Instituto Federal do Rio de Janeiro

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

Letícia Campanhã Rodrigues dos Santos

Ensino de Frações na Reta Numérica: Proposta de Atividades

Volta Redonda

2019

Letícia Campanhã Rodrigues dos Santos

Ensino de Frações na Reta Numérica: Proposta de Atividades

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2019

Santos, Letícia Campanhã Rodrigues dos
S237e Ensino de frações na reta numérica: proposta de atividades/Letícia Campanhã Rodrigues dos Santos. - - RJ: Volta Redonda, 2019.
56 p.: il.

Orientador(a): Profª. Mª Roberta Fonseca dos Prazeres

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2019.

1.Frações. 2. Matemática – Atividades .I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Prazeres, Roberta Fonseca dos. III. Título

CDU 511.13

Letícia Campanhã Rodrigues dos Santos

Ensino de Frações na Reta Numérica: Proposta de Atividades

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 28 de junho de 2019.

Banca Examinadora

Roberta Fonseca dos Prazeres.

Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Orientadora/IFRJ

Dra. Márcia Amira Freitas do Amaral
IFRJ

Me. José Ricardo Ferreia de Almeida
IFRJ

Me. Rafael da Silva Lima
IFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela vida e conquistas alcançadas.

Ao meu esposo por não me deixar desistir e me ajudar nos momentos difíceis, à minha família por sempre me incentivar e apoiar.

À professora orientadora pela paciência, apoio, compreensão, por seus ricos ensinamentos e momentos de descontração.

E aos componentes da banca que aceitaram gentilmente meu convite.

RESUMO

O presente trabalho aborda um tema muito delicado quando é discutido o ensino de matemática: fração. Esse é um tópico de difícil compreensão entre alunos e professores, o que pode ser verificado em avaliações oficiais e diversos trabalhos acadêmicos. Para que haja a apreensão do conceito, o aluno deve ser capaz de transitar entre as diferentes acepções do termo. Mas tal tarefa não é fácil, visto que o ensino é ainda predominantemente baseado no significado parte-todo. Por isso, a pergunta a ser respondida por este trabalho está relacionada a de que maneira a representação da fração, na reta numérica, pode auxiliar em seu entendimento. Com o intuito de abordar o conhecimento sobre o assunto visando propor algumas sugestões que promovam aperfeiçoamento em seu processo de ensino-aprendizagem, foi realizada uma pesquisa bibliográfica. A partir da proposta apresentada pelo professor Wu, que norteou a elaboração da base nacional norte-americana, são expostas atividades que procuram trazer luz à questão levantada.

Palavras-chave: Frações. Reta Numérica. Wu.

ABSTRACT

The present work addresses a very delicate topic when it comes to teaching mathematics: fraction. This is a difficult topic to understand among students and teachers, which can be verified in official assessments and various academic papers. In order for the concept to be apprehended, the student must be able to move between the different meanings of the term. But such a task is not easy, since teaching is still predominantly based on part-whole meaning. Therefore, the question to be answered by this work refers to how the fraction, on the number line, can help in its understanding. In order to discuss knowledge about the subject to propose some suggestions aimed at improving their understanding, a bibliographical research was carried out. From the proposal presented by Professor Wu, who guided the elaboration of the US national base, are exposed activities that seek to bring light to the question raised.
Keywords: Fractions. Number Line. Wu.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), avaliação promovida pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) com alunos de 15 anos, que ocorre a cada três anos, mostra que os indicadores brasileiros na área de matemática encontram-se abaixo do esperado, comparando-se à média entre os países. A última avaliação ocorreu no ano de 2018, mas os resultados só serão divulgados em dezembro de 2019. Os últimos resultados disponíveis referem-se ao ano de 2015, que contou com 70 países participantes[1].

Dentre os estudantes brasileiros, 87,43% obtiveram escore abaixo de 482. Dessa forma, não atingiram o nível 3 de proficiência matemática, em um total de 6 níveis. Esse dado mostra que grande parte dos estudantes brasileiros não demonstra capacidade de trabalhar com frações, números decimais nem lidar com relações de proporção. Por isso, verifica-se que o ensino de frações, no Brasil, não é satisfatório (BRASIL, 2016).

A partir desse quadro, por meio de pesquisa bibliográfica, este trabalho pretende responder à seguinte pergunta: como a representação da fração, na reta numérica, pode auxiliar no seu entendimento? Tem-se como hipótese que a exploração do conceito de frações utilizando sua representação na reta desenvolve de forma significativa a compreensão do conceito em questão.

O objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é elaborar uma sequência de exercícios baseada nas concepções do professor Wu sobre frações. Os objetivos específicos são apresentar informações relacionadas ao ensino de frações e realizar uma revisão da literatura sobre como ensinar frações partindo da reta.

O ensino de números racionais começa no segundo ciclo do Ensino Fundamental, devendo se consolidar nos anos posteriores (terceiro e quarto ciclos). Porém, ao chegar ao Ensino Médio, espera-se que o aluno seja capaz de operar e analisar os números racionais em sua totalidade, fato que não ocorre, como verifica-se com os resultados do Pisa. Em vista disso, justifica-se a relevância de mais estudos sobre o assunto a ser desenvolvido nesta pesquisa. Para atender aos objetivos citados, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, que foi organizada ao longo de quatro capítulos, descritos a seguir.

No segundo capítulo são exibidas algumas informações de pesquisas que versam sobre o ensino dos números racionais, que permitem a verificação de que, de fato, esse conceito envolve muitos problemas de aprendizagem. No terceiro capítulo são expostos os diversos significados de fração, cujo entendimento é crucial para lidar com os obstáculos no ensino-aprendizagem desse tópico.

No quarto capítulo é exibido como o conceito de fração pode ser ensinado na reta,

[1] Informações disponíveis em: <http://www.oecd.org/pisa/>. Acesso em: 10 jan. 2019.

inserindo-se também conhecimentos relativos às operações e frações equivalentes. Em seguida, no quinto capítulo, são colocados alguns exercícios que visam seguir a linha de ensino trazida no capítulo anterior, de maneira a apresentar opções para que professores consigam trabalhar com o conteúdo visando uma melhor apreensão por parte do aluno. Por fim, apresentam-se as considerações finais e as referências utilizadas ao longo do trabalho.

2 O ENSINO DE FRAÇÕES NO MUNDO

A matemática tem um papel importante no que se refere ao desenvolvimento de cada país. O seu domínio demonstra as diferenças específicas de cada nação nas práticas de conhecimento e instrução de professores, destacando a relevância desses fatores para o desenvolvimento dos alunos. Dentro desse contexto, as frações se destacam.

> A teoria integrada do desenvolvimento numérico enfatiza que as frações desempenham um papel fundamental no aprendizado da matemática. Diferenças individuais na precisão de representações de magnitude de fração em escolas elementares e secundárias posteriores supõem o mesmo papel central no desempenho em matemática que diferenças na precisão das representações de magnitude de número inteiro desempenham nas séries anteriores, quando as representações de números inteiros são mais variáveis. (TORBEYNS, et al., 2015, p. 5)

Vários estudos apontam para déficits no conhecimento pedagógico ao que se refere aos números racionais, como o trabalho de Ball (1990), que afirma que o entendimento sobre multiplicação e divisão dos professores é limitado. Além disso, em Bailey et al. (2012), aponta-se que as competências em frações vão além da escola elementar, influenciando fortemente todo o subsequente desenvolvimento matemático.

Em uma pesquisa realizada por Torbeyns et al. (2015), foram comparados resultados de alunos em relação ao estudo de frações de três países: Estados Unidos da América (EUA), Bélgica e China. Nesse estudo foram enfatizados 3 conceitos principais: frações na reta numérica, comparação de frações e operações com frações. Como conclusão, os pesquisadores destacaram que:

> [...] observamos diferenças claras entre os estudantes belgas, chineses e norte-americanos em níveis absolutos de conhecimento de frações. Os estudantes chineses obtiveram escores mais altos em todas as tarefas de frações do que os estudantes dos EUA; esses resultados foram observados tanto no 6º quanto no 8º ano. Além disso, os estudantes belgas foram consistentemente mais precisos que seus pares dos EUA. As diferenças esperadas de desempenho entre estudantes belgas e chineses, no entanto, foram observadas apenas nas tarefas mais difíceis. Nossos achados revelaram diferenças de desempenho entre os dois últimos grupos de estudantes nas linhas 0-5 e divisão da fração, diferenças semelhantes não estavam presentes na linha numérica e na comparação de magnitudes com frações de 0 a 1 ou na adição da fração. (TORBEYNS et al., 2015, p. 16, tradução nossa)

Essa pequisa verificou diferenças entre os países no desempenho em realizar estimativas na reta numérica, na comparação de frações e na aritmética. Também constatou que os índices de instrução dos professores influenciaram no resultado da pesquisa. A qualidade de instrução dos alunos pode intensificar ou debilitar o entendimento de frações, sendo que a habilidade individual do conhecimento em frações pode ser melhorada se as oportunidades de aprendizagem para todos alunos, desempenhadas pelo professor, forem maximizadas.

> O presente estudo forneceu evidências sugestivas da influência do conhecimento matemático dos professores e os níveis de instrução na aprendizagem da fração. Os estudantes chineses, instruídos por professores com rico conhecimento matemático e enfatizando as interpretações na reta numérica das frações, tiveram melhor desempenho na compreensão de frações e tarefas de aritmética fracionária do que os estudantes norte-americanos, que são frequentemente ensinados por professores com entendimento matemático menor. Os estudantes belgas, ensinados por professores cujos conhecimentos matemáticos parecem estar entre os professores da China e dos EUA, cometeram menos erros do que os seus colegas americanos em todas as tarefas fracionárias, mas tiveram mais dificuldade do que seus pares chineses nas frações mais difíceis, como tarefas de fazer estimativas na reta numérica de 0-5 e divisão de frações. (TORBEYNS et al., 2015, p. 20, tradução nossa)

Em Portugal, o ensino de matemática é regido pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). O documento oficial orienta a iniciação do ensino de frações no primeiro ciclo do ensino básico, pois tem o objetivo de encaminhar os alunos a uma noção inicial de frações e seus diferentes significados tendo como recurso a intuição (PORTUGAL, 2007). O PMEB destaca o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática como competências imprescindíveis. Vasconcelos, Mamede e Dorneles (2017), em trabalho realizado no Brasil e em Portugal, compararam a aprendizagem de frações entre as duas nações, tendo como questão de estudo e comparação a relação inversa entre duas variáveis, relação parte-todo, quociente, ordenação e equivalência. Ao analisar os resultados foi observado que os alunos tem uma melhor compreensão de quociente em relação a situação parte-todo.

Vasconcelos, Mamede e Dorneles (2017) relatam que as crianças portuguesas, ao responderem os problemas de relação inversa, utilizaram justificativas com argumentos mostrando um alto nível de compreensão em situações de quociente, que indicam que os estudantes portugueses são capazes de produzir raciocínio matemático e comunicação matemática, como proposto pelo PMEB. Nessa categoria os estudantes brasileiros também tiveram um percentual elevado, porém foi observado nas justificativas dos brasileiros uma discrepância.

> No entanto, a relação direta e também as categorias inconclusivas/inválidas foram utilizadas pelos estudantes brasileiros e tiveram um percentual maior na situação parcial. Este resultado é consistente com o desempenho desses alunos, que experimentaram dificuldades em situações parciais. No Brasil, essa dificuldade pode ser atribuída ao baixo uso e à exploração de estratégias pelos alunos que usam o raciocínio para resolver problemas matemáticos. (VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017, p. 264, tradução nossa)

Foi percebido também a dificuldade dos alunos, tanto os brasileiros quanto os portugueses, no que se refere à equivalência de frações em relação à ordenação. Em geral, ao se comparar o desempenho dos alunos das duas nações, os portugueses foram mais bem sucedidos em todas as formas de problemas do que os brasileiros. Em outro estudo, Dorneles, Mamede e Nunes (2008) já haviam obtido resultados semelhantes. Eles destacam como consequência do resultado brasileiro, o início no terceiro ciclo e o tempo em que são trabalhadas as frações em sala de aula.

> Em Portugal, as crianças têm um contacto informal com o conceito de fração no segundo ano e formalmente no terceiro ano, de acordo com a orientação curricular oficial (PORTUGAL, 2007). No Brasil, apesar do fato de que a orientação curricular (BRASIL, 1997) indicar o contato formal na quarta série, os professores muitas vezes evitam explorar frações. Além disso, a falta de conhecimento conceitual sobre frações pelos professores pode estar relacionada aos desafios que eles enfrentam ao usar procedimentos que envolvam diferentes significados do conceito. Dessa forma, as situações de ensino tornam-se limitadas (HALLETT et al., 2012).

Nos EUA, assim como no Brasil, o ensino é baseado em um documento formulado por vários estudiosos, pesquisadores e professores. No Brasil o documento oficial é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual será mais enfatizada na seção seguinte. Nos EUA o documento oficial é o *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI), que é um conjunto de diretrizes para o ensino, descritos de forma concisa e objetiva, o qual tem o propósito de garantir que os alunos depois do Ensino Médio estejam prontos para ingressarem na universidade, cursos técnicos ou no mercado de trabalho.

