INSTITUTO FEDERAL
Rio de Janeiro

Instituto Federal do Rio de Janeiro

Campus Volta Redonda

Licenciatura em Matemática

Diana Fidelis Guimarães

Sistemas Lineares e Aplicações no Ensino Médio

Volta Redonda
2019

Diana Fidelis Guimarães

Sistemas Lineares e Aplicações no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ

Volta Redonda
2019

Guimarães, Diana Fidelis
G963s Sistemas lineares e aplicações no ensino médio/Diana Fidelis Guimarães. - - RJ: Volta Redonda, 2019.
56f.: il.

Orientador(a): Profª M.a Roberta Fonseca dos Prazeres

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Campus Volta Redonda, 2019.

1.Álgebra Linear. 2. Sistemas Lineares – Ensino. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda II. Prazeres, Roberta Fonseca dos. III. Título

CDU 512.64

Diana Fidelis Guimarães

Sistemas Lineares e Aplicações no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em 4 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Roberta Fonseca dos Prazeres.

Ma. Roberta Fonseca dos Prazeres
Orientadora/IFRJ

Dr. Andrey Dione Ferreira
IFRJ

Me. José Ricardo Ferreira de Almeida
IFRJ

Me. Armando Staib
IFRJ

AGRADECIMENTOS

A Jesus, Deus da minha salvação, sendo que nenhuma palavra será capaz de expressar minha eterna gratidão!

Ao meu melhor amigo, hoje marido, Alberto, pelo carinho e companheirismo.

À minha família, em especial aos meus pais Luiz e Genilza, por todo suporte e cuidado, que me proporcionaram para a conclusão desta graduação.

À Roberta, que além de orientadora, é um ser humano incrível. Me inspiro em sua pessoa, sendo meu ideal de profissional a ser seguido. Sua amizade e acesso foram fundamentais!

A todos os amigos e demais, que contribuiram direta ou indiretamente para a minha formação.

À banca avaliadora, pelo aceite do convite e por contribuir na minha formação.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original."
(Albert Einstein)

RESUMO

O conteúdo de sistemas lineares vem sendo estudado desde 200 a.E.C. Assim, o que motivou a realização desta pesquisa foi a busca pela resposta à pergunta: os sistemas lineares podem ser utilizados para resolver problemas provenientes de outras áreas, que não a Matemática? Essa busca foi realizada através de uma pesquisa bibliográfica e, diante da pergunta apresentada definiu-se, como objetivo principal, exibir exemplos de como abordar sistemas lineares, no Ensino Médio, por meio de suas aplicações. Como objetivos específicos, tem-se expor um breve histórico sobre sistemas lineares, discutir aspectos de seu ensino e mostrar como esse tópico é apresentado em livros aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD (BRASIL, 2018). A exposição do tema por meio de suas aplicações pode auxiliar na compreensão dos alunos visto que esse assunto é, muitas vezes, abordado de forma superficial.
Palavras-chave: Álgebra Linear, Sistemas Lineares, Aplicação de Sistemas Lineares, Ensino de Sistemas Lineares.

ABSTRACT

The content of linear systems has been studied since 200 a.E.C. Thus, what motivated this research was a search for the answer to the question: can linear systems be used to solve problems in other areas than mathematics? This search was performed through bibliographic research and, in view of the research question, the main objective is show examples of how to approach linear systems in high school through their applications. As specific objectives, we have to present a brief historical about linear systems, discuss aspects of their teaching and show how this index is presented in books approved by PNLD (BRASIL, 2018). Exposing the theme through its applications can help students understanding of this subject, that is often approached in a succinct manner.

Keywords: Linear Algebra, Linear Systems, Application of Linear System, Teaching Linear Systems.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear, em linhas gerais, se caracteriza como uma teoria algébrica unificadora para o estudo de diferentes áreas. Dentre elas pode-se citar a geometria, as equações diferenciais lineares e a análise funcional e matricial. Por esse motivo, tal teoria possui um caráter abstrato no universo da matemática (COIMBRA, 2008).

Segundo Fratelli (2007), até aproximadamente 1960 a Álgebra Linear era estudada apenas em cursos de pós-graduação. Com a crescente necessidade do uso da mesma em áreas aplicadas, a disciplina passou a ser oferecida também em cursos de graduação e no Ensino Básico.

Dentro do Ensino Médio, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM+), tem-se que:

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (BRASIL, 2002, p. 122)

É possível observar que a perspectiva de que se estabeleça uma conexão entre conteúdos abordados em sala de aula e o cotidiano do discente é expresso nos objetivos dos PCNEM+. Por exemplo, se destacam "compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolver maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo" e "adquirir uma compreensão do mundo, da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meios de seus modelos e representações" (BRASIL, 2002, p. 117).

Assim, a pergunta de pesquisa é: os sistemas lineares podem ser utilizados para resolver problemas provenientes de outras disciplinas ensinadas nas escolas além da própria Matemática? A partir de um conhecimento maior sobre como e se os sistemas lineares resolvem situações em diversas áreas, o conteúdo é então apresentado dentro das propostas estabelecidas pelos PCNEM+.

Diante do exposto, o objetivo principal dessa pesquisa é exibir exemplos de exercícios que abordem o conteúdo de sistemas lineares, no Ensino Médio, por meio de suas aplicações em outras ciências. O intuito é o de que a abordagem desse objeto se valha de mais exercícios como os aqui citados, de maneira a melhorar e fortalecer os conhecimentos adquiridos pelos estudantes.

Para atingir o objeto principal dessa pesquisa, foram definidos três objetivos específicos. O primeiro objetivo específico é expor um breve histórico sobre o desenvolvimento de sistemas lineares.

O segundo é discutir alguns aspectos relacionados ao ensino de Álgebra Linear, incluindo como vem sendo tratado em livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). O último objetivo específico é abordar tópicos de sistemas lineares, tomando como principal fonte de pesquisa livros do PNLD.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. Neste primeiro capítulo, ou introdução, foi apresentada uma abordagem inicial do assunto, o objetivo geral e os objetivos específicos. O segundo capítulo apresenta a metodologia utilizada para a realização da pesquisa.

Em seguida, o terceiro capítulo traz aspectos históricos relacionados aos sistemas lineares, de modo a mostrar a evolução do tema. O capítulo quatro discorre sobre as formas de resolução de sistemas lineares adotadas em livros didáticos. No capítulo cinco é exibido um panorama sobre o ensino de sistemas lineares através das referências pesquisadas e o capítulo seis traz um resumo de como cinco livros didáticos, aprovados no PNLD (BRASIL, 2018), abordam o tema.

O sétimo capítulo exibe aplicações que são tratadas em tais livros didáticos, de maneira a servir como modelos e exemplos de exercícios que podem ser utilizados pelos professores, conduzindo a uma maior interação entre o conteúdo, o cotidiano dos alunos e outras disciplinas. Por fim, tem-se a conclusão, com base na pesquisa bibliográfica e em tudo o que foi abordado, além de sugestões para novas pesquisas.

2 METODOLOGIA

Para a realização do presente trabalho, a partir de suas especificidades e objetivos, foi adotada uma abordagem qualitativa. De acordo com Guerra (2014), a pesquisa qualitativa possui a capacidade de quebrar paradigmas metodológicos permitindo, então, a valorização dos aspectos sociais dos objetos e dos ambientes analisados.

Gerhardt e Silveira dispõem que:

> Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32)

A preocupação da pesquisa qualitativa é baseada nos aspectos da realidade que não podem ser quantificados, compreendendo e explicando a dinâmica das relações sociais (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Reitera-se, ainda, que a abordagem qualitativa tem sido muito utilizada no contexto educacional (TEIXEIRA, 2015).

Guerra (2014) ainda elenca três elementos fundamentais, que se encontram nesse trabalho, em um processo de investigação qualitativo: interação entre o objeto de estudo e o pesquisador, o registro de dados ou informações coletadas na pesquisa e a interpretação do pesquisador.

