viète(1540 - 1603), sendo nominado por Eves (2011) como o maior matemático francês do século XVI. O seu trabalho mais famoso, *In artem*, foi muito útil ao simbolismo algébrico. Nesse trabalho Viète atribui vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes, chegando à forma atual com Descartes em 1637. Antes era usual a utilização de diferentes símbolos para diversas potencias de uma quantidade. O que hoje representamos por x, x^2 e x^3 ele representava por A, *A quadratum* e *A cubum*, sendo posteriormente por outros autores abreviado para A, $A\ q$ e $A\ c$.

De fato Viète era um grande algebrista, tanto que conseguiu aplicar a álgebra à geometria e à trigonometria. Uma de suas contribuições para a geometria tem relação aos três problemas famosos da Antiguidades, mostrando uma dependência da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo com a resolução de uma cúbica. Ainda sobre a geometria Viète, segundo Eves(2011), tentou restaurar o trabalho *tangencias* de Apolônio de Pérgamo (262 a.E.C. - 190 a.E.C.). Sobre estes trabalho temos que ele apresentou uma solução[14] para o *problema de Apolônio*, porém não entraremos neste ponto.

Já no século XVII tivemos muitos trabalhos de relevância no meio matemático e por isso iremos apenas citar alguns, visto a densidade de trabalhos da época. Embasando

[14] Caso o leitor queira se aprofundar nesta resolução aconselhamos a leitura do trabalho *UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE APOLÔNIO E SUA CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO*, de MAFALDA e KAWANO.

esta vista que pode ser considerada como rasa dos personagens do século temos que, em Eves (2011):

> Nada mais justo do que observar aqui dois fatos que contribuirão para a apresentação algo desequilibrada da história da matemática ne segunda parte deste livro. O primeiro é que a atividade matemática começou a crescer numa velocidade tão grande que, doravante, devem-se omitir muitos nomes que em períodos menos produtivos teriam sido considerados. O segundo fato é que, com o desenrolar do século XVII, verificou-se uma produção crescente de pesquisa matemática, fora do alcance do leitor comum, pois, como já se asseverou com propriedade, não é possível entender devidamente a história de uma matéria sem conhecer a própria matemática. (EVES, ano, p. 340)

A segunda justificativa de Eves (2011) não se aplica para este trabalho, devido ao público a que é destinado, porém como o trabalho não é sobre a história matemática do século XVII, é aceitável e compreensível esta rota.

Alguns desse nomes que estão presentes nos livros de história que apenas citaremos são os de Joh Napier[15] (1550-1617), inventor dos logaritmos e Gérard Desargues[16] (1591-1661) com seus trabalhos envolvidos na geometria projetiva, dando contribuições aos trabalhos de Apolônio.

O próximo matemático que abordaremos será Blaise Pascal (1623 - 1662), que desde muito jovem demonstrou sua aptidão à matemática.Pascal produziu logo em sua juventude, e de forma surpreendente, tanto que Descartes (1596 - 1650) não acreditou que o material fosse dele, visto que seu pai Étienne Pascal (1588 - 1640) foi um matemático de respeito da época. Ainda sobre suas produções, Mol (2013) afirma que Pascal é um dos primeiros a pesquisar sobre as teoria das probabilidades.

> Pascal é considerado um dos fundadores da teoria de probabilidades. Trabalhou nesse assunto motivado por problemas envolvendo jogos de dados. Nunca publicou suas ideias, ficando elas registradas em correspondências com Pierre de Fermat. Baseado nessas correspondências, o matemático holandês Christiaan Huygens (1626 - 1695) escreveu em 1657 o texto Sobre o Raciocínio no Jogo de Dados, considerado o primeiro livro sobre a teoria de probabilidades (MOL, 2013, p. 100)

Em meio à vida do personagem houve saídas e regressos ao mundo acadêmico. De forma abrupta, em 1650, foi seu primeiro abandono à ciência, se dedicando à religião. Após 3 anos, voltou brevemente e parou novamente em 1654. Por fim, voltou pela última vez devido ao interrompimento de uma dor de dentes ao pensar certas ideias geométricas. Julgando como um sinal divino, se dedicou e desenvolveu durante 8 dias descrições da geometria da cicloide de forma bastante satisfatória.