> O objetivo desta iniciativa? Desenvolver um conjunto de diretrizes curriculares nacionais que garantam que os alunos em cada estado estejam no mesmo nível que os estudantes com melhor desempenho de outros países do mundo e que eles adquiram o conhecimento e habilidades que irão prepará-los para o sucesso na educação de nível superior e na arena global. (KENDALL, 2011, p. 1, tradução nossa)

Um dos colaboradores no desenvolvimento deste documento é o matemático Hung-Hsi Wu, o qual destina seus trabalhos à melhoria do ensino de Matemática nos EUA. Wu acredita que se os professores dominassem a matemática, eles ajustariam os livros didáticos com o objetivo de dar sentido aos conteúdos nele presentes. Wu se comprometeu em orientar os professores e educadores da Educação Básica, na intenção de sanar as falhas no ensino de matemática. Como prova de seu comprometimento, Wu em uma entrevista à revista *Mathematical Medley*, fez a seguinte declaração:

> Mas nossos professores não sabiam matemática suficiente, portanto eles não podiam ajudar os estudantes a entenderem o sentido matemático nos livros didáticos. Então a primeira coisa que eu queria era ensinar professores de matemática. (LEONG, 2012, p. 9, tradução nossa)

Ao ver que o conceito de frações, em nível escolar, não é simples, Wu elaborou um relatório técnico sobre o ensino de frações e seu desenvolvimento em sala de aula, o qual pode ser encontrado no documento, *Teaching Fractions According To The Common Core Standards* (WU, 2011). O trabalho de Wu será explicado mais adiante.

2.1 O Ensino de Frações no Brasil

A BNCC (BRASIL, 2017) traça objetivos a serem alcançados no ensino de matemática, assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) (PCN), que orientam e norteiam o ensino de matemática no Brasil. De acordo com os PCN (Brasil, 1997) o ensino de matemática deve envolver concepções que formem cidadãos que identifiquem a importância da disciplina, que a valorizem como ferramenta para entender seu meio e que a reconheçam como área do conhecimento que incentiva o interesse, a investigação, a curiosidade e a capacidade para resolver problemas.

O ensino de frações é iniciado no 3º ano do Ensino Fundamental, o qual insere uma ideia de divisão e tem como objetivo principal associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. No 4º ano são introduzidas as frações unitárias mais usuais $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100})$ como unidades de medida menores do que uma unidade, e é proposto que se utilize a reta numérica como recurso.

No 5º ano o conteúdo de frações é mais abrangente, devendo ser trabalhada a representação fracionária dos números racionais, além do reconhecimento, significação, leitura e representação na reta numérica, comparação e ordenação de números racionais na forma fracionária, frações equivalentes, relação na reta numérica, cálculo de porcentagens e representação fracionária, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017).

Os PCN (BRASIL, 1997) orientam um trabalho envolvendo situações contextualizadas com a proposta de levar os alunos a compreenderem que só os números naturais não serão suficientes para resolver alguns problemas. Também indicam competências que o aluno deverá desenvolver até o final da primeira fase do ensino fundamental, as quais devem fazer parte do critério de avaliação.

> Espera-se que o aluno resolva problemas utilizando conhecimentos relacionados aos números naturais e racionais (na forma fracionária e decimal), às medidas e aos significados das operações, produzindo estratégias pessoais de solução, selecionando procedimentos de cálculo, justificando tanto os processos de solução quanto os procedimentos de cálculo em função da situação proposta (BRASIL, 1997, p. 63).

A compreensão dos números racionais demanda tempo e uma abordagem adequada, pois é necessária a quebra de paradigmas construídos pelos próprios alunos em relação aos números naturais, que são transpostos ao novo conjunto (BRASIL, 1997). Esses paradigmas estão relacionados a variados fatores como:

- Os números racionais podem ser representados por infinitas e diferentes escritas fracionárias. Por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$,$\frac{6}{12}$,$\frac{5}{10}$ são diferentes representações de um mesmo número;

- A comparação entre os números é uma outra dificuldade. Por exemplo, os alunos estão familiarizados com a relação $5 > 4$, e terão que reconhecer a escrita $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ como não contraditória;

- Na multiplicação de um número natural por outro natural (sendo esse diferente de 0 ou 1), é de se esperar que resulte em um número maior que ambos. Porém, ao se multiplicar 10 por $\frac{1}{5}$, o produto é menor do que um dos números, no caso, o 10.

A prática mais comum para explorar o conceito de fração e que envolve a relação parte-todo é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais. A relação parte-todo se apresenta quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes (BRASIL, 1997).

O ensino de frações deve ser estruturado em uma proposta que proporcione experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo. E esse tempo é viável, visto que o ensino será introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental e consolidado nos anos finais (BRASIL, 1997).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), ao final dos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos devem conseguir lidar com tarefas que envolvam medições. Dessa forma, podem verificar a necessidade de outros números, que não os naturais, na resolução de tais problemas.

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos inciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo [...]. (BRASIL, 1998, p. 101)

Na fase seguinte do Ensino Fundamental, o conceito de frações deve abranger diferentes significados, dentre eles a relação parte/todo, a divisão e a razão. Dessa forma, espera-se a consolidação dessas acepções por meio de um trabalho sistemático, que possibilite a análise e a comparação de diversas situações-problema (BRASIL, 1998).

No 6º ano, o conteúdo de frações torna-se mais detalhado utilizando os significados parte/todo e quociente, em que os conteúdos trabalhados são: equivalência, comparação, adição e subtração, cálculo da fração de um número natural, adição e subtração de frações. No 7º ano, o aprofundamento dos números fracionários torna-se mais abrangente e quase totalizado. Nessa fase, espera-se que os alunos atinjam as seguintes habilidades:

> Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

> Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
>
> Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
>
> Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
>
> Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2017, p. 307)

Após verificação dos textos dos PCN e da BNCC, em todas as suas orientações, e analisar pesquisas, trabalhos e avaliações de desempenho nacional, pode-se perceber que o ensino de frações possui um entrave. Isso ocorre pois as frações são ensinadas separadamente de contextualizações, não se relacionando com o conjunto dos números inteiros.

> O número racional é um assunto considerado importante na escolaridade básica de matemática e o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. Este estudo pressupõe que a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são "personalidades" que o número racional assume, representadas por notações, da forma $\frac{a}{b}$, decimal e percentual. (ROMANATTO, 1999, p. 37)

Em relação à aprendizagem, os alunos podem até demonstrar algumas habilidades em utilizar os números racionais, sem necessariamente ter um entendimento claro do conceito de frações.

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não o tem. Elas usam os termos fracionais certo; elas falam sobre fração coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, sem que ninguém perceba. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191)

As avaliações nacionais instituídas pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), do ano de 2017, mostram como está o nível dos alunos das escolas públicas do Brasil. Ao analisá-las, percebe-se que os alunos do 9º ano obtiveram o nível 3 de 9 de proficiência em matemática[2]. Dentre os objetivos que foram alcançados pelos alunos, estão destacados abaixo os do bloco *Números e Operações*, que são referentes aos números racionais em sua forma fracionária:

> Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas.
>
> Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três.
>
> Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. (SAEB, 2018, p. 1)

Porém o nível de proficiência vai até o 9 e muitos objetivos não foram alcançados pelos alunos. Dentre eles estão:

> Associar uma fração com denominador dez à sua representação decimal.
>
> Determinar, em situação-problema, a adição e multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros.
>
> Reconhecer frações equivalentes.
>
> Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema.
>
> Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes.
>
> Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais.
>
> Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria.
>
> Associar uma fração à sua representação na forma decimal. (SAEB, 2018, p. 3-6)

Visto isso, pode-se considerar que as frações não são compreendidas em sua totalidade pelos alunos do ensino fundamental. No próximo capítulo tem-se uma discussão mais abrangente sobre os múltiplos significados relacionados a esse conceito, que foram brevemente citados ao longo desse capítulo.

[2] Informações disponíveis em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-que-apenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-aprendizagem-considerados-adequados-em-lingua-portug/21206>. Acesso em: 13 fev. 2019.

3 FRAÇÕES E SUAS INTERPRETAÇÕES

No capítulo anterior foram expostos dados que ratificam que o ensino de números racionais na forma fracionária ainda é um importante obstáculo na aprendizagem da matemática. No presente capítulo trata-se das variadas formas de se interpretar essa representação, cujo entendimento pode auxiliar a superar parte das adversidades relativas a esse assunto.

As frações fazem parte das vidas das pessoas desde o nascimento. No entanto, a ênfase na contagem de números inteiros desde a infância reforça a ideia de que quando a palavra número é dita, automaticamente se relaciona a números inteiros. A multiplicação e divisão de frações, por exemplo, é um tópico especialmente problemático, tanto para ser ensinado quanto para ser aprendido (BRUCE; BENNETT; FLYNN, 2014).

As dificuldades com frações percorrem todo o período escolar e persistem durante a fase adulta de uma pessoa.

> Os campos da ciência, tecnologia, engenharia e matemática demandam conhecimento considerável de frações; um instável base em frações pode impedir que os indivíduos prossigam em tópicos de matemática avançada e afastem os alunos de um número significativo de oportunidades de carreira na vida posterior. Na medicina, as implicações do entendimento inadequado de frações pode ser severo; por exemplo, pediatras, enfermeiras e farmacêuticos [...] foram testados por erros resultantes do cálculo de doses de medicamentos para os cuidados intensivos neonatais [...] Dos erros de cálculo identificados, 38,5% dos erros dos pediatras, 56% dos erros dos enfermeiros e 1% dos erros dos farmacêuticos resultaram na administração de 10 vezes a dose prescrita [...]. Ajudar os alunos a obter uma base sólida em matemática em geral e em frações, em particular, tem ramificações a longo prazo, sugerindo que vale a pena gastar tempo e esforço para melhorar a compreensão do aluno nos primeiros anos, afim de garantir ao aluno o sucesso em matemática, na carreira e na vida. (BRUCE; CHANG; FLYNN, 2013, p. 6, tradução nossa)

Por isso, a busca por melhorias no processo de ensino-aprendizagem de frações se faz tão urgente e necessário, visto ainda que impacta diretamente todo o conhecimento matemático do aluno, inclusive o conhecimento algébrico (WU, 2005). As muitas interpretações de uma fração, que foram citadas no capítulo anterior, serão melhor especificadas a seguir.

3.1 Os diferentes significados

Os números racionais, em sua forma fracionária, possuem significados variados. Os estudos de Kieren (1976) deram início à discussão sobre esse assunto. De acordo com o autor, para uma maior apreensão sobre o conceito de número racional, atividades que lidem com suas muitas interpretações são necessárias.

Kieren (1976) traz uma lista com sete acepções para os números racionais. São elas:

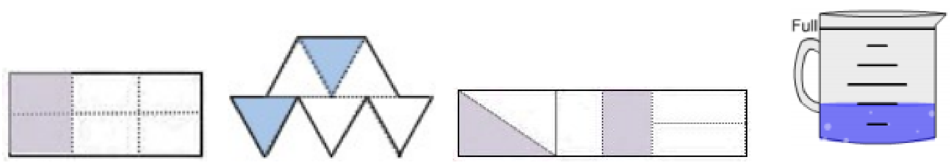
- frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas, divididas;
- classes de equivalência de frações. Logo, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\}$ são números racionais;
- frações decimais, relacionados a uma extensão natural dos números naturais;
- números da forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são inteiros e $q \neq 0$;
- operadores multiplicativos;
- elementos de um corpo ordenado e infinito, isto é, existem números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$;
- medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Kieren (1976) ressalta que esses significados não são independentes. Além disso, o autor afirma que esses sentidos são isomórficos, sendo definidas apropriadas operações e relações. Todavia, essas interpretações permitem que os números racionais sejam estudados segundo perspectivas diferenciadas.

A partir das considerações de Kieren muitas pesquisas foram desenvolvidas. No entanto, os critérios para classificação dos números racionais não são claros (NUNES et al., 2009). Além disso, o número de interpretações tratadas difere de autor para autor. Em Brasil (1998), os significados citados são os de parte/todo, divisão e razão.

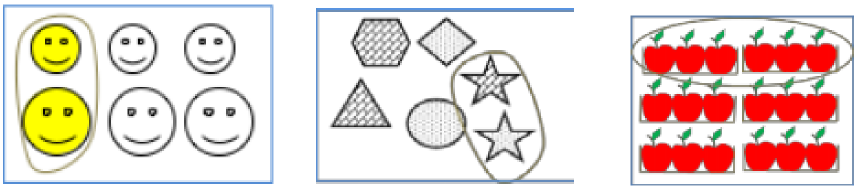
Segundo Silva (2005), a concepção parte/todo está ligada à ação de dividir uma grandeza contínua (Fig. 1) (comprimento, área, volume, por exemplo, um pedaço de corda) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos, por exemplo, um determinado número de balas) em partes iguais em quantidade de objetos (Fig. 2).