Quanto ao seu procedimento, o presente estudo se classifica como uma pesquisa bibliográfica, visto que se buscou compreender e analisar a colaboração de diversos autores e acadêmicos sobre o tema estudado, além de aspectos normativos da Educação Básica.

Segundo Gil (2008):

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo. (GIL, 2008, p. 50)

Além de livros e artigos científicos, outras fontes de pesquisa também são adotadas em uma pesquisa bibliográfica: revistas, publicações em periódicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico e internet, não se limitando a essas. Independente da fonte, a verificação da veracidade dos dados obtidos, bem como a confiabilidade do material, devem se constituir como pontos de atenção ao pesquisador (PRODANOV; FREITAS, 2013).

As fontes de pesquisa utilizadas nesse trabalho foram: livros, teses de doutorado e dissertações de mestrado de cursos e temas relacionados à matemática e ao ensino, artigos publicados em eventos acadêmicos e revistas, além dos livros didáticos do PNLD (BRASIL, 2018) e de documentos normativos da educação brasileira. Garcês (2010, p.2) expõe que um estudo bibliográfico: “Tem como objetivo recolher, selecionar, analisar e interpretar as contribuições teóricas já existentes sobre determinado assunto."

Em relação ao levantamento bibliográfico, o presente trabalho está estruturado da seguinte forma: primeiro foi realizado um apanhado histórico do surgimento dos sistemas lineares, bem como o seu desenvolvimento até a forma como é estudada e abordada hoje e os matemáticos que contribuíram para isso.

O quinto capítulo teve como objetivo analisar o ensino de Álgebra Linear e sistemas lineares, dando um panorama geral sobre como tais conteúdos são abordados com os alunos da Educação Básica. O sexto capítulo teve o enfoque de verificar o conteúdo de sistemas lineares nos livros didáticos aprovados no PNLD (BRASIL, 2018). Foi feito um pequeno resumo referente ao segundo volume de cada uma das cinco coleções das oito aprovadas no PNLD, visto que três não estavam acessíveis para leitura on-line.

Todos os livros foram publicados no ano de 2016 e a escolha do segundo volume deveu-se ao fato do mesmo contemplar o conteúdo de sistemas lineares, que são abordados no segundo ano do Ensino Médio. Os títulos e os respectivos autores dos livros analisados são: *Contato Matemática* (SOUZA; GARCIA, 2016); *Matemática Ciência e Aplicações* (IEZZI et al., 2016); *Matemática Contexto e Aplicações* (DANTE, 2016), *Conexões com a Matemática* (LEONARDO, 2016) e *Quadrante Matemática* (CHAVANTE; PRESTES, 2016).

Na última parte da pesquisa bibliográfica, buscou-se mostrar como e em que áreas de conhecimento os exercícios de sistemas lineares são aplicados. Para isso, foram exibidos exercícios de sistemas lineares contidos nos livros do PNLD (BRASIL, 2018), que contém aplicações em outras disciplinas, como física, biologia e química. Afim de complementar os exercícios, também foram utilizadas algumas dissertações. Buscou-se adaptar os exercícios exibidos, apresentando-se uma resolução detalhada de cada um deles.

Em resumo, diante de todas as características da presente pesquisa acima descritas, pode-se classificá-la, quanto à abordagem, como pesquisa qualitativa; quanto à natureza, como pesquisa aplicada; quanto aos objetivos, como pesquisa exploratória e, quanto ao procedimento, como pesquisa bibliográfica. No próximo capítulo, como primeiro passo da pesquisa bibliográfica, tem-se uma abordagem histórica sobre o conteúdo de sistemas lineares.

3 HISTÓRIA DOS SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo são trazidos alguns aspectos históricos relacionados ao sistemas lineares, que é estudado dentro da Álgebra Linear. Para Bourbaki (1972), a Álgebra Linear é um dos ramos da matemática que é, ao mesmo tempo, um dos mais novos e um dos mais antigos, sendo ligada a necessidades de cálculos práticos.

Nas origens da matemática, havia problemas que envolviam o cálculo de valores de uma função ou resolução de equações. Todavia, foi somente com o desenvolvimento moderno das noções de anel, corpo e espaço vetorial, por exemplo, que a Álgebra Linear foi colocada em evidência.

Em relação aos sistemas lineares, tem-se que são raras, no Ocidente, menções a esse assunto. Por outro lado, na matemática oriental o enfoque foi mais relevante (LAMIN, 2000).

Segundo Andrews-Larson (2015), há evidências de que por volta de 200 a.E.C. os chineses utilizavam procedimentos equivalentes à eliminação de Gauss (ou método do escalonamento), que veio a ser desenvolvido apenas no século XIX. No oitavo capítulo do livro chinês *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, um dos problemas presentes no texto e que recai em um sistema linear pode ser traduzido da seguinte forma:

> Agora são dados 3 pacotes de arroz de qualidade superior, 2 pacotes de arroz de qualidade média, [e] 1 pacote de baixa qualidade. Resultado: 39 unidades do grão. 2 pacotes de alta qualidade, 3 pacotes de média qualidade, [e] 1 pacote de baixa qualidade, resultam em 34 unidades. 1 pacote de alta qualidade, 2 pacotes de média qualidade, [e] 3 pacotes de baixa qualidade, resultam em 26 unidades. Diga: quanto [em unidades] um pacote de cada tipo possui? (SCHWARTZ, 2008, p. 11, tradução nossa)

Em notação moderna, esse problema é escrito como:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = & 39 \\ 2x + 3y + z & = & 34 \\ x + 2y + 3z & = & 26 \end{cases}$$

A resolução apresentada no livro coloca os coeficientes em uma tabela da forma (SILVA, 2014):

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Depois de processos semelhantes à eliminação de Gauss, efetuando operações em relação às colunas, chegou-se à tabela:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{matrix}$$

Portanto, obtém-se que $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, donde $z = 2{,}75$, $y = 4{,}25$ e $x = 9{,}25$. Pode-se resumir que:

> Os chineses estavam muitos séculos à frente do resto do mundo no uso de matrizes para resolver sistemas de equações lineares. Os coeficientes de cada equação foram armazenados em uma coluna, e as colunas foram preenchidas da direita para a esquerda. Os números foram então manipulados usando os mesmos tipos de operação que foram descritos acima para problemas de excesso e déficit: multiplicando ou dividindo uma coluna por determinado número, adicionando ou subtraindo duas colunas, etc. Para resolver um sistema de equações lineares, o retângulo de coeficientes foi reduzido a uma triangular e então forma diagonal [. . .]. (SCHWARTZ, 2008, p. 11, tradução nossa)

Segundo Boyer (1974), se não fossem alguns acontecimentos que interromperam os progressos na China, como a queima de livros promovida por seu imperador no ano de 213 a.E.C., o desenvolvimento da Matemática poderia ter sido diferente.

De acordo com Andrews-Larson (2015), durante os anos de 1500 os métodos para resolução de sistemas lineares usando elimação e substituição apareceram em trabalho de alguns matemáticos, como Cardano (1501-1576) e Stifel (1487-1567). Todavia, um progresso significativo nessa área só veio a ser realizado nos anos de 1600 e 1700, juntamente com os estudos de matrizes na Europa e no Japão.

No ano de 1693, o matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) desenvolveu um método para obtenção de determinantes, além de representar sistemas lineares por meio de matrizes (ANDREWS-LARSON, 2015). No mesmo ano, em carta para o matemático francês L'Hospital (1661-1704), Leibnitz (1649-1708) fez a primeira referência a determinantes no Ocidente, relacionando a soluções de sistemas lineares (BOYER, 1974).