[15] Caso o leitor queira se aprofundar nos estudos de Napier, aconselho a leitura dos trabalhos de João Carlos V. Sampaio intitulado JOHN NAPIER, HENRY BRIGSS E A INVENÇÃO DOS LOGARITMOS.

[16] Para os trabalhos de Desargues, aconselho o trabalho de Douglas Gonçalves Leite intitulado GIRARD DESARGUES E O DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA PROJETIVA.

Justamente no período em que produziu conteúdo cientifico, de 1653 a 1654, escreveu o livro *Traité du Triangle Arithmétique* e laçou juntamente com Pierre de Fermat(1601-1665) os fundamentos da teoria das probabilidades publicado apenas em 1653.

Em suas correspondências[17] com Fermat, motivadas pela proposta de Chevalier de Méré, um habilidoso jogador, quanto ao raciocínio em relação ao *problema dos pontos*[18], questão a qual se concorda que é a origem da ciência probabilística, Pascal e Fermat resolveram de formas diferentes, porém ambas de forma correta. Pascal utilizou a ferramenta que chamamos atualmente de triângulo de Pascal, resolvendo de maneira geral o problema, obtendo diversos resultados.

Essa ferramenta chamada de triângulo de Pascal era construída conforme a Figura 8. Nele se obtém qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos precedentes situados exatamente acima e à esquerda de sua posição.

Figura 17 – Triângulo de Pascal.

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

Fonte: Eves (2011, p. 364)

Temos, por exemplo, o número 10, localizado na quarta linha, sendo a soma dos números 1, 3 e 6 pertencentes a terceira linha. Mais uma aplicação da ferramenta é que os números presentes nas diagonais traçadas são os coeficientes ordenados de uma expansão binomial. Por exemplo, temos a quinta diagonal traçada na Figura 8, que são 1, 4, 6, 4 e 1, sendo eles os coeficientes sucessivos da expansão de $(a+b)^4$.

Neste momento podemos separar alguns dos feitos de Desargues e Pascal em relação aos dois próximos personagens, René Descartes e Pierre de Fermat. Desargues e Pascal desenvolveram um ramo da geometria chamada de geometria projetiva, enquanto Descartes e Fermat concebiam de forma inicial, a hoje conhecida geometria analítica, que é um método de se resolver problemas geométricos.

[17] Essa correspondência está presente em *A Source Book in Mathematics* de D.E.Smith.

[18] Este problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo.

Ao se tratar de Descartes e a geometria analítica, não podemos deixar de mencionar seu tratado filosófico publicado em 1641 e de título *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison ei Chercher la Vérité dans les Sciences* e de seus três apêndices:*La dioptriques, Les météores* e *La géométrie.*

Neste último apêndice que encontramos as contribuições dele à geometria analítica, sendo ainda dividido em três partes. Na primeira parte Descartes aborda alguns dos princípios da geometria analítica com peculiaridades diferentes da forma vista pelos gregos. Em relação a interpretação das variáveis, por exemplo, os gregos entendiam que uma variável correspondia ao comprimento de determinado segmento, que o produto de duas variáveis corresponderia à área de determinado retângulo e que o produto de três variáveis correspondia ao volume de determinado paralelepípedo. Porém, para Descartes, segundo Eves(2011) dizia que x^2 não sugeria uma área, antes porém o quarto termo da proposição $1 : x = x : x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x. Podendo assim com a utilização de um segmento de valor unitário representar várias potências de uma variável, e posteriormente com os instrumentos euclidianos, construir os segmentos de retas. Ainda na primeira parte de *La géométrie*, juntamente com esta arimetzação da geometria, Descartes marcava as variáveis x em um eixo dado e um comprimento y formando sempre um mesmo ângulo com o eixo dado, construindo assim as representações e foi o primeiro a utilizar das notações atuais, relacionando as variáveis com as últimas letras do alfabeto e os parâmetros faziam uso da iniciais..