Figura 1 – Fração $\frac{2}{6}$ no modelo contínuo (parte/todo)



Fonte: Bruce, Chang, Flynn (2013, p. 8)

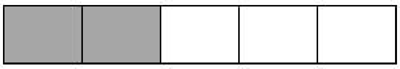
Figura 2 – Fração $\frac{2}{6}$ no modelo discreto (parte/todo)



Fonte: Bruce, Chang, Flynn (2013, p. 9)

De acordo com Wheeldon (2008), os estudantes tendem a confundir a relação parte-todo com a parte-parte. Pode-se citar a Fig. 3 como exemplo. A fração representada pela figura é $\dfrac{2}{5}$, mas há alunos que consideram que a parte sombreada da figura é representada pela fração $\dfrac{2}{3}$. Ou seja, os alunos tendem a fazer uma relação parte sombreada sobre parte não sombreada.

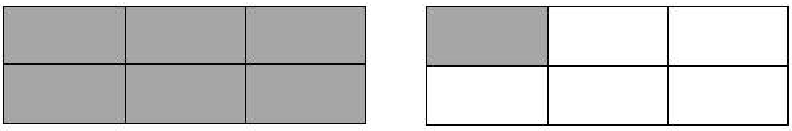
Figura 3 – Representação da fração $\frac{2}{5}$



Fonte: Albuini (2017, p. 15)

Outra problema é relativo às frações ditas impróprias, em que o numerador é maior que o denominador. A fração $\dfrac{7}{6}$, que representa a parte sombreada na Fig. 4, pode trocada por $\dfrac{7}{12}$ (WHEELDON, 2008).

Figura 4 – Representação da fração $\frac{7}{6}$

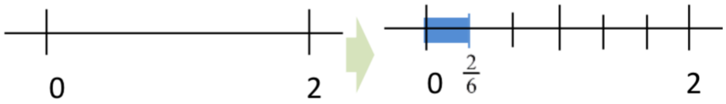


Fonte: Albuini (2017, p. 15)

Tem-se que uma fração $\dfrac{n}{m}$, onde m, n são inteiros positivos, com $m \neq 0$, é um quociente (ou divisão) quando, por exemplo, uma unidade qualquer igual a 2 é dividida em 6 partes iguais, como visto na Fig. 5.

Na interpretação parte-todo, a fração $\dfrac{2}{3}$ tem como significado a divisão de uma unidade em três partes iguais, considerando-se duas dessas partes. Já na acepção quociente, duas unidades são divididas em três partes iguais (BRASIL, 1998). Em relação ao significado razão, segundo os PCN:

Figura 5 – Interpretação quociente



Fonte: Bruce, Chang, Flynn (2013, p. 9)

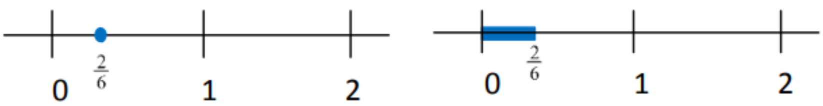
> Uma interpretação diferente das anteriores [parte-todo, divisão] é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes e se conclui que $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes (BRASIL, 1998, p. 102, grifo nosso).

Nos PCN, é citado também a acepção "operador".

> A essas três interpretações, bastante interessantes de serem exploradas neste ciclo [parte-todo, quociente, razão], acrescenta-se mais uma, que será trabalhada nos ciclos posteriores. Trata-se do significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo "que número devo multiplicar por 3 para obter 2"(BRASIL, 1997, p. 68, grifo nosso).

A interpretação "ponto na reta", que é parte fundamental das pesquisas a serem discutidas no Capítulo 3, é baseada na distância do ponto zero até o valor da fração, tendo como unidade de medida um segmento que vai do ponto zero até o ponto um (Fig. 6).

Figura 6 – Interpretação ponto na reta



Fonte: Bruce, Chang, Flynn (2013, p. 8)

O texto da BNCC, em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, traz como expectativas sobre a compreensão dos alunos em matemática que:

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, **com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica** (BRASIL, 2017, p. 225, grifo nosso).

Segundo Siegler et al. (2010), é necessário que os alunos compreendam que é possível obter frações por meio da expansão do sistema numérico, partindo-se dos números inteiros. As retas numéricas funcionam como uma interessante forma de representação para ensinar também os demais significados ligados à noção de fração. Sobre a acepção de ponto na reta numérica, deve-se:

> Ajudar os alunos a reconhecerem que as frações são números e que eles expandem o sistema de números além dos números inteiros. Use linhas numéricas como uma ferramenta de representação central no ensino desse e de outros conceitos de fração desde as primeiras séries.
>
> Use atividades de medição e retas numéricas para ajudar os alunos a entenderem que as frações são números, com todas as propriedades que os números compartilham.
>
> Fornecer oportunidades para que os alunos localizem e comparem as frações nas linhas numéricas.
>
> Use linhas numéricas para melhorar a compreensão dos alunos sobre frações equivalentes, densidade de fração (o conceito de que há um número infinito de frações entre quaisquer duas frações) e frações negativas.
>
> Ajudar os alunos a entender que as frações podem ser representadas como frações comuns, decimais e porcentagens, e desenvolver a capacidade dos estudantes de transitarem entre essas formas (SIEGLER et al., 2010, p. 1, tradução nossa).

A identificação dessas múltiplas acepções pelos alunos está ligada a uma melhor compreensão do conceito de frações. Um passo importante para que tal objetivo seja alcançado é que esse assunto seja introduzido de maneira bem clara e objetiva. Tal exposição será tratada no próximo capítulo, considerando-se como ponto de partida a representação de uma fração como ponto na reta numérica.

4 A PROPOSTA DE WU

Nos capítulos anteriores foram expostos alguns fatos relevantes para que seja possível a compreensão das peculiaridades sobre o tema em discussão. No presente capítulo são apresentados aspectos relativos à exposição da fração como ponto na reta, que foram baseados nos trabalhos do professor Wu.

O professor Emérito Hung-Hsi Wu, da Universidade da Califórnia, em Berkeley, realiza estudos afim de melhorar a educação nos EUA. Ele participou da elaboração do *Common Core Standards for Mathematics* (CCSSM), que é equivalente à BNCC do Brasil, relacionada à área matemática. Os aspectos das pesquisas desse professor abaixo relacionados têm como base os textos: Wu (2002), Wu (2008) e Wu (2011).

A abordagem para o ensino de frações exposta por Wu (2002), segundo o próprio autor, não é uma novidade pela introdução de novos conceitos. O que é colocado como diferente é a maneira como o assunto é introduzido. Nesse caso, no lugar de se aceitar variados significados para uma fração, basta partir da definição de que é um ponto em uma reta, deduzindo os demais a seguir.

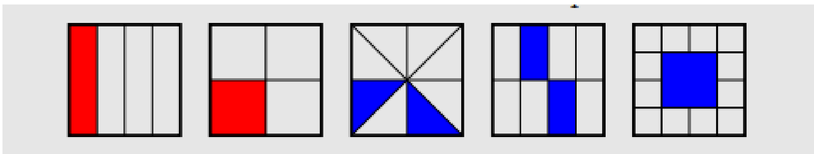
Wu (2002) destaca que a razão principal para o fracasso dos alunos em aprender frações está relacionada à apresentação que se faz do conteúdo. São poucos os alunos que conseguem definir uma fração, pois reconhecem as frações apenas como uma série de manipulações feitas para aprender. Ocorre, assim, uma divisão entre entendimento e habilidades.

Como principal forma de ensino de frações, Wu define uma fração como um ponto na reta numérica. Ao apresentar as frações, deve-se considerar as frações como uma extensão dos números inteiros, definindo-a como $\dfrac{m}{n}$; m e n inteiros positivos, com $n \neq 0$.

O processo de ensino-aprendizagem de frações desmembra-se em duas fases. Na primeira fase, são mostrados aos estudantes dos anos iniciais os variados meios onde as frações são empregadas e os cálculos simples utilizando equivalências e intuição. Eles estudam representações de frações em tiras fracionárias, retângulos, barras fracionárias, linhas numéricas e outras formas de manuseio. Deve sempre ser evidenciado, nessa fase exploratória, a unidade fixa (o todo), durante uma discussão, pois os alunos devem aprender que a área do retângulo é o todo e não a forma do retângulo (WU, 2011).

Por isso, de acordo com Wu (2002), a pizza não é um bom exemplo para tratar de frações, pois o círculo não possui flexibilidade na divisão de sua área em partes iguais, a não ser por setores circulares e também porque não pode ser utilizado para esboçar a multiplicação de frações. Inicialmente são utilizadas as frações unitárias, que são formadas por particionamentos de um todo em partes iguais, tomando uma parte (Fig. 7).

Figura 7 – Representação da fração $\frac{1}{4}$



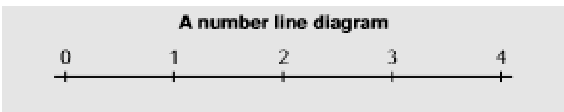
Fonte: The Common Core Standards Writing Team (2018, p. 7)

Nas representações o quadrado é o todo. Os dois quadrados à esquerda tem a mesma forma e tamanho em cada parte da sua divisão em quatro e a mesma área. Nos três quadrados à direita, a área em azul é $\frac{1}{4}$ de toda a área, apesar de não ser tão visível que foi tomado uma parte em uma divisão do quadrado em quatro partes da mesma forma e tamanho.

Na segunda fase, que segue a partir do 4º ano, as frações devem ser concebidas como um número, pois serão iniciadas as operações com frações voltadas à resolução de problemas. As frações devem ser bem definidas aos alunos com o intuito de fazê-los familiarizados com as operações aritméticas. As demais representações de frações devem ser tomadas gradualmente tendendo ao modelo de fração como um ponto na reta numérica.

Os alunos devem compreender que a reta numérica é formada por intervalos unitários entre os números inteiros e seus consecutivos, sendo que cada intervalo tem uma unidade como medida (Fig. 8).

Figura 8 – Reta numérica.



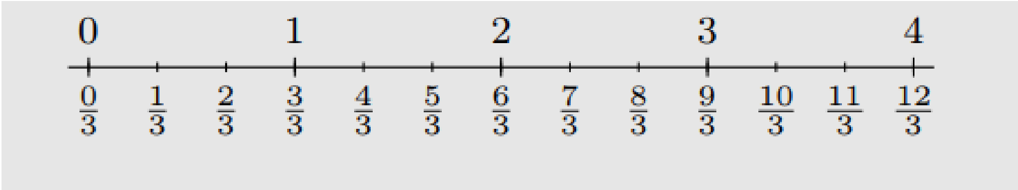
Fonte: Common (2018, p. 3)

Ao seccionar a unidade em três partes na reta numérica obtém-se segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$, onde é possível localizar o número $\frac{1}{3}$ e outras frações com denominador 3 (Fig. 9).

Ao experimentar a segmentação na reta numérica os alunos podem perceber que várias frações marcam o mesmo ponto na reta e, por consequência, iguais; ou seja, são frações equivalentes. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$ e também a $\frac{3}{6}$.

De acordo com Wu, as frações unitárias são os blocos básicos de frações, no mesmo sentido que o número 1 é o bloco básico de construção dos números inteiros, ou seja, na medida que todo número inteiro é obtido combinando 1 com um número adequado. Assim, pode-se obter qualquer fração combinando um número adequado de unidades fracionárias.

Figura 9 – Reta numérica dividida por 3



Fonte: Common (2018, p. 8)

Wu (2011) destaca as vantagens da reta sobre os modelos com área, como pizzas e retângulos pois, ao se dividir o todo em partes iguais, apenas o comprimento está envolvido, o que torna a reta mais simples. Também destaca que a adição e a subtração de frações são modeladas com mais facilidade na reta numérica.

Visto que o número 1 é o comprimento do segmento unitário, ou seja, o todo, percebe-se que o sentido da unidade 1 define como deve ser interpretada cada fração. Esse fato pode ser integrado na contextualização das frações em questões cotidianas.

Como exemplo, se 1 é o volume de água em um copo, então $\frac{1}{4}$ é um quarto de um copo de água em litros. Em outro aspecto, se 1 é a largura da sala de aula, então $\frac{1}{4}$ é um quarto da largura da sala de aula.

Uma notação que permite explicitar duas frações iguais, ou seja, o mesmo ponto na reta, é utilizando o símbolo =. Assim, pode-se denotar:

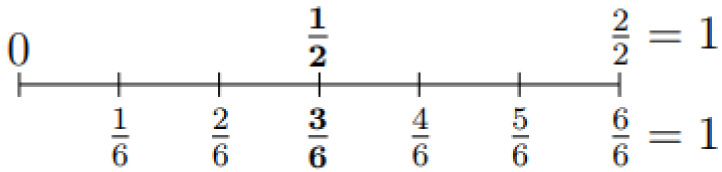
- $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \ldots = \frac{2n}{n} = \ldots$, para todo $n \neq 0$
- $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} \ldots = \frac{3n}{n} = \ldots$, para todo $n \neq 0$
- $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} \ldots = \frac{4n}{n} = \ldots$, para todo $n \neq 0$

E assim por diante. Com essa notação, os alunos podem perceber que:

- $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \ldots = \frac{n}{n} = \ldots$, para todo $n \neq 0$

Essas frações iguais são chamadas de frações equivalentes. Wu destaca que esse conceito de fração equivalente não é intuitivo, visto que é ensinado como sendo frações que determinam o mesmo valor. Por isso, ao utilizar o conceito na reta, a questão de igualdade é precisa e visível. Ao se dividir o segmento de 0 a 1 pela metade e dividindo-se o mesmo segmento em 6 partes iguais, tem-se $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ (Fig. 10).