A solução de sistemas lineares com duas, três ou quatro incógnitas foi realizada por volta de 1729, pelo matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746). Porém, o trabalho só veio a ser publicado em 1748, na obra *Tratado de Álgebra*. Sua obra não continha uma boa notação e veio a ser utilizada por Gabriel Cramer (1704-1752) no trabalho *Introdução à análise de linhas curvas algébricas*, em 1750 (KLINE, 1972).

A regra exposta por Maclaurin é conhecida hoje como regra de Cramer. Segundo Boyer (1974), pode-se explicar tal fato por uma melhor notação empregada por Cramer. Com essa regra, é possível resolver um sistema de equações com uso de determinantes. No caso abaixo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

tem-se que o valor de y é dado por:

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

tem-se que o valor de z é dado pela expressão (BOYER, 1974):

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

Andrews-Larson (2015) afirma que o resultado de Cramer seria impossível de ser alcançado se não houvesse a notação algébrica desenvolvida por Viète (1540-1603). Cramer verificou que se o denominador fosse nulo então o sistema linear não teria solução única. O matemático também concluiu que se o denominador e todos os numeradores fossem nulos o sistema teria infinitas soluções e que se o denominador fosse igual a zero mas algum dos numeradores fosse não nulo então o sistema linear não teria solução. Portanto, Cramer mostrou que o valor do determinante permite chegar a conclusões sobre a solução do sistema.

Em 1750 Leonhard Euler (1707-1783) começou a estudar se um sistema com n equações e n incógintas teria uma única solução, como no caso:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4y = 6x - 10 \end{cases}$$

Tal observação estava relacionada ao número de interseções de curvas algébricas e ao número de pontos suficientes para obtenção da equação de uma curva que, por sua vez, acabam por se ligar a questões de dependência linear (ANDREWS-LARSON, 2015).

Os trabalhos de Euler e Cramer sobre sistemas lineaares estão inseridos em um contexto de estudo sobre a teoria das curvas. No entanto, quando Cramer faz inferências sobre o valor dos determinantes e as soluções para um sistema e Euler reflete sobre questões que remetem à dependência das equações, há uma mudança qualitativa no desenvolvimento de sistemas lineares.

Antes, o foco repousava sobre a utilização de processos para a resolução de sistemas. A partir desses matemáticos, a solução de um sistema de equações lineares passa a ser vista, então, como um objeto matemático com propriedades peculiares, como a unicidade (ANDREWS-LARSON, 2015).

O Método de Eliminação de Gauss consiste em aplicar uma sequência de operações nas linhas de um sistema linear de maneira a tornar a matriz associada a esse sistema uma matriz triangular superior. Uma matriz, nessa forma, apresenta os coeficientes abaixo da diagonal principal nulos, como visto a seguir. Esse método será melhor explicado no Capítulo 4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Tal método foi encontrado no livro *Disquisito de Elementis Ellipticis Palladis*, do matemático alemão Friedrich Gauss (1777-1855), e usado como ferramenta para obtenção de uma função linear para aproximação da órbita de um asteróide. Gauss obteve um sistema de equações lineares com seis incógnitas. O procedimento usado por ele não envolvia notação matricial, sendo aplicada em forma de algoritmo (ALTHOEN; MCLAUGHLIN, 1987).

Outros matemáticos contribuíram para estudos sobre determinantes e, consequentemente, para o estudo de sistemas lineares. Dentre eles, pode-se citar Cauchy (1789-1857) e Jacobi (1804-1851).

> Conjuntos de soluções para sistemas lineares foram historicamente conceituados em termos de resolução de processos e subsequentemente como objetos matemáticos; o entendimento dos estudantes sobre as soluções provavelmente progrida de forma semelhante. Para desenvolver uma compreensão conceitual de muitas das principais ideias de um curso introdutório de álgebra linear, os alunos precisam entender soluções para sistemas de equações lineares como objetos matemáticos, particularmente no caso em que a solução não é única. (ANDREWS-LARSON, 2015, p. 525, tradução nossa)

Por meio dessa visão histórica, pode-se concluir que muitos anos se passaram entre as primeiras soluções de sistemas lineares até o desenvolvimento de uma teoria subjacente. Por isso, tal fato deve ser levado em conta no ensino de Álgebra Linear, assunto esse do próximo capítulo desse trabalho.

4 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo, pretende-se mostrar algumas formas de resolução de sistemas lineares, que estão presentes em livros do segundo ano do Ensino Médio. Os livros aqui adotados são recomendados pelo PNLD (BRASIL, 2018).

De acordo com Celestino (2000), a Álgebra Linear está relacionada a vários domínios, sendo alguns deles “[...] os sistemas de equações lineares, a geometria, a aritmética, o estudo das quádricas, as transformações lineares, as equações diferenciais [...]” (CELESTINO, 2000, p. 9).

Moro et al. (2016) mencionam a importância da Álgebra Linear e sua grande aplicabilidade, referindo-se a ela como uma ferramenta abstrata dentro da matemática. Além disso, seus conteúdos podem ser trabalhados em questões de diversas áreas de conhecimento.

A Álgebra Linear assume um papel importante também em conjunto com o desenvolvimento da informática, o que estimulou um notável interesse no tema. Segundo Levorato (2017):

> Inúmeras aplicações foram sendo consolidadas ao longo dos séculos, desde os primeiros indícios do surgimento de Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes, até os dias atuais, onde é possível constatar a consagração da Ciência Matemática, que engloba a Álgebra Linear. (LEVORATO, 2017, p. 9)

A seguir são definidos alguns conceitos relacionados a sistemas linerares.

4.1 Sistemas Lineares

Segundo Iezzi et al. (2016), tem-se a seguinte definição: "Equação linear nas incógnitas $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ em que $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ e b são coeficientes reais (IEZZI et al., 2016, p. 97)".

A partir da definição de equações lineares, tem-se a definição de um sistema linear $m \times n$, que corresponde a um conjunto com m equações lineares em n incógnitas, sendo representado como (DANTE, 2016):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

Quando $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, o sistema é dito homogêneo. A solução de um sistema linear é composta por números reais α_1, α_2, ..., α_n que satisfazem as m equações do sistema. Um sistema linear pode também ser representado por meio de matrizes. Então, tem-se que o sistema em (1) pode ser reescrito como:

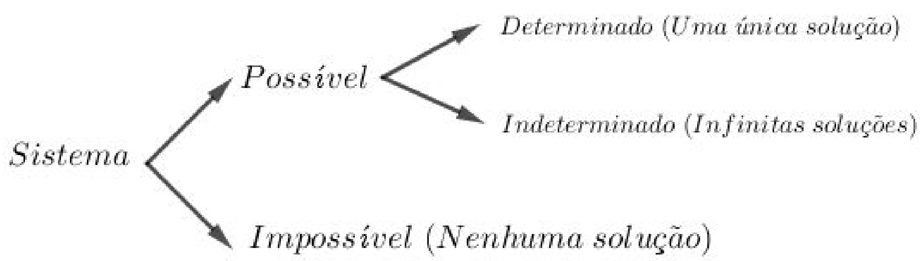
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

No oitavo ano do Ensino Fundamental, são apresentados estudos envolvendo sistemas de equações de ordem 2x2, ambas equações do primeiro grau com duas incógnitas cada. Para a resolução desses sistemas, são comumente apresentados o Método da Adição e o Método da Substituição (FERREIRA, 2013).

O método da adição visa eliminar uma das incógnitas de um sistema pela soma dos termos semelhantes das equações que formam o sistema. Já o método da substituição consiste em escolher uma das equações do sistema e isolar uma de suas incógnitas encontrando uma expressão para ela em função da outra para, em seguida, substituir na outra equação (FERREIRA, 2013).

As soluções dos sistemas lineares podem ser classificadas de acordo com a Fig. 1:

Figura 1 – Classificação dos Sistemas Lineares



Fonte: Elaborada pela autora.