A segunda parte trás de forma mais presente classificações de curvas e um método para se traçar a tangentes as curvas. E por último, a terceira parte aborda a resolução de equações de graus maiores que dois, utilizando da hoje conhecida *regra de sinais* de Descartes, que nos diz o número máximo de raízes positivas e negativas de um polinômio.

Quando abordamos Fermat, encontramos um considerado gênio que desenvolvia matemática como hobby. Dentre seu legado, existem grandes contribuição da moderna teoria dos números e suas famosas conjecturas[19] e seus trabalhos em relação à geometria analítica. As conjecturas são fruto do estudo dos trabalhos de aritméticos de Diofanto(201?-298? d.E.C.), onde fizera anotações nas margens que se tornariam célebres, porém sem demonstrações.

Em relação à geometria analítica, Fermat teve seu insight tentando reconstruir a obra *Lugares Planos*, de Apolônio. Em 1636 descobriu o princípio fundamental da geometria analítica que o permitiu suas contribuições a matemática. Segundo Mol(2012):

> Fermat descobriu, em 1636, o princípio fundamental da geometria analítica: uma equação envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano. Fez essa constatação um ano antes da publicação da Geometria de Descartes e, por essa razão, Fermat pode ser considerado coinventor

[19] Temos por exemplo uma das suas conjecturas chamada de *Pequeno Teorema de Fermat*, que afirma que se p é primo e a é um número não divisível por p o número $a^{p-1} - 1$ é divisível por p.

> da geometria analítica. Fermat realizou estudos sobre equações de retas e de cônicas e explorou esses assuntos em um pequeno tratado intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, publicado apenas após a sua morte. Sua exposição era muito mais clara e sistemática que a de Descartes e seu método muito mais próximo da visão moderna. Por exemplo, Fermat faz uso de um sistema de eixos coordenados ortogonais. O uso de coordenadas representou uma evolução histórica fundamental na matemática, tendo surgido em um contexto no qual as técnicas algébricas desenvolvidas pelos matemáticos medievais e renascentistas foram aplicadas aos problemas geométricos clássicos.(MOL, 2012, p. 98)

Com uso de sua geometria analítica ele desenvolveu o seu métodos para máximos e mínimos e neste processo encontrou outras curvas, sendo algumas delas hoje chamadas de *parábola* e *hipérbole de Fermat*. Com ideias próximas do método de máximos e mínimos, foi apresentada a técnica para traçar tangentes, que não fora aceita de forma ampla, justamente por não ter uma justificativa convincente.

Negligenciando algumas contribuições para prosseguimento do trabalho abordaremos os, vulgarmente conhecidos, pais do cálculo, o inglês Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Essa atribuição equivocada de pais do cálculo é comentada por Courant e Robbins (2000):

> Com absurdo simplismo, a "invenção"do calculo é algumas vezes atribuída a dois homens, Newton e Leibniz. Na realidade, o cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por newton e leibniz; ambos, porém, desempenharam papel decisivo. Espalhados pela Europa do século XVII, em sua maior parte fora das escolas, havia um grupo de cientistas ativos que se empenhava em dar continuidade aos trabalhos matemáticos de Galileu e Kepler.[...]. Dois problemas centrais chamavam sua atenção. Em primeiro lugar, o *problema das tangentes*[...]. Em segundo lugar, o *problema da quadratura*[...]. O grande mérito de Newton e Leibniz foi o de terem identificado claramente a estreita *associação entre estes dois problemas.*(COURANT; ROBBINS, 2000, p. 381)

Como dito acima, alguns trabalhos foram cruciais para o desenvolvimento de Newton e Leibniz e alguns deles são de autores como Descartes, Fermat, Kepler, Galileu, Pascal, John Wallis(1616-1703), Isaac Barrow(1630-1677), Bonaventura Cavalieri(1598-1647) e etc. Hoje é consensual que ambos desenvolveram de forma independente seus métodos, como afirma Eves(2011):

> A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática.(EVES, 2011, p. 444)

Ambos tinham processos e uma matemática para resolver utilizarem em seus métodos, que não nos aprofundaremos aqui, visto que queremos apenas ter ciência das evoluções matemáticas ao longo do tempo.