Figura 10 – frações equivalentes



Fonte: Wu (2011, p. 13)

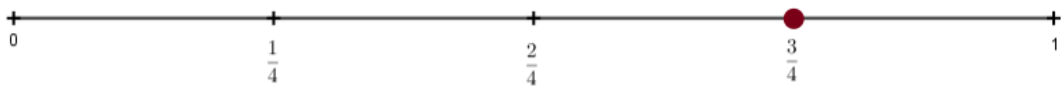
Wu (2002) ressalta a importância de reforçar aos alunos o conceito de que cada fração é uma junção de frações unitárias. Como exemplo: a fração $\frac{3}{5}$ são 3 cópias da fração $\frac{1}{5}$, da mesma forma a fração $\frac{7}{8}$ são 7 cópias da fração $\frac{1}{8}$.

É importante estabelecer a igualdade entre frações quando seu numerador e seu denominador são ambos multiplicados pelo mesmo número inteiro diferente de zero, ou seja, sua posição na reta numérica não é alterada. Assim, se a fração é $\frac{3}{4}$ então:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$$

Como exemplo, tome a fração $\frac{3}{4}$ na reta numérica (Fig. 11).

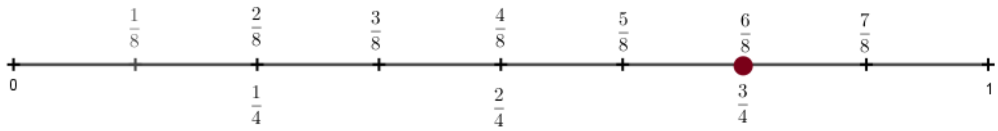
Figura 11 – Representação na reta da fração $\frac{3}{4}$



Fonte: Elaborada pela autora

Para mostrar que $\frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4}$, o número 2 indica que cada segmento $\frac{1}{4}$ seja subdividido em 2 partes iguais, logo pode-se perceber que $\frac{3}{4}$ coincide com $\frac{6}{8}$ (Fig. 12).

Figura 12 – Frações equivalentes



Fonte: Elaborada pela autora

Dessa forma, tem-se o conceito de que uma fração não sofre alteração quando seu numerador e denominador são ambos multiplicados pelo mesmo número inteiro diferente de zero, isto é, sua posição na reta numérica não muda após a operação. Donde, formalmente, pode-se dizer que uma fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros positivos com $b \neq 0$ e, para qualquer $n \neq 0$, tem-se $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$.

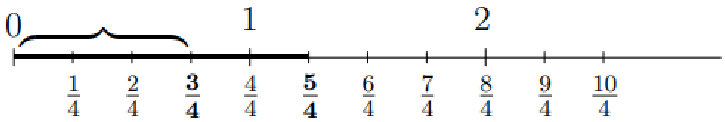
Esse fato importante é geralmente apresentado como uma divisão, onde é utilizado como simplificação de frações, em que se afirma: $\frac{28}{42} = \frac{28 \div 7}{42 \div 7}$. Esse fundamento deve ressaltar o conceito de que quaisquer duas frações podem ser escritas em função de um mesmo denominador.

As frações equivalentes são de suma importância, pois são utilizadas para fazer as demais operações com frações como soma, subtração, multiplicação e divisão. Tornando-se imprescindíveis para o aprendizado de frações. Tome duas frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{5}$, as quais podem ser reescritas com o mesmo denominador 40. Logo:

$$\frac{15}{40} = \left(\frac{3 \times 5}{8 \times 5}\right) \text{ e } \frac{32}{40} = \left(\frac{4 \times 8}{5 \times 8}\right)$$

Há também a desigualdade entre as frações, ao se comparar duas frações na reta numérica. A fração que está à esquerda da outra é dita menor e a que está à direita é dita maior, as quais tem como notação $<$ e $>$, respectivamente. Porém só é possível comparar frações quando ambas se referem ao mesmo todo, ou seja, tem o mesmo denominador (Fig. 13).

Figura 13 – Comparação entre frações



Fonte: Wu (2011 p. 14)

> Estes conceitos de "menor que" e "maior que" devem ser cuidadosamente explicados para os alunos, porque da maneira usual em que as frações são ensinadas, nunca é claro o que esses conceitos significam. Esse significado de "menor que"(ou "maior que") faz sentido perfeito, intuitivamente, porque se uma fração, digamos $\frac{3}{4}$, fica à esquerda de $\frac{5}{4}$, então o segmento de 0 a $\frac{3}{4}$ é obviamente mais curto que o segmento de 0 a $\frac{5}{4}$. Portanto, o significado acima de $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ respeita essa intuição. (WU, 2011, p. 14, tradução nossa)

Quando os denominadores das frações são diferentes, é importante que os alunos percebam que é necessário que se chegue em denominadores ou numeradores comuns, ou que haja uma unidade de referência. Como exemplo, tem-se as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{8}$.

A fração $\frac{5}{7}$ é igual a 5 cópias da fração $\frac{1}{7}$ e a fração $\frac{5}{8}$ é igual a 5 cópias da fração $\frac{1}{8}$. Logo $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, pois nas frações unitárias quanto maior o denominador menor é a fração. Portanto, $\frac{5}{7} > \frac{5}{8}$.

Em outro caso, como comparar as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{12}{11}$? Percebe-se que a fração $\frac{5}{6}$ é menor do que 1 e que a fração $\frac{12}{11}$ é maior do que 1, logo $\frac{5}{6} < \frac{12}{11}$.

Trazendo novamente o conceito de multiplicação do denominador e o numerador de uma fração pelo mesmo número inteiro, pode-se comparar frações utilizando um denominador comum. Sejam as frações $\frac{4}{9}$ e $\frac{9}{10}$. Qual delas é a maior? Utilizando o conceito acima, tem-se que: $\frac{40}{90} = \frac{4 \times 10}{9 \times 10}$ e $\frac{81}{90} = \frac{9 \times 9}{10 \times 9}$, donde $\frac{40}{90} < \frac{81}{90}$. Assim, $\frac{4}{9} < \frac{9}{10}$.

Quando o conceito de adição entre frações é inserido, torna-se essencial que os alunos possam fazer relações com o que já conhecem, Wu orienta a introduzir a noção de adição de frações a partir da adição entre números inteiros. A adição de números inteiros, levando em consideração a reta numérica, se trata de unir dois segmentos, por exemplo, $4 + 8$ (Fig. 14).

Figura 14 – Soma de Números inteiros

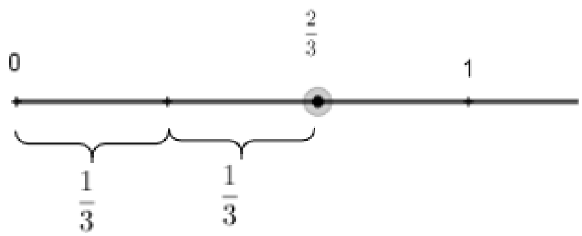
Fonte: Elaborada pela autora

O segmento 4 adicionado ao segmento 8 tem como resultado o segmento 12. Logo, para somar números fracionários utiliza-se a mesma analogia, adicionando um segmento ao outro. Inicialmente, os alunos não têm a necessidade de saber o valor das frações, apenas compreender que são junções de segmentos.

> O que vale a pena ressaltar é o fato de que os alunos agora podem ver a adição de frações como uma continuação direta do conceito de adicionar números inteiros. Esse tipo de conceito contínuo na matemática facilita a aprendizagem, porque mostra aos alunos que o novo conceito se encaixa com o que eles já sabem. (WU, 2011, p. 25, tradução nossa)

Posteriormente, trabalha-se com o bloco mais simples de frações, que são as frações unitárias. Sejam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$. Sabe-se que:

Figura 15 – Representação na reta numérica $\frac{2}{3}$



Fonte: Elaborada pela autora

O que faz retornar a ideia de que uma fração é a soma das frações unitárias referentes a ela.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

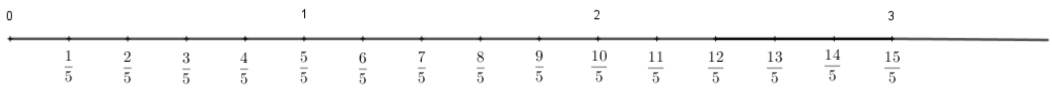
Como somar $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$? Utilizando a ideia descrita acima:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}=\frac{1+1+\ldots+1}{3}=\frac{2+5}{3}.$$

Nesse raciocínio, entende-se que ao adicionar frações com o mesmo denominador obtém-se uma fração com o mesmo denominador, cujo numerador é a soma dos numeradores. Ao adicionar um número inteiro a uma fração, observa-se a equivalência entre frações.

Ao somar $3+\frac{3}{5}$, sabe-se que $3=\frac{3\times 5}{5}=\frac{15}{5}$.

Figura 16 – Representação na reta numérica de $\frac{15}{5}$



Fonte: Elaborada pela autora

Há uma série de frações equivalentes a $\frac{15}{5}$ como $\frac{30}{10}, \frac{45}{15}, \ldots$ Porém, a fração que terá o denominador comum é a que será usada por conveniência. Logo, $3+\frac{3}{5}=\frac{15}{5}+\frac{3}{5}=\frac{15+3}{5}=\frac{18}{5}$.

Então, são conhecidos os números mistos, que são números inteiros somados à frações próprias (fração da qual o numerador é menor que seu denominador) que usualmente são representadas sem o sinal de adição como $3\,\frac{3}{5}$ e $4\,\frac{2}{7}$. Wu afirma que as frações mistas devem ser apresentadas aos alunos após o conceito de adição entre frações para uma aprendizagem contínua do conteúdo.

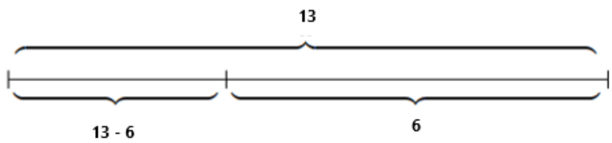
> [...] o conceito de um número misto é definido somente após a definição da adição entre frações. Números mistos parecem sempre ser introduzidos na escola em livros e textos logo após a introdução de frações, antes da adição de frações já é mencionado. Um número misto como $7\frac{1}{5}$ seria introduzido como "7 e $\frac{1}{5}$" sem dar a precisão que "e" significa "adicionar". Essa desconsideração da lógica na trajetória de aprendizagem, contribuiu para o não-aprendizado de frações. (WU, 2011, p. 26-27, tradução nossa)

Ao somar-se frações com denominadores diferentes, basta encontrar um denominador comum entre elas, utilizando a equivalência de frações. Como exemplo, ao somar $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$, sabe-se que $\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}$ e $\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{6}{10}$, as quais possuem o denominador comum 10. Logo, $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{6+5}{10}=\frac{11}{10}$ e da mesma forma ao somar $\frac{4}{7}+\frac{5}{21}$ tem-se $\frac{4}{7}=\frac{4\times 3}{7\times 3}=\frac{12}{21}$, no entanto a fração $\frac{5}{21}$ já se encontra com o mesmo denominador, donde $\frac{5}{21}+\frac{12}{21}=\frac{5+12}{21}=\frac{17}{21}$.

Em geral, se m, n, p e q são números inteiros então $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{mq}{nq}+\dfrac{pn}{nq}=\dfrac{mq+pn}{nq}$, com $n \neq 0$ e $q \neq 0$.

A subtração entre frações é semelhante à adição. Primeiramente, deve-se levar em consideração os conceitos já conhecidos nos números inteiros. Assim, ao subtrair-se 13 de 6, tiram-se 6 de 13. Utilizando a reta numérica, tem-se 6 de distância afastado do 13 (Fig. 17).

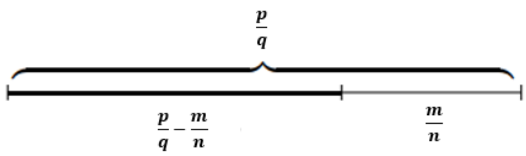
Figura 17 – Subtração de números inteiros



Fonte: Elaborada pela autora

Em relação às frações, deve-se ter a preocupação com sua ordenação, assim como nos números inteiros. Deve-se verificar, por exemplo, que $13 \geq 6$ antes de operar $13 - 6$. Logo, $\dfrac{p}{q} \geq \dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{p}{q} - \dfrac{m}{n}$ corresponde a tirar um segmento de comprimento $\dfrac{m}{n}$ de um segmento com comprimento $\dfrac{p}{q}$ (Fig. 18).