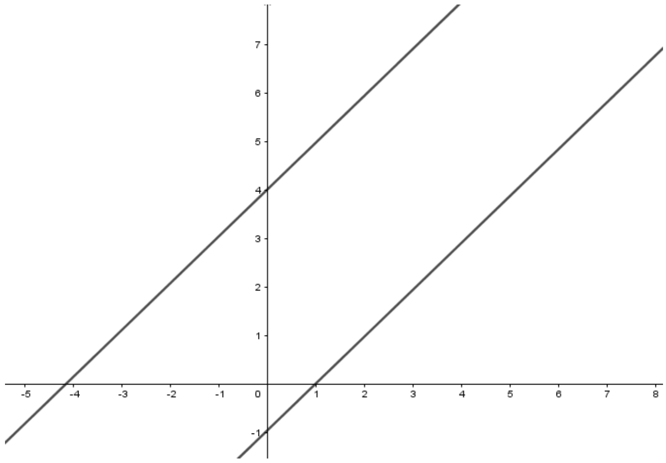
Pedrini (2013) descreve as soluções de um sistema 2×2 como:

> Sistema Impossível: quando as retas descritas pelas equações do sistema são paralelas, ou seja, não possuem intersecção, logo o sistema não possui nenhum ponto (x,y) que satisfaça ambas as equações do sistema, logo este não possui solução. Sistema Possível e Determinado: Quando as retas descritas pelas equações do sistema são concorrentes, ou seja, possui apenas um ponto de intersecção, as coordenadas (x,y) desde ponto são o conjunto solução. Sistema Possível e Indeterminado: quando as retas descritas pelas equações do sistema são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção, as coordenadas (x,y) de cada um destes pontos são uma solução do sistema. (PEDRINI, 2013, p. 11-12)

Um sistema homogêneo é, assim, sempre possível, pois a sequência $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{\text{n zeros}}$, dita solução nula, é solução. Se essa solução é única, o sistema é possível e determinado. Caso haja outras soluções, o sistema é possível e indeterminado (IEZZI et al., 2016).

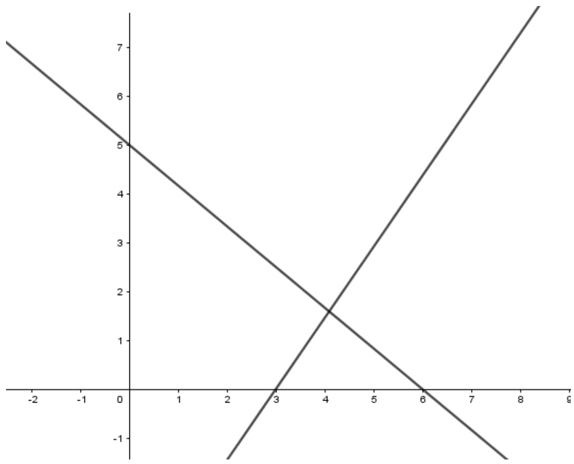
A interpretação dos sistemas lineares sob o ponto de vista geométrico serve como uma ferramenta eficiente para a compreensão e visualização das soluções de um sistema 2×2. Contudo, nota-se que tal recurso é pouco utilizado (FERREIRA, 2013).

Figura 2 – Representação gráfica do Sistema Impossível



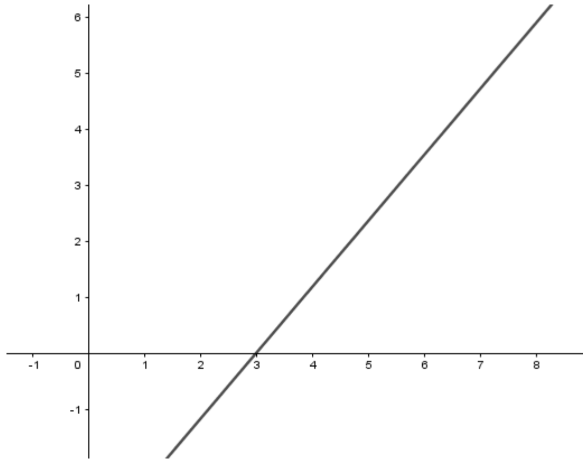
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 3 – Representação gráfica do Sistema Possível e Determinado



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 4 – Representação gráfica do Sistema Possível e Indeterminado



Fonte: Elaborada pela autora.

Pode-se realizar também a interpretação geométrica de sistemas lineares 3×3. No caso considerado, cada equação de um sistema linear será representada por um plano no sistema ortogonal $OXYZ$. Em sistemas 3×3 são encontradas, portanto, oito possibilidades, como visto a seguir (SOUZA; GARCIA, 2016).

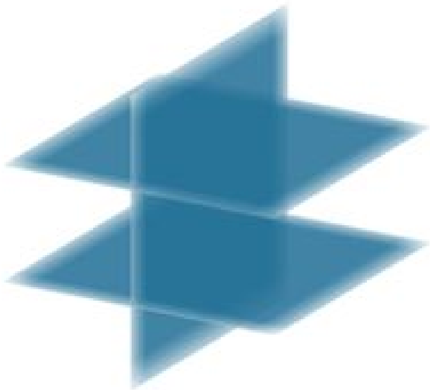
No caso em que a interseção dos pontos é reduzida a um ponto, o sistema é dito possível e determinado (Fig. 5).

Figura 5 – Três planos têm um único ponto em comum

Fonte: Elaborada pela autora.

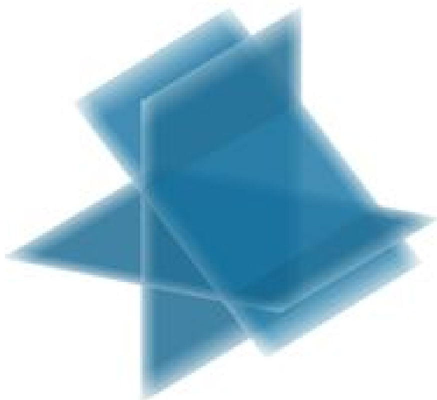
Quando não há nenhum ponto de interseção entre os planos, o sistema é dito impossível (Fig. 6, Fig. 7, Fig 8 e Fig. 9).

Figura 6 – Dois planos são paralelos e cada um deles possui uma reta distinta comum ao outro plano



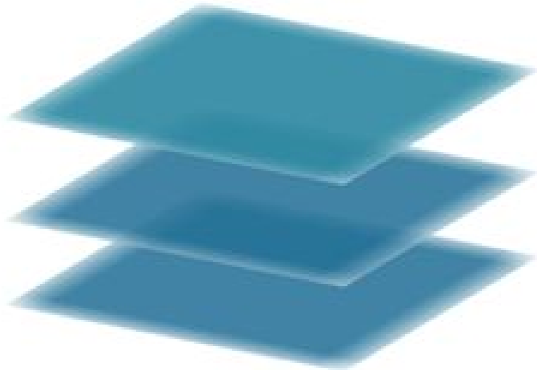
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 7 – Dois planos se intersectam dois a dois e não há um único ponto em comum aos três planos



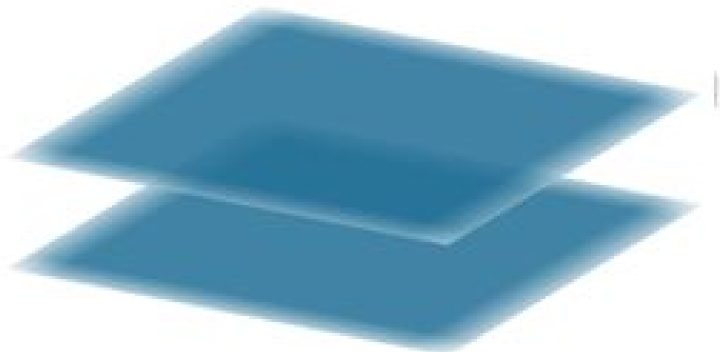
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 8 – Três planos paralelos



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 9 – Dois planos são coincidentes e esses são paralelos ao outro plano



Fonte: Elaborada pela autora.