A.3 Século XVIII adiante

Nesta seção iremos negligenciar vários matemáticos, visto a grande produção acadêmica do período e abordaremos especificamente quatro personagens. Serão os personagens citados Carl Friedrich Gauss(1777-1855), Georg Cantor(1845-1918), Richard Dedekind(1831-1916) e Giuseppe Peano(1858-1932).

Começaremos pelo alemão Gauss, que no primeiro parágrafo de sua seção no livro de Eves(2011) recebe a seguinte apresentação:

> Homem de estofo e talento matemáticos impressionantes, Carl Friedrich Gauss sobressai-se nos séculos XVIII e XIX como um Colosso de Rodes da matemática. Ele é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.(EVES, ano, p. 519)

Frente a essa apresentação cabe apenas lhe acrescentar o codinome a ele atribuído após sua morde de "o Príncipe dos Matemáticos", devido a medalha em sua homenagem dada pelo rei de Hanover. Gauss fora um jovem prodígio desde muito pequeno e muitas das contribuições dele só foram discutidas pela comunidade matemática após sua morte, com o estudo de seu diário matemático. Isto aconteceu devido ao seu lema *"Poucos, porém maduros"*. Antes de publicar ele se assegurava de que seu trabalho estivesse completo, convincente e conciso. Segundo Eves(2011) o diário contém 146 breves registros, como por exemplo na imagem abaixo, que significa a descoberta de Gauss de que todo número

Figura 18 – Ilustração de anotações do diário de Gauss.

ΕΥΡΗΚΑ! $\quad \text{num} = \Delta + \Delta + \Delta,$

Fonte: Eves (2011, p. 520)

positivo inteiro é o resultado da soma de três números triangulares; onde ainda persistem dois não decifrados.

Sua publicação mais importante é *Disquistiones arithmeticae*, considerada para a moderna teoria dos números como fundamental e sendo o primeiro matemático de renome a defender de forma pública as quantidades imaginárias. Roque(2012), nos diz que:

> O ponto de vista defendido por Gauss exprime o início de um movimento que não considerará necessário qualificar as quantidades negativas e imaginárias pela sua natureza, como acontecia quando estas eram consideradas “sofísticas”, “absurdas”, “impossíveis”, “falsas” ou “imaginárias”. Vistos como números propriamente ditos, os negativos e complexos ganharão um lugar na aritmética e serão entidades sobre as quais é possível efetuar cálculos de modo consistente. Tal caminho não foi linear e passou pela constituição da matemática pura na Alemanha.(ROQUE, 2012, p. 358)

No início do século XIX, na Alemanha , a tendencia dominante no ramo matemático era da algebrização. Autores ja defendiam a desassociação das ideias de quantidade e número, e uma visão exclusivamente aritmética dos números negativos, visto sua distanciação das aplicações.Ainda em Roque(2012) encontramos que:

> Segundo Gauss, os números negativos só podem ser compreendidos quando entendemos que “as coisas contadas” podem ser de espécies opostas, de modo que a unidade de uma espécie possa neutralizar a unidade de outra espécie (como +1 e -1). Mas, para isso, ele afirma que as coisas contadas não devem ser encaradas como substâncias, como objetos considerados em si mesmos, e sim como relações entre esses objetos.[...]. Quanto aos números complexos, eles devem ser compreendidos também como relações, e Gauss começou por destacar a similitude entre a relação de $+1$ a -1 e a relação de $+i$ a $-i$ (símbolos que ele introduziu).(ROQUE, 2012, p. 359)

Com a participação de Gauss neste campo, discussões seriam mais bem aceitas pelo simples fato dele ter se manifestado no meio acadêmico. E com sua opinião dada, os números imaginários e negativos teriam seus dias nas margens da matemática contados. Em Roque(2012), temos que:

> Para Gauss, os números complexos não precisam ser “realizados”; tratava-se de relações abstratas que deviam ter plena cidadania em matemática. Essa conceitualização faz eco à sua visão de que a abstração é a característica essencial da matemática. Para ele, o processo de generalização da álgebra, que levava à extensão dos domínios numéricos, era um dos principais instrumentos dessa disciplina. A aritmética generalizada, criada na Idade Moderna, era superior à geometria dos antigos, pois, partindo do conceito de inteiros absolutos, foi possível estender seus domínios passo a passo: de inteiros a frações, de números racionais a números irracionais, de positivos a negativos, de números reais a números imaginários.(ROQUE, 2012, p. 360-361)

Percebemos neste último fragmento o alinhamento de seus pensamentos com a abstração associada a álgebra, para fomentar a teoria dos números. Esse pensamento é fortemente embasado com sua famosa frase "a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática".

Passando agora para os demais matemáticos da seção, iniciaremos com uma citação de Eves(2011) em um trecho que nos mostra a importância de seus trabalhos:

> De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da matemática.
>
> Uma vez que se pode fazer com que o grosso da matemática existente se alicerce no sistema dos números reais, é natural a curiosidade de saber se seus fundamentos podem penetrar mais fundo ainda. No fim do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932), esses fundamentos se assentaram no muito mais simples e básico sistema dos números naturais. Isto é, esses matemáticos mostraram como o sistema dos números reais, e portanto o grosso da matemática, pode ser deduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais. Então, no princípio

> do século XX, mostrou-se que o sistema dos números naturais pode ser definido em termos de conceitos da teoria dos conjuntos, e assim o grosso da matemática pode ser fundamentado sobre uma plataforma na teoria dos conjuntos (EVES, 2011, p. 611)

Podemos começar com Peano que em 1889 publicou os seus axiomas famosos, chamados axiomas de Peano, que definiram os números naturais em termos de conjuntos. Dedeking por sua vez observou em seus estudo que a essência da continuidade da reta não está ligada à densidade mas à natureza da divisão da reta em duas partes, que chamou classes, através de um único ponto sobre a reta. A essa divisão da reta chamou "schnitt"ou "corte", que passaria a ser o apoio da Análise, pois com essa observação "o segredo da continuidade seria revelado". Dedekind viu também que os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, o que conseguiu ampliando o conjunto dos racionais. Esta conclusão é conhecida por nós como Axioma de Cantor-Dedekind. Dedeking também mostrou ser possível construir os números reais com a teoria de conjuntos, mais desenvolvido por Cantor.

Passando para Cantor e seus trabalhos nos campos da teoria dos conjuntos e teoria do infinito que mudaram o ruma da matemática. Acabou por criar um novo campo de pesquisas com seus trabalhos na teoria do infinito, sendo a teoria dos números transfinitos[20]. Em resumo de sua teoria dos conjuntos Eves(2011), diz o seguinte:

> A teoria dos conjuntos, criada por Georg Cantor perto do final do século XIX, logo despertou um interesse generalizado muito grande e praticamente não há hoje nenhum campo da matemática que não tenha recebido seu impacto. As noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos. Os conceitos básicos da análise, como os de limite, função, continuidade, derivada e integral ganharam uma formulação muito mais conveniente em termos das ideias da teoria dos conjuntos. [...]foram nascendo os espaços abstratos, sendo criadas as teorias gerais da dimensão e da medida e infundidos a um ramo da matemática chamado *topologia* progressos extraordinários. Em resumo, sob a influência da teoria dos conjuntos verificou-se uma unificação considerável da matemática tradicional e se criou muita matemática nova em ritmo acelerado. (EVES, 2011, p. 659)

Grande foi o impacto de seus trabalhos, sendo ainda hoje a teoria vigente.

[20] Espécie de unidade de medida que Cantor passou a utilizar para estudar outros conjuntos de infinitos elementos.