Figura 18 – Subtração entre frações



Fonte: Elaborada pela autora

Inicialmente com denominadores iguais, realiza-se subtração entre $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{15}{4}$. Primeiramente verifica-se a relação de ordem entre elas, donde $\dfrac{15}{4} > \dfrac{3}{4}$. Sendo assim, $\dfrac{15}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{15-3}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$, tem-se a interpretação de afastar 3 cópias de $\dfrac{1}{4}$ de 15 cópias de $\dfrac{1}{4}$. Esse é o significado preciso da subtração.

Da mesma forma que a adição, ao subtrair $\dfrac{8}{3}$ e $\dfrac{1}{5}$, sabe-se que $\dfrac{8}{3} > 1$ e $\dfrac{1}{5} < 1$, donde $\dfrac{8}{3} > 1 > \dfrac{1}{5}$. Logo $\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{8\times 5}{3\times 5} - \dfrac{1\times 3}{5\times 3} = \dfrac{40}{15} - \dfrac{3}{15} = \dfrac{40-3}{15} = \dfrac{37}{15}$.

Ao introduzir o conceito de multiplicação entre frações é importante vincular os conhecimentos já adquiridos sobre a multiplicação entre números inteiros. Inicialmente ao multiplicar um número inteiro a uma fração, lembra-se que $4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$ e que $2 \times 5 = 5 + 5$, da mesma forma quando se tem $3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ e, semelhantemente, $6 \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7}$. Como já visto no capítulo com a soma entre frações com mesmo denominador, tem-se $3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3} = \frac{6}{3}$ e $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{7} = \frac{30}{7}$.

A formalização do conceito de multiplicação entre frações é da seguinte maneira: Dada duas frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$, com $q \neq 0$ e $n \neq 0$, o produto entre elas, denotado por $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n}$, será o comprimento de p partes quando $\frac{m}{n}$ é dividido em q partes iguais. Outra interpretação é que $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n}$ é $\frac{p}{q}$ cópias de $\frac{m}{n}$. Essa relação entre a multiplicação de frações não foge do conceito de multiplicação entre um número inteiro e uma fração.

"É importante, nesse ponto, confirmar que essa definição de multiplicação fracionária não entra em conflito com a definição anterior de um número inteiro multiplicando uma fração"(WU, 2011, p. 46, tradução nossa).

Considere a multiplicação entre as frações $\frac{p}{q}$ e m. O produto será $\frac{p}{q} \times \frac{m}{1} = \frac{p \times m}{q \times 1}$, o que não conflita com a definição de multiplicação fracionária. A multiplicação possui características que sem cálculos se definem por:

Se $\frac{p}{q} > 1$, então $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} > \frac{m}{n}$. Se $\frac{p}{q} < 1$, então $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} < \frac{m}{n}$.

A divisão entre os números inteiros m e n com $n \neq 0$ onde $m \div n = q$ tem o significado de tomar um segmento m e dividi-lo em n partes iguais, que neste sentido estendido pode ser escrito como $\frac{m}{n}$. Onde, por exemplo, $36 \div 9 = 4$, pois $36 = 9 \times 4$, o qual genericamente se refere a $m \div n = q$ então $m = n \times q$. Considere que q (o quociente da divisão), seja uma fração. Logo, $m \div n = q$ e $m = n \times q$, sem perda de generalidade.

Ao conhecer o conceito de divisão entre os números inteiros, os mesmos podem ser transferidos para a divisão entre frações. Sejam A, B e C frações com $C \neq 0$. Se $A \div C = B$ então $A = C \times B$. Como exemplo, tome a divisão $3 \div \frac{1}{4} = C$, que implica em $3 = C \times \frac{1}{4}$. Pelo significado da multiplicação entre frações tem-se que C cópias da fração $\frac{1}{4}$ é igual a 3. Sabe-se que 4 cópias de $\frac{1}{4}$ é igual a 1 e 3 cópias de 1 é igual a 3. Assim, 4×3 cópias de $\frac{1}{4}$ é igual a 3.

Depois dessas definições, tem-se a explicação de que é um número negativo e, dessa forma, chega-se ao conjunto dos racionais. O conjunto dos números racionais é tomado, então, como sendo composto pela união entre as frações e suas reflexões com relação ao ponto zero, que são os racionais negativos.

Nesse capítulo foram expostos alguns itens, referentes ao ensino de frações, que constam em diversos trabalhos desenvolvidos por Wu. Tendo em vista algumas dessas propostas, exercícios que se utilizam desses conceitos serão apresentados no próximo capítulo.

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Nos capítulos anteriores foi exposto um cenário relativo ao ensino de frações, que se encontra em situação delicada. Tal fato acarreta problemas ao longo de todo processo de ensino e aprendizagem de matemática. A utilização da representação da fração na reta numérica pode ser uma estratégia na mudança desse quadro, auxiliando o aluno no entendimento desse conceito. No presente capítulo são apresentadas algumas propostas de exercícios baseados nessa premissa.

5.1 Metodologia

Durante toda a vida acadêmica de um aluno é possível perceber que, muitas vezes, o conceito de frações não é aprendido, como se pode concluir com os capítulos anteriores. Em geral, esse conteúdo está relacionado a fórmulas que não fazem sentido e que são empregadas sem nenhum entendimento. Partindo dessas afirmações foi realizada uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica, para verificação se, de fato, essa continua sendo a realidade nas escolas.

Foram utilizados diversos textos de autores que são referência quando o assunto em pauta é fração. Após constatação de que o tema ainda hoje envolve muitas dificuldades, optou-se por elencar exercícios que pudessem, de alguma forma, auxiliar professores no ensino de frações.

Como eixo principal na exposição dos exercícios foi utilizado o trabalho de Wu, que se vale da representação da fração na reta numérica de maneira a diminuir as lacunas no entendimento dos conceitos em questão. As pesquisas desse professor foram escolhidas por vislumbrarem uma forma mais coerente e clara na exposição do conteúdo, em que os detalhes são explicados e não somente fornecidas regras para memorização. Os exercícios aqui expostos foram baseados em textos guiados pelo CCSSI e também em trabalhos brasileiros que seguem a mesma linha de pensamento desse autor.

As atividades não são direcionadas a anos escolares específicos, pois o objetivo repousa na aprendizagem do conteúdo, independentemente de qualquer outro fator. Conforme exposto na Introdução, os alunos brasileiros de 15 anos que realizaram o Pisa não possuem conhecimento básico de frações. Assim tais exercícios podem, inclusive, ajudar estudantes que já estejam no Ensino Médio, pois esse é um assunto que acompanha toda a formação do estudante, impactando todo desenvolvimento matemático.

As questões a seguir tratam de temas sensíveis no ensino de frações que foram apontados ao longo desse TCC, como operações entre frações. Pretende-se fazer uma exposição que guie o professor na aplicação das atividades. Primeiramente, serão propostos exercícios que possibilitam a identificação das frações na reta numérica, que é o passo inicial no reconhecimento da fração como número. Tem-se ainda exercícios que envolvem frações equivalentes, comparação e operações com frações.

5.2 Atividades

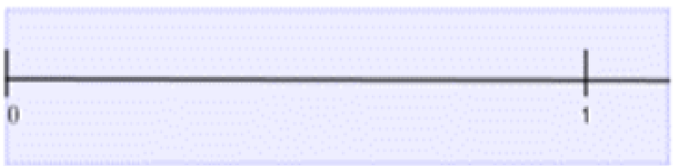
A seguir são elencadas algumas propostas de atividades alinhadas às ideias expostas no capítulo 3.

5.2.1 Atividade 1

Essa atividade foi adaptada de Ripoll et al. (2017). O objetivo da atividade é particionar um segmento da reta numérica em duas partes iguais, além de identificar frações na reta numérica.

Nessa atividade, o professor apresenta a seus alunos uma situação que corresponde a duas respostas dadas a seguinte questão: marcar a fração $\frac{1}{2}$ na reta numérica, que havia sido traçada em um pedaço de fita, como na Fig. 19:

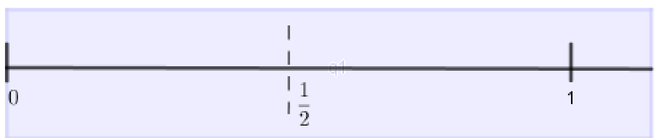
Figura 19 – Representação da fita



Fonte: Ripoll et al. (2107, p. 36)

As respostas são exibidas na Fig. 20 e na Fig. 21:

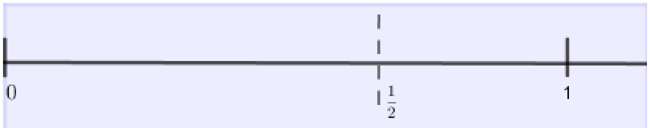
Figura 20 – Resposta 1



Fonte: Ripoll et al. (2107, p. 36)

A seguir, o professor pode perguntar a seus alunos se as respostas apresentadas estão corretas. Além disso, pode levar pedaços de fitas a eles, pedindo que marquem frações correspondentes a $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ e $\frac{5}{4}$ na reta numérica desenhada na fita.

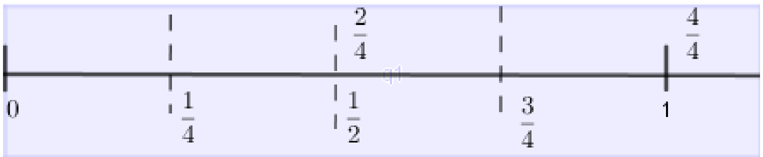
Figura 21 – Resposta 2



Fonte: Ripoll et al. (2107, p. 36)

Por meio de dobras na fita, que pode ser uma tira de papel, é possível a obtenção das divisões do segmento por ela representado. Dessa forma, os alunos irão obter as frações pedidas, podendo ser levantadas discussões sobre unidade, frações equivalentes e também sobre frações impróprias, cujo numerador é maior que o denominador e, portanto, que são maiores do que a unidade. Na Fig. 22 segue a reposta da atividade.

Figura 22 – Representação do exercício 1



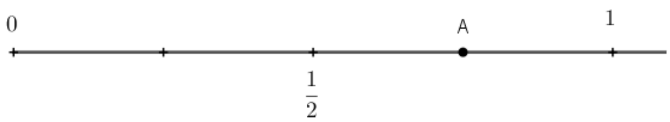
Fonte: Elaborada pela autora

5.2.2 Atividade 2

Esse exercício foi adaptado de Common (2011). Nessa atividade, objetiva-se a identificação de uma fração na reta numérica por meio da comparação de frações.

O professor pode mostrar aos alunos a Fig. 23. Sendo que o ponto A foi marcado na reta numérica abaixo, deve-se identificar qual é a fração que melhor representa tal ponto.

Figura 23 – Representação da fração



Fonte: Elaborada pela autora

Como opções de resposta, exibem-se:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{2}$

Os alunos devem observar que o segmento unitário $0 - 1$ está particionado em quatro partes iguais e que o ponto A encontra-se em seu terceiro sub-segmento. Logo, o ponto A representa a fração $\frac{3}{4}$.

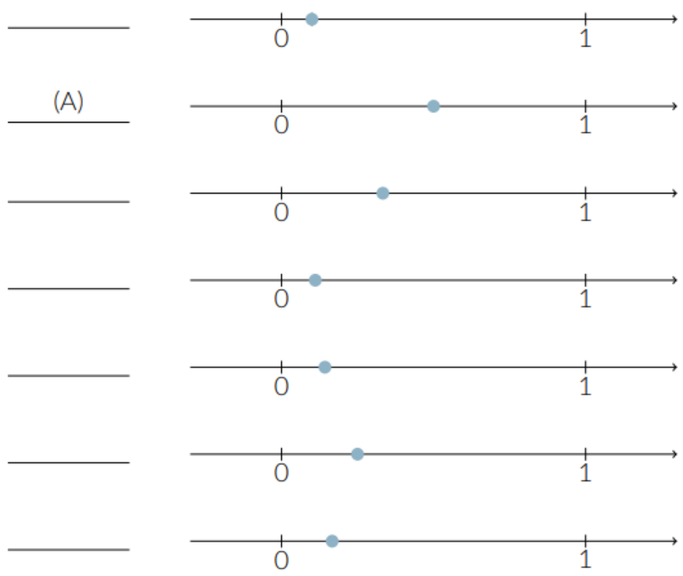
5.2.3 Atividade 3

Esta atividade também foi adaptada de Ripoll et al. (2017). Os objetivos são: identificar frações na reta numérica e também frações equivalentes.

Nestes exercícios, os alunos devem relacionar cada uma das frações a sua representação na reta numérica. Na Fig. 24, o ponto A está marcado como exemplo.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{7}$
g) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{1}{9}$ i) $\frac{1}{10}$

Figura 24 – Exercício 2

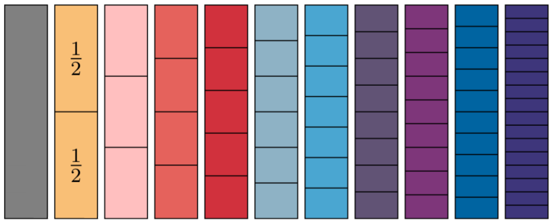


Fonte: Ripoll et al. (2017, p. 44)

Para relacionar as frações a suas representações na reta numérica, deve-se tomar o segmento de 0 até 1 como o todo, ou seja, como unidade, e particioná-lo de acordo com cada item. Para descobrir qual é o ponto na reta que representa a fração $\frac{1}{2}$, basta dividir o todo (o segmento de 0 a 1) em duas partes iguais e pegar a primeira marcação.