Quando existe uma reta em comum aos três pontos ou no caso em que são coincidentes, o sistema é dito possível e indeterminado, pois há infinitas soluções para o sistema (Fig. 10, Fig. 11 e Fig. 12).

Figura 10 – Os três planos são distintos e possuem uma reta comum entre eles

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 11 – Dois planos são coincidentes e esses possuem uma reta em comum com o outro plano

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 12 – Três planos coincidentes

Fonte: Elaborada pela autora.

No Ensino Médio, são exibidos outros métodos de resolução para sistemas lineares, uma vez que o Método da Adição e da Subtração são mais adequados para sistemas de ordem 2×2, sendo pouco eficientes para sistemas de ordem 3×3 (PEDRINI, 2013). Os métodos de resolução que podem ser utilizados para sistema maiores que a ordem 2×2 são o Método de Escalonamento e a Regra de Cramer.

4.2 Método de Escalonamento

De acordo com Dante (2016), um sistema linear qualquer $m \times n$ apresenta-se escalonado quando pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \\ a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ou seja, para cada uma das linhas, a primeira incógnita cujo coeficiente é diferente de zero está à esquerda da primeira incógnita com mesma propriedade na linha abaixo.

Considerando-se a última linha de uma sistema na forma escalonada ($a_{mn}x_n = b_m$), tem-se que se $a_{mn} \neq 0$, então a solução do sistema é única, logo o sistema é possível e determinado.

No caso de $a_{mn} = 0$ e $b_m = 0$, o sistema é possível e indeterminado, possuindo assim infinitas soluções. Se $a_{mn} = 0$ e $b_m \neq 0$, tem-se que o sistema não possui solução, sendo portanto um sistema impossível.

Um sistema pode ser escalonado a partir da obtenção de um sistema equivalente[1] a ele. As etapas a serem seguidas incluem a troca da posição das equações, a multiplicação dos coeficientes de uma determinada equação por um mesmo número real não nulo e a soma de equações.

4.3 Determinantes

No caso em que a matriz associada ao sistema linear é quadrada, ou seja, $m = n$, há um método geral que pode ser usado para avaliar a existência de soluções. No caso de sistemas 2×2, o determinante da matriz associada ao sistema é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Então, o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da chamada diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. No caso das matrizes quadradas de ordem 3, uma forma de se obter o determinante é por meio da regra prática de Sarrus, em que os elementos das duas primeiras colunas são repetidas e é realizada a soma dos produtos dos elementos seguindo a diagonal principal, que é diminuída da soma dos produtos que seguem a diagonal secundária, como ilustrado a seguir (IEZZI et al., 2016).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array}$$

$$= a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32} - a_{12} \times a_{21} \times a_{33} - a_{11} \times a_{23} \times a_{32} - a_{13} \times a_{22} \times a_{31}$$

4.4 Regra de Cramer

Seja um sistema linear com número m de equações e m incógnitas. Assim, a matriz A associada ao sistema linear é uma matriz quadrada, com o mesmo número de linhas e colunas. Considerando D o determinante relativo à matriz A, tem-se que se $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado, com solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ (IEZZI, HAZZAN, 1977).

Além disso:

[1] Sistemas lineares são ditos equivalentes no caso em que possuírem o mesmo conjunto solução (DANTE, 2016).

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

para todo $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, sendo D_i o determinante da matriz obtida, a partir de A, substituindo a $i-$ésima coluna da matriz pela coluna de termos independentes do sistema linear.

Essa forma de obtenção de soluções não está presente dos atuais livros didáticos, situação que será discutida no capítulo 6. O próximo capítulo é destinado a expor alguns fatos relacionados ao ensino de Álgebra Linear no ensino.

5 A ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO BÁSICO

Neste capítulo é abordado o ensino de sistemas lineares na Educação Básica, com enfoque no Ensino Médio. Para isso, foi realizada uma breve abordagem inicial sobre o ensino de Álgebra Linear nos diferentes níveis de ensino e sua relação com os sistemas lineares.

Em seguida, é abordado o ensino de sistemas lineares na Educação Básica. Destaca-se a importância da sua aplicação em outras disciplinas e áreas de conhecimento, em assuntos e situações condizentes com a realidade dos educandos e do ambiente em que os mesmos estão inseridos.

De acordo com Silva (2013, p. 38): "A álgebra linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma "combinação linear" de elementos do conjunto".

Tem-se que os estudos de Álgebra Linear podem ser aplicados em diversas áreas da Engenharia, Economia, Biologia, Física, nos campos Computacionais, entre outras. No entanto essa disciplina, em geral, é ministrada de forma abstrata, não mostrando suas aplicações e relevância na formação dos estudantes (FRATELLI, 2007).

Analisando a aplicação da disciplina no Ensino Superior, nota-se que no primeiro ano da graduação a grande maioria dos alunos ainda não está preparada para estudar conceitos de matemática abstrata, como os de Álgebra Linear. Isso porque, no Ensino Básico, o contato com conceitos dessa natureza é baixo (CARDOSO, 2014).

Cardoso (2014) infere que, devido à falta de hábito dos alunos de realizar uma análise crítica sobre os conteúdos de Álgebra Linear no Ensino Médio, ao ingressarem nos cursos de exatas e engenharias no Ensino Superior, os alunos necessitam, assim, complementar a aprendizagem. Eles buscam tal ajuda através de ferramentas alternativas, como vídeo-aulas e materiais on-line.

O autor compara, em sua pesquisa, a quantidade de acessos às vídeo-aulas disponibilizadas em seu canal de uma plataforma on-line. A busca por conteúdos de Álgebra Linear, em relação às disciplinas de cálculo, é superior (CARDOSO, 2014).

Sobre a Educação Básica, Silva (2013) afirma que:

> Nas escolas da educação básica, os nossos alunos se deparam com os conteúdos de Funções, Matrizes, Geometria Analítica (ideia de pares ordenados), Números Complexos (que de certo modo, também remete a ideia de pares ordenados), Funções Polinomiais (que é um tipo especial de Função), estes objetos são munidos de duas estruturas algébricas, a saber, soma e multiplicação [...] e nos livros didáticos não é sequer mencionado, que estas estruturas, para aqueles alunos que seguirão estudos acadêmicos em áreas de exata, estarão presentes na disciplina de álgebra linear quando estudando os espaços vetorias. (SILVA, 2013, p.14)

Assim, verifica-se uma falta de continuidade na forma de abordagem dos conteúdos, contribuindo para o cenário retratado por Cardoso (2014).

5.1 Ensino de sistemas lineares

Em relação aos sistemas lineares, tem-se que seu estudo é iniciado no 8° ano do Ensino Fundamental e tal assunto torna-se de grande importância ao longo da vida escolar de cada discente na Educação Básica. Para Moura e Santos (2015), desde os fundamentos para o estudo dos sistemas lineares, o aluno é impulsionado a abstrair conceitos que muitas vezes tornam-se vazios de significado e sem nenhuma vinculação aos conteúdos futuros.

De acordo com Pereira (2017):

> O ensino dos sistemas lineares surge já no ensino fundamental como algo desafiador para os alunos. Quando o educando é abordado acerca de solucionar problemas que envolvam variáveis, isto por si só, já começa a estimular o mesmo a construir e seguir seu próprio raciocínio na busca da solução desejada. (PEREIRA, 2017, p. 80)

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, tem-se que a teoria e prática têm de caminhar juntas. Logo, deve haver "A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina" (BRASIL, 2018, p. 24).

Os sistemas de equações lineares, segundo Lima (1993), constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados, podendo servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais, onde uma situação problema pode introduzir o conteúdo.

Em vista disso, tem-se que o educando:

> [...] aprende mais quando lhe é permitido fazer relações, experiências e ter contato com material concreto, [...] é necessário inovar, fazer relações com o que vive o aprendente sempre que isto tiver ao nosso alcance [...]. (SILVA, 2013, p. 10)

Pode-se ainda afirmar, sobre o estudo de sistemas lineares, que:

> [...] constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas [...]. (PEDRINI, 2013, p. 1)

Silveira (2018, p. 15) destaca que o estudo de sistemas lineares tem grande valor na "[...] resolução de assuntos da vida em sociedade que vão desde questões de tráfego de veículos em ruas movimentadas a balanceamento de equações químicas." Além disso, a importância dos sistemas lineares também é evidenciada no emprego de outros conteúdos de matemática, como matrizes, determinantes e modelagem (SILVEIRA, 2018).

Contudo, nota-se que ainda existem dificuldades a serem superadas a respeito do conteúdo. O ensino de sistemas lineares, segundo Ferreira (2013), vem sendo apresentado ao longo dos anos no Ensino Médio de maneira sucinta e superficial, sem mostrar, em vários momentos, suas aplicações e importância para a matemática. Em grande parte, tal assunto vem sendo empregado nos livros didáticos de forma mecanicista, onde pouco se promove o real aprendizado do mesmo.

O conteúdo de sistemas lineares, no Ensino Fundamental, tem como finalidade, segundo os PCN, de "Resolver situações problema por meio de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas" (BRASIL, 1998, p. 92). Mesmo com toda a estruturação do conteúdo ao longo da formação do discente, percebe-se que o estudo de sistemas lineares não tem se tornado tangível, e tal situação confirma-se quando "[...] este assunto é retomado no Ensino Médio onde estes se mostram extremamente surpresos com o mesmo dando a entender que nunca estudaram o referido objeto matemático" (PANTOJA et al., 2013, p. 2).

Uma possível causa para essa desconexão de conteúdo se dá pela forma de como o mesmo é abordado, pois:

> [...] Não se trabalham aplicações dos sistemas para a percepção de sua importância científica e também industrial. Dessa maneira não se favorece a concepção de continuidade do conteúdo, não se abordam aplicações mais sofisticadas para que se aprimorem os problemas propostos, impedindo uma visão mais generalista do tema. (FERREIRA, 2013, p. 17)

Para Moura e Santos (2015), desde os fundamentos para o estudo dos sistemas lineares, o aluno é impulsionado a abstrair conceitos que muitas vezes tornam-se vazios de significado e sem nenhuma vinculação aos conteúdos futuros. Tal ponto se torna prejudicial, visto tamanha importância de se obter um bom nível de aprendizado dos conceitos de sistemas lineares e suas possíveis aplicações.

Quanto à abordagem do conteúdo de sistemas lineares no Ensino Fundamental II, Moura e Santos (2015) acreditam que:

> Esse conteúdo muitas vezes é estigmatizado com duas variáveis e algumas aplicações restritas, dificultando a visualização do aluno de modo a compreender bem tanto que figuras geométricas serão representadas, quanto à significação do que a resolução denota. (MOURA; SANTOS, 2015, p. 3)

Rangel (2011) dispõe que o ensino de sistemas lineares na Educação Básica é baseado nos livros didáticos, apresentando uma metodologia tradicional, através da exposição teórica do conteúdo e aplicação de exercícios de fixação. Rufato (2014) evidencia a importância da aplicabilidade, visto que:

> A não aplicação dos saberes escolar conduz os alunos a um aprendizado mecânico e desprovido de reflexão, pois eles não conseguem relacioná-los com o seu dia a dia. Na verdade o estudo sem contextualização de um tema pode não permitir a exploração do caráter indagador que ele possui, daí, em muitos casos, não possibilitar a construção significativa do conhecimento. (RUFATO, 2014, p. 17)

Diante das dificuldades relacionadas ao ensino do conteúdo em questão percebe-se, assim, a importância de se buscar métodos ou aplicações para que se torne mais evidente a utilidade do conteúdo. Pois:

> [...] quanto mais oportunidades de aplicação o conteúdo oferecer, mais sentido pode ser dado ao seu estudo. Da mesma forma, quanto mais se pode relacionar o conteúdo de matemática com as demais áreas, mais se incentiva os alunos a perceberem a importância do conteúdo e sua aplicabilidade. (FERREIRA, 2013, p. 75)

Andrade (2013) considera que quando os professores iniciam o estudo de sistemas lineares por meio da resolução de problemas não matemáticos, os alunos se sentem motivados a apresentar ideias e sugestões, pois é possível relacionar os problemas com o cotidiano. Essa forma de abordagem aumenta a participação dos alunos nas aulas, bem como a interação entre alunos e professores, e entre os próprios alunos também.

Diante do exposto, o ensino de sistemas lineares não pode ser tratado de maneira a tornar a aprendizagem cansativa, nem se limitar a métodos mecânicos e tradicionais, mas sim deve-se buscar meios de se motivar o aluno, cativando-o para o aprendizado matemático, expondo um horizonte de resolução de situações-problemas através da aplicação da matemática e dos sistemas lineares. O aprendizado, portanto, se torna significativo e duradouro (MOURA; SANTOS, 2015).

Tais aplicações serão objeto de estudo no sétimo capítulo. O próximo capítulo se destina a um breve resumo de como o tema é abordado em alguns livros didáticos.

6 ABORDAGEM DE SISTEMAS LINEARES EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Tem-se que o livro didático é um instrumento importante no cotidiano escolar. Brandão (2014), destaca que os livros didáticos auxiliam, orientam e direcionam o currículo escolar e o processo de ensino aprendizagem, sendo em muitas vezes o único material utilizado por alunos e professores.

Santos e Martins (2011) declaram que ao longo dos anos o livro didático vem se tornando uma ferramenta de caráter pedagógico, capaz de produzir e conduzir possíveis mudanças e melhorias na prática pedagógica. Teixeira (2011) afirma que pode-se verificar sua importância nas políticas governamentais, que posicionam o Brasil como um país que apresenta um dos maiores programas de distribuição de livros.

No momento atual, percebe-se o grande crescimento de tecnologias que auxiliam na aprendizagem. Porém, tem-se que os livros ainda constituem um dos métodos mais utilizados nas escolas. Segundo Oliveira (2014):

> [...] mesmo diante das transformações metodológicas implantadas a partir dos avanços tecnológicos, vivenciados na atualidade, o livro escolar continua a ser o material didático mais utilizado nas salas de aula do Brasil. Podemos mesmo afirmar que o histórico do livro didático vem ao longo dos anos entrelaçado com a história das próprias disciplinas escolares. (OLIVEIRA, 2014, p. 2)

Em referência a escolha de livros didáticos, tem-se que o que o PNLD é o programa mais antigo relacionado à distribuição de exemplares aos estudantes da rede pública de ensino. Tal programa iniciou-se em 1937 e recebeu várias designações ao longo dos anos.

No PNLD (BRASIL, 2018), é apontado um conjunto de coleções de livros para o Ensino Médio que auxiliam alunos e professores, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em sala de aula. Dessa forma, observa-se a importância dos livros adotados na formação dos discentes.