Para descobrir o ponto no segmento de reta que representa a fração $\frac{1}{3}$, deve-se particionar a unidade em três partes iguais e assinalar a primeira marcação. Nesse caso da divisão por números que não sejam potências de 2 (tais frações podem ser obtidas por dobras ao meio sucessivas em uma tira representando a unidade), que ocorrerá também em outras atividades, o professor pode levar diversas tiras de papel representando a unidade, de cores variadas, com pontos marcados ao longo do segmento simbolizando sua divisão em um número diferente de partes iguais (Fig. 25).

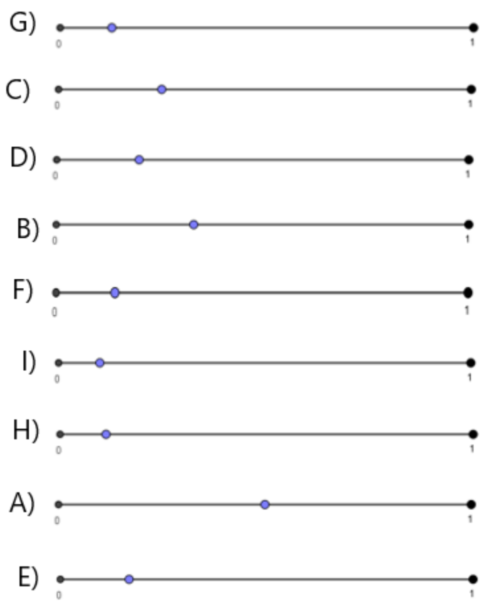
Figura 25 – Divisões do segmento de 0 a 1



Fonte: Ripoll et al. (2017, p. 46)

Nesse caso, o professor vai utilizar também a noção de frações equivalentes.

Figura 26 – Representação das frações



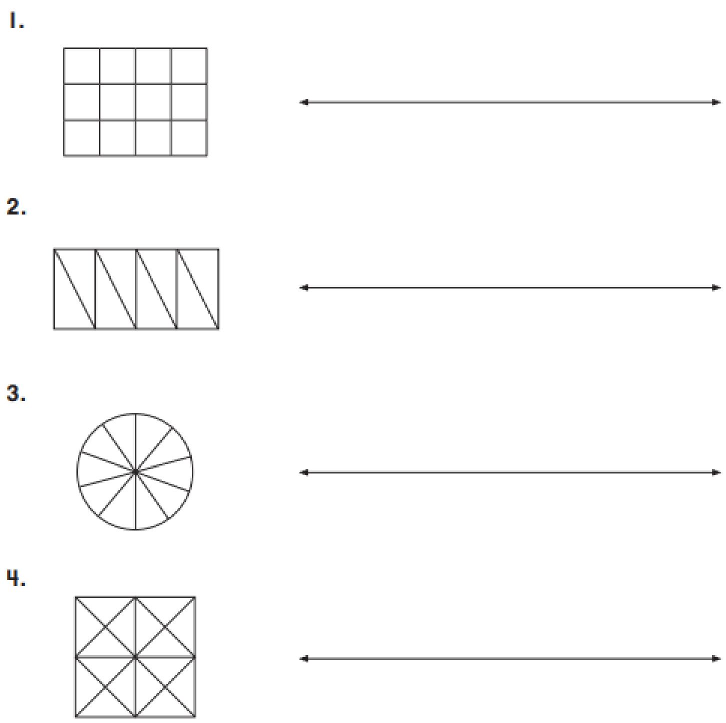
Fonte: Elaborada pela autora

5.2.4 Atividade 4

Esse exercício também foi adaptado de Common (2011). Os objetivos são: identificar a representação de uma fração em uma figura; relacionar os diferentes tipos de representação de frações (figuras e retas) e identificar frações na reta.

Para cada item apresentado na Fig. 27, o aluno deve pintar um número de partes de sua escolha. Após essa etapa, o aluno deve representar a fração correspondente à parte pintada na reta numérica.

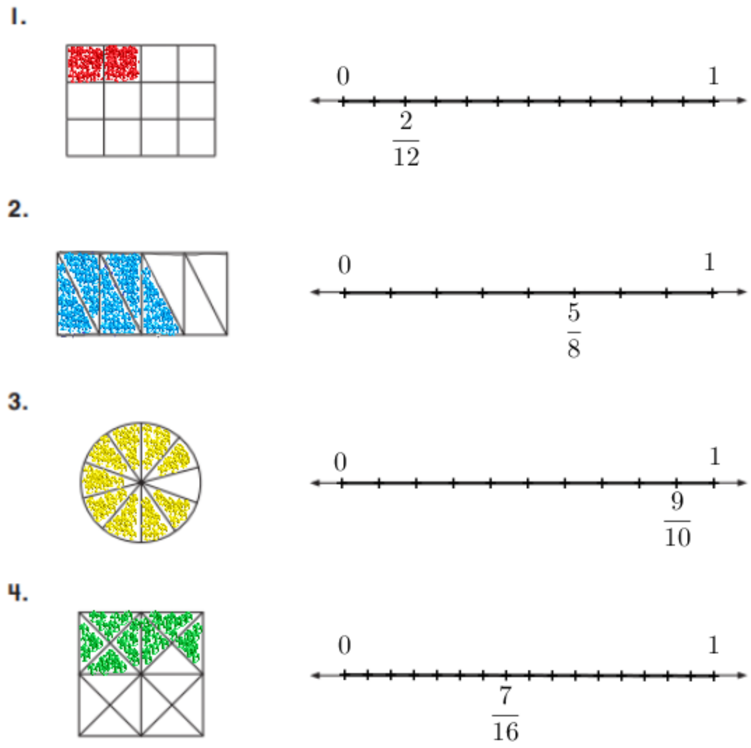
Figura 27 – Representação de frações na figura e reta



Fonte: Commom (2011, p. 18)

Neste exercício há uma variedade de possíveis respostas, pois cada aluno irá pintar uma parte de sua vontade, como mostrado na Fig 28. Porém, o denominador de cada fração já é pré estabelecido pelas figuras. Será proposto uma possibilidade de resposta para cada item.

Figura 28 – Representação de frações na figura e reta



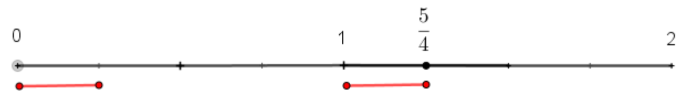
Fonte: Elaborada pela autora

5.2.5 Atividade 5

Os objetivos desta atividade são particionar uma reta em partes iguais; identificar as frações na reta numérica e identificar a fração equivalente. O aluno deve marcar, na reta numérica, a fração $\frac{5}{4}$. Logo após, deve representar uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

Para realizar o exercício, primeiramente precisa-se tomar na reta numérica o segmento que representará o todo. Em seguida, divide-se o segmento em 4 partes iguais. Verifica-se então que a fração $\frac{5}{4}$ é maior que o todo, representado por $\frac{4}{4}$. Toma-se o tamanho do segmento da primeira partição, que representa a fração $\frac{1}{4}$, e transporta-se para depois da marcação de $\frac{4}{4}$, assinalando a soma dos segmentos que representam $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ (Fig. 29).

Figura 29 – Representação da fração $\frac{5}{4}$



Fonte: Elaborada pela autora

Posteriormente, o exercício propõe encontrar a fração equivalente a $\frac{5}{4}$ com denominador 12. Logo, pode-se utilizar os conceitos aprendidos sobre frações equivalentes. Assim, $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$. Dessa forma, verifica-se na reta numérica se as marcações coincidem.

5.2.6 Atividade 6

Esta atividade foi baseada em uma série de exercícios realizadas por Rossy (2014), com o intuito de conceituar o estudo de frações na reta numérica. Tem-se como objetivos dividir a reta em partes iguais, identificar as frações na reta numérica e comparar frações unitárias com denominadores diferentes, além de ordená-las.

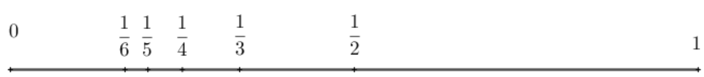
Primeiramente, o aluno deve estabelecer uma comparação entre as seguintes frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$. Para isso, deve se valer dos sinais $>$, $=$ ou $<$. O aluno deve utilizar os segmentos de reta numérica de 0 a 1 para representar as frações.

O aluno pode considerar intuitivamente que $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, pois $2 < 3$. Por isso, é importante considerar suas representações na reta para verificar o resultado das comparações, as quais consistem em particionar igualmente o segmento em 2, 3, 4, 5 e 6 partes. Ao final da atividade, o aluno deve concluir que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$$

como mostrado na Fig 30.

Figura 30 – Representação do exercício



Fonte: Elaborada pela autora

5.2.7 Atividade 7

Esta atividade também foi baseada nos exercícios realizados por Rossy (2014). Os objetivos são dividir a reta em partes iguais, identificar as frações na reta numérica; identificar frações equivalentes e comparar frações unitárias com denominadores diferentes, ordenando-as.

São apresentadas as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{5}{11}$. O aluno deve compará-las, utilizando os símbolos $>$, $=$ ou $<$, além de justificar as marcações das frações na reta. Os alunos devem notar que não é possível comparar as frações quando não se tratam do mesmo todo. Logo, deverão utilizar o conceito de frações equivalentes e transformar as frações em denominadores comuns.

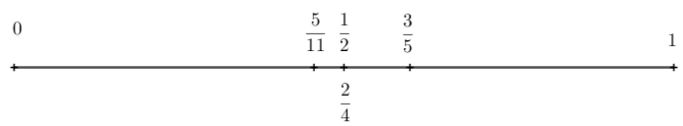
Ao comparar-se $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$, utilizam-se as frações equivalentes $\frac{5}{10}$ e $\frac{6}{10}$, logo é possível comparar as frações, pois se tratam do mesmo todo. Dessa forma, $\frac{5}{10} < \frac{6}{10}$. Portanto, $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$.

Quando se compara $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ é feito o mesmo processo, onde as frações equivalentes são respectivamente $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$. Assim, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Ao comparar-se $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{11}$, suas frações equivalentes são $\frac{11}{22}$ e $\frac{10}{22}$, respectivamente. Logo, $\frac{11}{22} > \frac{10}{22}$. Então $\frac{1}{2} > \frac{5}{11}$.

Comparando $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{11}$, suas frações equivalentes são $\frac{33}{55}$ e $\frac{25}{55}$, respectivamente, donde $\frac{33}{55} > \frac{25}{55}$. Portanto, $\frac{3}{5} > \frac{5}{11}$.

O professor pode observar que não foi realizada a comparação de $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{4}$, pois como a fração $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, então tal comparação já foi feita. Em geral, $\frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{5}{11}$. Para marcação na reta, o aluno deve seguir as orientações indicadas nos exercícios acima.

Figura 31 – Representação da comparação entre frações



Fonte: Elaborada pela autora

5.2.8 Atividade 8

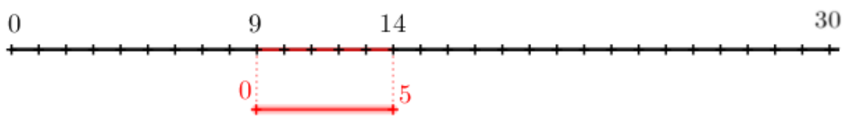
Esta atividade foi baseada nos exercícios realizados em Rossy (2014). Com essa atividade, os objetivos são seccionar a reta em partes iguais; identificar os números inteiros na reta numérica; somar, subtrair e multiplicar segmentos. O professor pode utilizar tiras de papel para representar os segmentos.

O aluno deve realizar as seguintes operações, utilizando a reta numérica de 0 até 30.

a)$9+5$	b)$13+7$	c)$25-9$
d)$15-7$	e)3×4	f)5×2

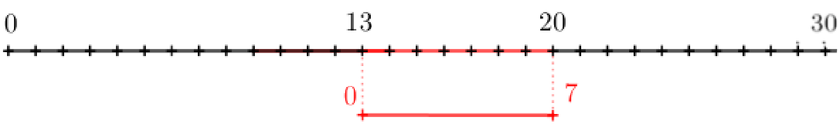
Ao realizar a soma, o professor pode orientar os alunos a juntarem os segmentos e uní-los.

Figura 32 – Representação da soma na reta



Fonte: Elaborada pela autora

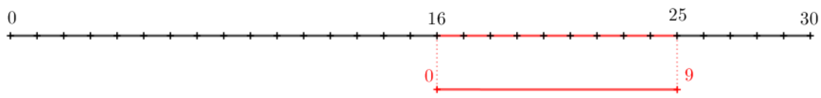
Figura 33 – Representação da soma na reta



Fonte: Elaborada pela autora

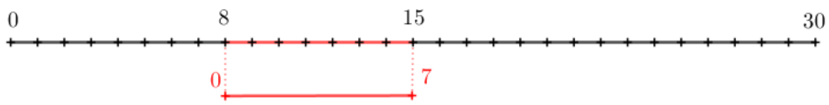
Ao realizar a subtração, o professor mostra aos alunos que se deve tirar o comprimento do segmento menor do segmento maior.

Figura 34 – Representação da subtração na reta



Fonte: Elaborada pela autora

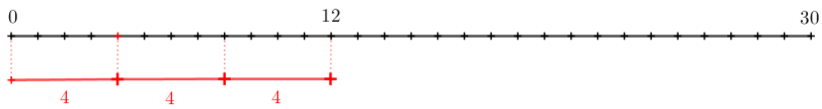
Figura 35 – Representação da subtração na reta



Fonte: Elaborada pela autora

Na multiplicação, deve-se tomar n cópias de um segmento.

Figura 36 – Representação da multiplicação na reta



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 37 – Representação da multiplicação na reta

Fonte: Elaborada pela autora

Logo as respostas são:

a) $9+5=14$ b) $13+7=20$ c) $25-9=16$

d) $15-7=8$ e) $3\times 4=12$ f) $5\times 2=10$

5.2.9 Atividade 9

Esta atividade foi baseada em Rossy (2014). Os objetivos são: dividir um segmento de reta em partes iguais; identificar as frações na reta numérica; somar, subtrair e multiplicar segmentos.

Devem ser utilizadas duas retas numeradas de 0 a 5, representando as seguintes frações:

Na primeira reta:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}.$$

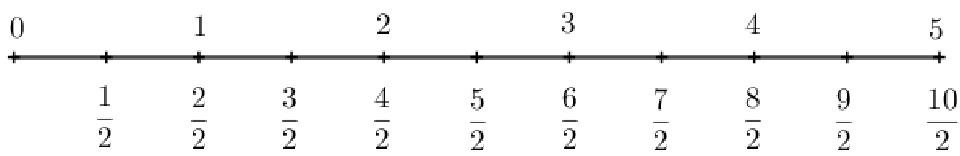
Na segunda reta:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{12}{3}, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, \frac{15}{3}.$$

Posteriormente, o professor pode propor que os alunos realizem operações como: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}+\frac{6}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $3+\frac{1}{2}$, $5-\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$.

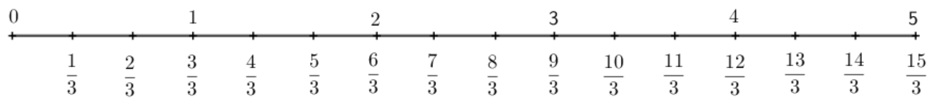
Utilizando o mesmo padrão do exercício anterior e buscando auxílio nas retas particionadas deste exercício, os alunos podem realizar os cálculos apenas olhando as retas. É importante que os alunos tenham em mente que $\frac{4}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, assim como nas outras frações.

Figura 38 – Representação da reta particionada em 2



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 39 – Representação da reta particionada em 3



Fonte: Elaborada pela autora

5.2.10 Atividade 10

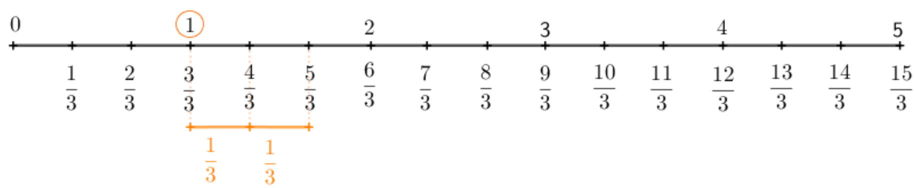
Esta atividade também foi baseada nos exercícios realizados em Rossy (2014). Tem-se como objetivos a identificação das frações na reta numérica; a identificação de um número inteiro correspondente às frações e relacionar uma fração imprópria a uma fração mista. O professor pode utilizar como apoio as retas particionadas do exercício anterior, transformando as frações impróprias em números mistos.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{11}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{13}{3}$

Por meio das retas do exercício anterior, o aluno pode observar como são constituídas as frações impróprias, que resulta de um número inteiro somado a uma fração, ou seja, um número misto. Logo, deve-se observar o inteiro menor que a fração desejada somada com as partes fracionárias que faltam.

a) $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

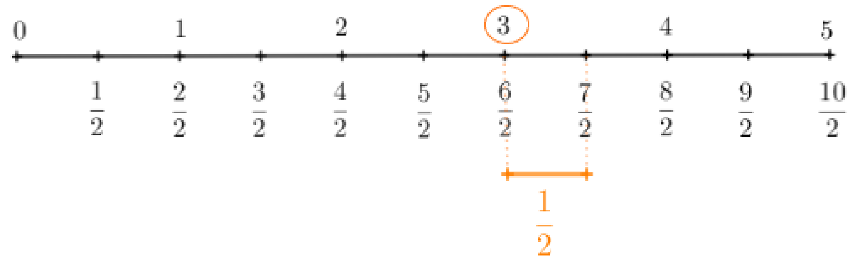
Figura 40 – Representação da fração $\frac{5}{3}$



Fonte: Elaborada pela autora

b) $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{2}$

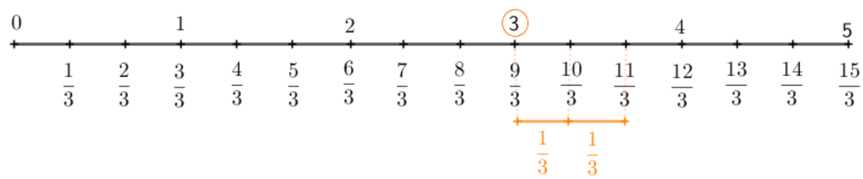
Figura 41 – Representação da fração $\frac{7}{2}$



Fonte: Elaborada pela autora

c) $\dfrac{11}{3} = 3 + \dfrac{2}{3}$

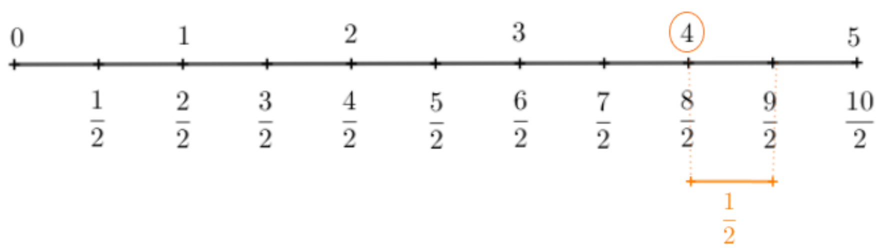
Figura 42 – Representação da fração $\frac{11}{3}$



Fonte: Elaborada pela autora

d) $\dfrac{9}{2} = 4 + \dfrac{1}{2}$

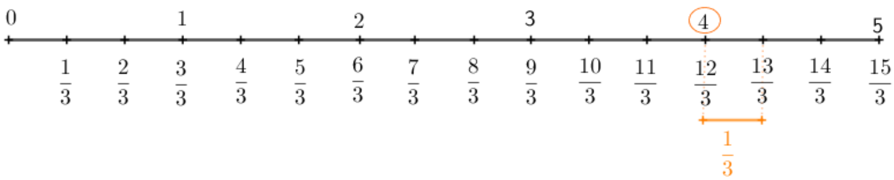
Figura 43 – Representação da fração $\frac{9}{2}$



Fonte: Elaborada pela autora

e) $\dfrac{13}{3} = 4 + \dfrac{1}{3}$

Figura 44 – Representação da fração $\frac{13}{3}$



Fonte: Elaborada pela autora

5.2.11 Atividade 11

Os objetivos desta atividade são: seccionar um segmento de reta em partes iguais; identificar as frações na reta numérica e identificar frações equivalentes.

O aluno deve construir uma reta numérica de 0 a 1 e realizar os seguintes passos:

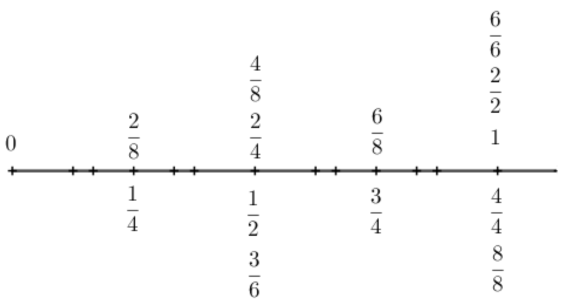
a) Divida o segmento em 2 partes, 4 partes, 6 partes e 8 partes. Depois, obtenha as frações equivalentes.

b) Divida o segmento em 3 partes, 9 partes e 12 partes, sinalizando as frações equivalentes.

O aluno deve seccionar o segmento e escrever cada fração correspondente aos segmentos após observar quais coincidem no mesmo ponto. Para dividir o segmento, o aluno pode utilizar uma tira de papel e dobrá-la para obter as metades. Para as demais divisões, utilizam-se tiras como na Atividade 3.

a)

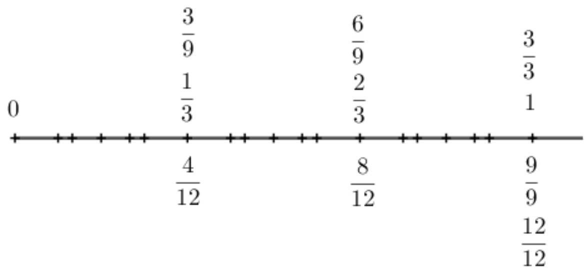
Figura 45 – Representação das frações equivalentes



Fonte: Elaborada pela autora

b)

Figura 46 – Representação da fração



Fonte: Elaborada pela autora

5.2.12 Atividade 12

O objetivo dessa atividade é identificar a proporcionalidade das frações. Com base no exercício anterior, deve-se obter o termo multiplicador ou divisor de frações equivalentes.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ c) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ e) $\frac{6}{6} = \frac{2}{2}$ f) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Os alunos devem observar que a mesma operação é feita no numerador e denominador, seja multiplicando ou dividindo. Os alunos podem observar também que há frações equivalentes que não são múltiplos diretos, como $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$, pois coincidem com o mesmo ponto na reta.

O professor pode mostrar que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$ e da mesma forma $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$ donde se afirma a equivalência entre $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$. Abaixo seguem as resoluções.

a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$

b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \rightarrow \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{12} \rightarrow \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{4}{12}$

d) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} \rightarrow \dfrac{1 \times 3}{2 \times 3} = \dfrac{3}{6}$

e) $\dfrac{6}{6} = \dfrac{2}{2} \rightarrow \dfrac{6 \div 3}{6 \div 3} = \dfrac{2}{2}$

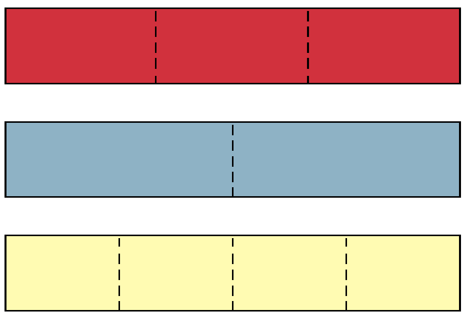
f) $\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \rightarrow \dfrac{6 \div 2}{8 \div 2} = \dfrac{3}{4}$

5.2.13 Atividade 13

Essa atividade foi baseada em Ripoll et al. (2017). Os objetivos são: identificar frações em contexto interpretativo; identificar frações equivalentes; somar e subtrair frações com denominadores diferentes. Para maior compreensão e participação dos alunos, podem ser dispostos 3 fitas de mesmo tamanho com cores diferentes para manuseio e resolução do exercício.

O professor pode entregar as fitas de mesmo tamanho e com as cores vermelha, azul e amarela para os alunos, quer podem ser divididos em grupos. A tira vermelha está dividida em três pedaços iguais, a azul em dois pedaços e a amarela em quatro pedaços, como na Fig. 47:

Figura 47 – Representação das fitas



Fonte: Ripoll et al. (2017, p. 85)

Em seguida, o professor pede aos alunos que combinem os pedaços das fitas cortados formando novas fitas coloridas. A seguir, o professor pode fazer as seguintes perguntas:

a) Junte um pedaço da fita azul e dois amarelos, intercalando-os. Qual é a fração que representa a nova fita formada pelos pedaços amarelos e o pedaço azul, em relação a uma fita original?

b) Junte um pedaço da fita vermelha com um pedaço da fita azul. Qual é a fração da fita original que corresponde a cada fita pega pelo professor.

c) Essa nova fita formada tem tamanho maior, menor ou igual ao tamanho original das fitas?

d) Qual é a fração correspondente ao tamanho da nova fita feita?

e) Qual é a diferença entre os tamanhos de uma fita original e da fita vermelha junto a azul?

f) Forma-se mais uma fita colorida, juntando de forma intercalada dois pedaços vermelhos e três pedaços amarelos. Essa nova fita vermelha e amarela é maior ou menor do que uma fita original?

g) Qual é a fração correspondente à nova fita formada pelos pedaços vermelhos e amarelos?

h) Qual é a diferença entre os tamanhos da fita original e da fita vermelha e amarela?