Sobre o conteúdo de sistemas lineares:

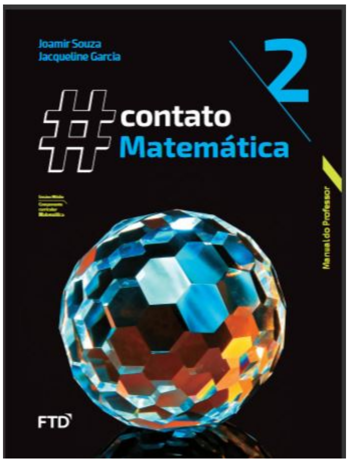
> Em geral, a articulação entre sistemas lineares e geometria, no caso dos sistemas de equações lineares 2×2 é bem conduzida. Nessas situações, cada equação do sistema representa uma reta no plano cartesiano e o sistema terá infinitas soluções, uma única ou nenhuma solução, a depender da posição de uma reta em relação a outra: coincidentes, concorrentes ou paralelas distintas. No entanto, já não é tão simples realizar conexão análoga entre sistemas de equações lineares 3×3 e as posições relativas de três planos no espaço tridimensional. Uma dificuldade vem de que, comumente, o estudo da equação cartesiana de um plano no espaço tridimensional não é feito no Ensino Médio. Em face disso, tem prevalecido uma abordagem meramente informativa para relacionar as possibilidades de solução de um sistema linear 3×3 com as posições

> relativas de três planos no espaço, o que é insatisfatório do ponto de vista da aprendizagem. No que se refere à resolução de sistemas lineares, o método de escalonamento, atualmente o mais indicado, vem recebendo atenção crescente no Ensino Médio. Além disso, a nomenclatura "sistema determinado", "sistema impossível" e "sistema indeterminado", poderia, vantajosamente, ser substituída por "sistema com uma única solução", "sistema com infinitas soluções" e "sistema sem soluções". Afinal, é isso que realmente se verifica quando se resolve um sistema pelo método do escalonamento da matriz aumentada do sistema. Apesar de o método de escalonamento ser privilegiado na resolução de sistemas, há muito a avançar no ensino desse importante algoritmo para resolver sistemas, na medida em que as abordagens são muitas vezes centradas em apenas alguns exemplos, que não abrangem todas as situações possíveis. Além disso, um bom tópico opcional, ainda ausente nos livros, poderia ser a comparação entre o emprego de escalonamento e o de determinantes, do ponto de vista do número de operações envolvidas em cada um deles. (BRASIL, 2018, p. 29-30)

A seguir, é descrito como o conteúdo de sistemas lineares é abordado em cinco livros do segundo ano do Ensino Médio, livros esses que fazem parte de coleções indicadas pelo PNLD.

6.1 Contato Matemática

Figura 13 – Capa do livro



Fonte: Souza e Garcia (2016).

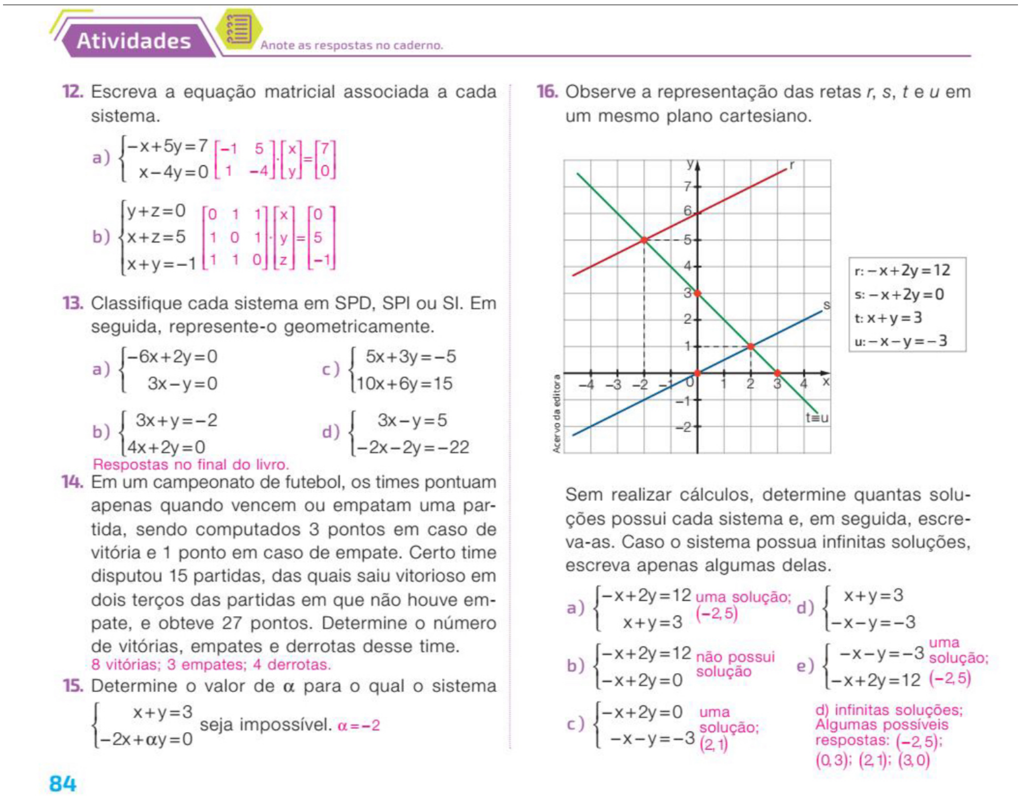
O livro *Contato Matemática - Volume 2*, dos autores Souza e Garcia (2016), expõe o conteúdo de sistemas lineares ao longo de 20 páginas, divididas entre conteúdo e exercícios. A introdução é feita através de um contexto sobre comunicações, onde é feita a relação entre o consumo de uma internet móvel com sistemas lineares.

Os autores apresentam a definição de equação linear acompanhada de exemplos e exercícios, depois mostrando as definições de sistemas lineares e sistemas lineares homogêneos, seguidas de atividades resolvidas e exercícios propostos. São abordadas então matrizes associadas a um sistema linear e classificação dos sistemas, com exemplos, atividades resolvidas e exercícios.

É feita uma breve explicação sobre circuitos elétricos, sendo trazida uma atividade que relaciona tal assunto com o conteúdo de sistemas. Na sequência vem a definição de escalonamento de um sistema linear, sistemas equivalentes e sistema escalonado, todos seguidos de exemplos e, no final da explicação, há atividades resolvidas.

Logo após, traz breve discussão de um sistema linear e suas interpretações gráficas dos sistemas de ordem 3×3 (é o único livro, dentre os cinco livros citados, que faz tal discussão). No final do capítulo, encontram-se mais exercícios. Esse livro traz, em seus exercícios, aplicações na física e química. As atividades, na maior parte, são voltadas para exercícios de fixação e interpretações gráficas.

Figura 14 – Exercícios



Atividades Anote as respostas no caderno.

12. Escreva a equação matricial associada a cada sistema.

a) $\begin{cases} -x+5y=7 \\ x-4y=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, represente-o geometricamente.

a) $\begin{cases} -6x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+3y=-5 \\ 10x+6y=15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y=-2 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x-2y=-22 \end{cases}$

Respostas no final do livro.

14. Em um campeonato de futebol, os times pontuam apenas quando vencem ou empatam uma partida, sendo computados 3 pontos em caso de vitória e 1 ponto em caso de empate. Certo time disputou 15 partidas, das quais saiu vitorioso em dois terços das partidas em que não houve empate, e obteve 27 pontos. Determine o número de vitórias, empates e derrotas desse time.
8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas.

15. Determine o valor de α para o qual o sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x+\alpha y=0 \end{cases}$ seja impossível. $\alpha=-2$

16. Observe a representação das retas *r*, *s*, *t* e *u* em um mesmo plano cartesiano.

Sem realizar cálculos, determine quantas soluções possui cada sistema e, em seguida, escreva-as. Caso o sistema possua infinitas soluções, escreva apenas algumas delas.

a) $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+y=3 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

b) $\begin{cases} -x+2y=12 \\ -x+2y=0 \end{cases}$ não possui solução

c) $\begin{cases} -x+2y=0 \\ -x-y=-3 \end{cases}$ uma solução; $(2, 1)$

d) $\begin{cases} x+y=3 \\ -x-y=-3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x-y=-3 \\ -x+2y=12 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

d) infinitas soluções; Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$

84

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 84).