As respostas esperadas são:

a) A junção das fitas será a soma das frações $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$. Como os denominadores são diferentes, não se pode somar diretamente, devendo primeiramente encontrar denominador comum utilizando a equivalência de frações.

Logo $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$, e a soma entre $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$ se transformará em uma soma de frações com denominadores iguais: $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

b) Um pedaço da fita vermelha corresponde à $\frac{1}{3}$ da fita original e um pedaço da fita azul corresponde a $\frac{1}{2}$ da fita original.

c) Pode-se perceber, por comparação entre as tiras, que a nova fita formada será menor que a original.

d) A junção das fitas será a soma das frações $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, sendo os denominadores diferentes deve-se encontrar denominador comum utilizando a equivalência de frações.

Logo:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

e

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

e

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

se transformará em uma soma de frações com denominadores iguais: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$.

e) A diferença entre a fita original e a fração $\frac{5}{6}$ será feita da mesma forma que a soma utilizando as frações equivalentes para se ter um mesmo denominador. Logo, $1 = \frac{6}{6}$ e $1 - \frac{5}{6}$ se transformará em uma subtração de frações com denominador comum, donde:

$$\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}.$$

f) Dois pedaços da fita vermelha correspondem a $\frac{2}{3}$ da fita original e os três pedaços da fita amarela correspondem a $\frac{3}{4}$ da fita original. Pode-se perceber, por comparação entre as tiras, que a nova fita formada será maior que a fita original.

g) A nova fita será a soma das frações $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, sendo os denominadores diferentes, deve-se obter denominador comum utilizando a equivalência de frações. Logo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

e $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ se transformará em uma soma de frações com denominadores iguais: $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$.

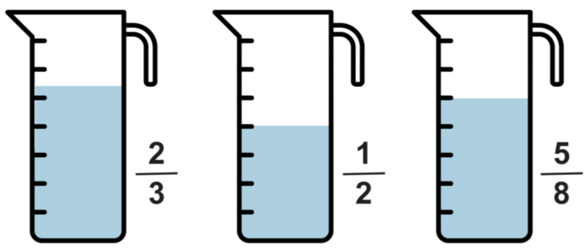
h) A diferença entre a fita original e a fração $\frac{17}{12}$ será feita da mesma forma que a soma, utilizando as frações equivalentes para se ter um mesmo denominador. Porém, deve-se observar que a nova fita é maior que a original. Logo, $1 = \frac{12}{12}$ e $\frac{17}{12} - 1$ se transformará em uma subtração de frações com denominadores iguais, donde $\frac{17}{12} - \frac{12}{12} = \frac{17-12}{12} = \frac{5}{12}$.

5.2.14 Atividade 14

Com os exercícios anteriores os alunos podem alcançar o reconhecimento de uma fração como um ponto na reta numérica, além do entendimento sobre frações equivalentes e de sua importância. Em todos partiu-se de um segmento de reta para que se pudesse chegar às respostas. Com essa base, o professor pode elaborar atividades diversas que se valem desses conhecimentos sobre frações.

Como exemplo tem-se a presente atividade, que foi baseada em Ripoll et al. (2017), cujo objetivo é utilizar os conhecimentos sobre frações para verificar se é possível promover uma redistribuição de líquidos em recipientes. O professor apresenta aos alunos a Fig 48.

Figura 48 – Recipientes com água



Fonte: Ripoll et al. (2017, p. 89)

O primeiro recipiente está com $\frac{2}{3}$ de sua capacidade ocupada, o segundo com $\frac{1}{2}$ e o terceiro com $\frac{5}{8}$. Os alunos devem avaliar se é possível fazer a redistribuição da água de maneira a ocupar apenas dois recipientes.

O aluno deve perceber que cada recipiente está dividido em 8 partes que correspondem a uma mesma capacidade (riscos no recipiente). O professor pode perguntar aos alunos como se poderia reescrever essas frações de maneira a ficarem as três com o mesmo denominador.

Uma das soluções pode ser feita da seguinte forma: por meio de frações equivalentes, tem-se que: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 12}{2 \times 12} = \frac{12}{24}$ e $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$.

Posteriormente, o professor questiona como pode-se verificar a redistribuição da água nos recipientes. Os alunos devem mostrar se a soma $\frac{16}{24} + \frac{12}{24} + \frac{15}{24}$ é menor ou igual a $2 \times \frac{8}{8} = \frac{16}{8} = \frac{16 \times 3}{8 \times 3} = \frac{48}{24}$.

Tem-se que $\frac{16}{24}+\frac{12}{24}+\frac{15}{24} = \frac{16+12+15}{24} = \frac{43}{24}$. Como $\frac{43}{24} < \frac{48}{24}$, pois na comparação entre frações com mesmo denominador, a maior fração será a com maior numerador, conclui-se que é possível a redistribuição do líquido em apenas dois recipientes.

O professor pode elaborar outras atividades envolvendo operações entre frações, trabalhando também os diferentes significados associados ao conceito. Espera-se que o aluno, com o entendimento da fração como número, possa ter a compreensão sobre as demais acepções do termo e, consequentemente, melhor desenvolvimento matemático posterior, por exemplo, em álgebra e probabilidade, em que se lida diretamente com frações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para esse trabalho surgiu ao observar alunos da graduação que, ao realizarem cálculos que envolviam números racionais, sempre optavam pela representação decimal ao invés da fracionária. Por meio dessa percepção, pode-se inferir que tal escolha se dava por terem dificuldade em lidar com frações.

Ao analisar documentos oficiais de avaliação da educação, verifica-se que há um problema no ensino de frações e a forma com que é tratada. Esse é um tópico delicado, que possui a fama de ser difícil e que os alunos repudiam e mostram falta de plena compreensão.

Apesar das frações serem um assunto muito discutido por pesquisadores há várias décadas, ainda é um conceito onde pouco se avançou, tanto da parte docente quanto discente. Esse fato é comprovado pelo índices brasileiros apontados nas avaliações.

É importante que os alunos entendam a pluralidade de significados relacionados à fração, os papéis do numerador e do denominador, a comparação entre frações e o reconhecimento do que é o todo em um exercício. Verifica-se também a necessidade de maior atenção à noção de frações equivalentes, que são utilizadas nas operações sem que sejam citadas. Por exemplo, muitos alunos podem não perceber que no cálculo do mínimo múltiplo comum estão usando essa ideia.

A apresentação da fração na reta numérica pressupõe uma aprendizagem mais significativa, em que o caminho dos números inteiros para os números racionais se torna mais claro. Dessa forma, os alunos podem entender os conceitos de maneira eficaz sem proceder apenas de forma mecânica e sem a necessidade de decorar fórmulas sem sentido.

Nos EUA, a proposta de Wu se tornou parte da base comum nacional da educação, o CCSSI citado no capítulo 1. Assim, pode-se perceber que tal estudo possui grande relevância, além de influenciar trabalhos aqui no Brasil. A sequência de atividades aqui colocadas e baseadas em pesquisas que se valem dessa nova apresentação dos racionais podem auxiliar os docentes no ensino de frações. Esses exercícios podem dissipar a não compreensão do conceito e proporcionar o entendimento além das regras que o acompanham.

Para pesquisas futuras, questões como as aqui apresentadas podem ser levadas a escolas de maneira a se obter resultados que ratifiquem a efetividade de um novo viés sobre o ensino do frações.

BIBLIOGRAFIA

ALBUINI, A. C. **Frações:** suas várias acepções e a proposta de Wu. 2017.

ALVES, D. R. S.; MARTENS, A. S. Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do Ensino Fundamental. In: EDUCERE, 10. **Anais...** Curitiba, 2011. Disponível em: < http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/ 6413_3640.pdf>. Acesso em: 05 ago. 2018.

BALL, D. L. Prospective elementary and secondary teachers'understanding of division. **Journal for research in mathematics education**, p. 132-144, 1990.

BAILEY, D. H.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, n. 3, p. 447-455, 2012.

BONOTTO, C. Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. **L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate**, v. 15, n. 5, p. 415-448, 1992.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília-DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5a a 8a séries):** matemática. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Brasil no PISA 2015:** análises e reflexões sobre o desempenho de estudantes brasileiros / OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: Fundação Quintanilha, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ images /BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2017.

BRUCE, C.; CHANG, D.; FLYNN, T. **Foundations to Learning and Teaching Fractions:** addition and subtraction - Literature Review. 2013.

BRUCE, C.; BENNETT, S.; FLYNN, T. **Fractions Operations:** multiplication and division - Literature Review. 2014.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006. Disponível em: <revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/ download/545/433>. Acesso em: 10 ago. 2018.

COMMON Core Resource Guide. **Think Math!** 2011.

COMMON Core Standards Writing Team. **Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics** (August 10 draft). Tucson, AZ: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona. 2018.

DORNELES, B. V.; MAMEDE, E.; NUNES, T. A situação-problema afeta a compreensão do conceito de fração?. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 14., 2008, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: Ed. da PUCRS, 2008.

EISENBERG, T. Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. **Journal for Research in Mathematics Education**, 8, 216 – 222, 1977.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. Educational practices series. **Geneva:** International Academy of Education-International Bureau of Education. v.22, 2011.

FETEIRA, S. S. **Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade**. 2012. Tese de Doutorado.

GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações**. 2010.

HALLETT, D.; NUNES, T., BRYANT, P.; THORPE, C. M. Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: the role of abilities and school experience. **Journal of Experimental Child Psychology**, Amsterdam, v. 113, n. 4, p. 469-486, 2012.

KAMII, C.; CLARK, F. B. Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 14, n. 4, p. 365-378, 1995.

KENDALL, J. S. **Understanding common core state standards**. ASCD, 2011.

KARADUMAN, G. B. A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing history of math in math education. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, Elsevier, 2, 2689–2693, 2010.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Ed.), **Number and measurement:** papers from a research workshop, p. 101-144. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

KERSLAKE, D. **Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project**. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd., Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF, England., 1986.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Ed.), **Number and measurement: papers from a research workshop**, p. 101-144. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 1, p. 629-667, 2007.

LEONG, Y. K. Mathematics K-12: Crisis in Education, Interview with Wu Hung-Hsi. **Mathematical Medley**. 2012.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75, 2013.

LORTIE-FORGUES, H.; TIAN, J.; SIEGLER, R. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? **Developmental Review**, 38, p. 201–221, 2015.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. **Journal for research in mathematics education**, p. 16-32, 1990.

MARQUES, A. F.; SOUSA, D. R.; OLIVEIRA, G. L.; SILVA, T. M.; MACEDO, A. D. R. A introdução da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem pela visão dos professores. **II CONEDU**. 2015.

National Council of Teachers of Education (NCTM). **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston, VA: Author, 1991.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Tradução de: COSTA, S. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., EVANS, D., WADE. J.; BELL, D. Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. **Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences**. Paris, p. 28-31, 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D.; WADE, J. Children's understanding of fractions. **Revista Contrapontos**, v. 8, n. 3, p. 509-517, 2009.

PORTUGAL. Ministério da Educação (MEC). **Programa de Matemática do ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2007.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F. L. B., BORTOLOSSI, H. J.; GIRALDO, V. A.; REZENDE, W. M., QUINTANEIRO, W. S. **Frações no Ensino Fundamental**- Volume 1. IMPA, 2ª Versão, 2017.

ROSSY, N. C. **Fração e sua representação como medida de comprimento:** uma experiência de ensino-aprendizagem no contexto de um laboratório de Educação Matemática. 2014.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. **Zetetike**, v. 7, n. 2, 1999.

SIEGLER, R.; CARPENTER, T.; FENNELL, F.; GEARY, D.; LEWIS, J.; OKAMOTO, Y.; THOMPSON, L.; WRAY, J. Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide. **Wkat Works Clearinghouse**. 2010.

VASCONCELOS, C. B.; BELFORT, E. Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. In: **Salto para o Futuro**, Boletim 13: Discutindo práticas em Matemática, p. 39-49 . Rio de Janeiro, 2006.

VAZ, R. Divisão de Frações: é possível dividir sem multiplicar. **EMEM**. 2015.

SAEB. Escala de Proficiência de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental. 2018.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 301 f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

TORBEYNS, J. et al. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015.

VASCONCELOS, I. C. P.; MAMEDE, E. P. B. C.; DORNELES, B. V. The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 98, n. 249, p. 251-269, 2017.

WHEELDON, D. A. **Developing mathematical practices in a social context: an**

instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions. Florida: University of Central Florida, 2008.

WU, H. **Chapter 2:** Fractions (Draft)- Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. Berkeley, CA, 2002. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/ wu/EMI2a .pdf>. Acesso em: 11 jan. 2019.

WU, H. Key mathematical ideas in grades 5–8. In: **Annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics**. Anaheim, 2005.

WU, H. **Fractions, Decimals, and Rational Numbers**. Berkeley, CA, 2008 (revisado em 2014). Disponível em: < https://math.berkeley.edu/ wu/NMP fractions.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2019.

WU, H. **Teaching fractions according to the Common Core Standards**. 2011.