Figura 15 – Exercícios

17. Certo motorista abasteceu seu carro com uma mistura de etanol e gasolina, totalizando 40 L. Sabendo que a quantidade de etanol colocada foi 3 vezes a de gasolina, calcule a quantidade de cada combustível com que o carro foi abastecido.
etanol: 30 L; gasolina: 10 L

18. Em cada item, o sistema foi classificado em SPD, SPI ou SI.

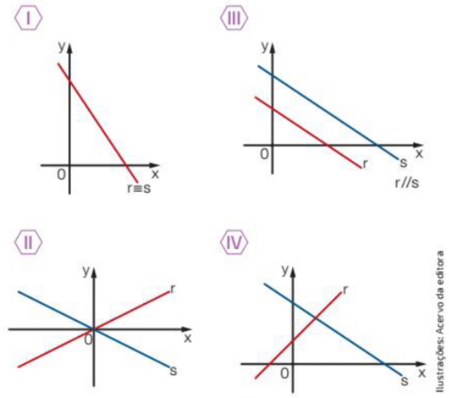
a) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (SPD)

c) $\begin{cases} a_5x+b_5y=c_5 \\ a_6x+b_6y=c_6 \end{cases}$ (SI)

b) $\begin{cases} a_3x+b_3y=c_3 \\ a_4x+b_4y=c_4 \end{cases}$ (SPI)

d) $\begin{cases} a_7x+b_7y=0 \\ a_8x+b_8y=0 \end{cases}$ (SPD)

Associe cada sistema a um dos gráficos abaixo, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–IV; b–I; c–III; d–II



19. Em um depósito, foram armazenadas sacas de adubo e sacas de sementes, totalizando 30 toneladas. Sabe-se que cada saca de adubo tem massa igual a 50 kg, cada saca de sementes, 60 kg, e que o triplo da massa de adubo armazenado é igual ao dobro da massa de sementes. Com base nessas informações, calcule o total de sacas de adubo e de sementes que foram armazenadas no depósito.
adubo: 240 sacas;
sementes: 300 sacas

20. Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$x=3$; $y=-2$; $z=-1$

21. Em certa banca de feira, 2,5 kg de laranjas (L) mais 1,6 kg de peras (P) custam R$ 26,70. Nessa mesma banca, 4 kg de laranjas mais 3,5 kg de peras custam R$ 54,00. Com base nessas informações, escreva e resolva um sistema linear cuja solução forneça o preço de 1 kg de laranjas e 1 kg de peras.
$\begin{cases} 2,5L+1,6P=26,70 \\ 4L+3,5P=54,00 \end{cases}$; L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

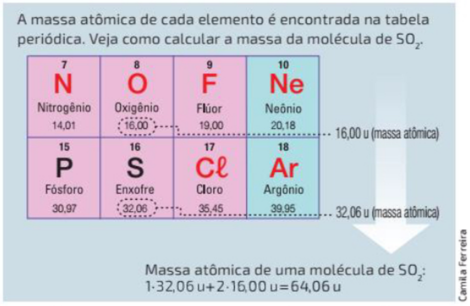
22. O átomo é considerado a unidade fundamental de um elemento químico. O conceito de átomo é um dos mais importantes da Química e por meio dele é possível explicar diversos fenômenos da natureza.

A massa do átomo é expressa em unidades de massa atômica, sendo representada pela letra **u** e tendo como referência a massa do **isótopo** mais abundante do carbono, denominado carbono-12 (^{12}C). Uma unidade de massa atômica corresponde a $\frac{1}{12}$ da massa desse isótopo do carbono. A massa atômica é de importância fundamental, pois é por meio dela que é possível obter as massas moleculares e as fórmulas químicas. Além disso, é utilizada na construção constante da tabela periódica, com o objetivo de organizar e direcionar as informações científicas sobre os elementos químicos.

A massa de uma molécula pode ser determinada adicionando-se as massas de seus átomos componentes. Para determinar, por exemplo, a massa de uma molécula de SO_2 (dióxido de enxofre), que é composta por 1 átomo de enxofre (S) e 2 de oxigênio (O), deve-se adicionar a massa atômica do enxofre a duas vezes a massa atômica do oxigênio.

Fonte de pesquisa: RUSSEL, John B. **Química geral**. Tradução e revisão técnica Márcia Guekezian et al. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.

Isótopo: o isótopo de um elemento químico possui átomos com o mesmo número de prótons, porém com diferente número de nêutrons.



a) Sabendo que a massa de uma molécula de C_2H_4 (etileno) corresponde a 28 u, e a massa de uma molécula de C_4H_{10} (butano) corresponde a 58 u, determine a massa atômica do carbono (C) e do hidrogênio (H). carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u

b) Conhecendo apenas a massa de uma molécula de $C_4H_8O_2$ (ácido butírico), que corresponde a 88 u, produzido quando a manteiga se deteriora, e de uma molécula de $C_8H_{10}O_2N_4$ (cafeína), que corresponde a 194 u, é possível determinar a massa atômica do C, H, O e N (nitrogênio)? Justifique.
não; Resposta esperada: pois se obtivermos um sistema de equações a partir dessas informações, ele será possível e indeterminado.

Sistemas lineares 85

Capítulo 3

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 85).

6.2 Matemática Ciência e Aplicações

Figura 16 – Capa do livro

Fonte: Iezzi et al. (2016).

No livro *Matemática Ciência e Aplicações* - *Volume 2*, de Iezzi et al (2016), inicia-se o assunto de sistemas lineares através de um exemplo cotidiano relacionado a um sistema de ordem 2×2. Em seguida, é exibida a interpretação gráfica dos sistemas de ordem 2×2, sendo realizadas as classificações dos sistemas: sistema possível (S.P), sistema impossível (S.I), sistema possível e determinado (S.P.D) e sistema possível e indeterminado (S.P.I), seguido de exercícios. Como curiosidade, é apresentada brevemente a história do surgimento dos sistemas lineares.

São exibidas as soluções de um sistema, matrizes associadas a um sistema, exemplos da representação matricial e exercícios. Os autores trazem a explicação de sistemas escalonados através de um exemplo de sistema 3×3, apontam as características de um sistema escalonado e apresentam duas formas de resolução: a primeira relacionada a um sistema com número de equações igual ao número de incógnitas e a segunda relacionada a sistemas com número de equações menor que o número de incógnitas, ambas exemplificadas, com exercícios resolvidos.

Os autores apresentam o método de escalonamento e sistemas equivalentes, seguidos de cinco exemplos, sendo feitas observações ao longo das resoluções. Seguem para a definição de determinantes de sistemas de ordem 2×2 e 3×3, e faz-se uma aplicação de sistemas lineares no balanceamento de equações químicas. Vem assim a definição de sistema linear homogêneo. No final do capítulo, mostra-se o cálculo do determinante de sistemas de ordem 3×3 através da Regra de Sarrus. Poucos exercícios da obra são voltados para as aplicações, sua maioria estão voltados para a interpretação gráfica, para o conteúdo e também para algumas situações cotidianas (Fig. 17).

Figura 17 – Exemplos de exercícios

Sistemas lineares 115

37 Três amigas, Ana, Bia e Carol, têm juntas R$ 340,00. Se Ana gastar R$ 10,00, passará a ter o dobro do que tem Bia. Se Ana gastar 40% do total que possui, passará a ter R$ 9,00 a menos que Carol. Quanto tem cada uma?

38 Em uma papelaria foram feitos os seguintes pedidos:

- pedido I: 4 canetas, 3 lapiseiras e 6 borrachas.
- pedido II: 2 canetas, 2 lapiseiras e 3 borrachas.

Os valores dos pedidos I e II eram, respectivamente, R$ 37,20 e R$ 20,60.

Com base nessas informações, determine, se possível:

a) o preço unitário da lapiseira;

b) o preço de cada caneta;

c) o preço pago por 5 lapiseiras, 2 canetas e 3 borrachas;

d) a diferença entre o preço da caneta e o preço da borracha.

39 Para a final de um campeonato de futebol, foram colocados à venda 40 000 ingressos, divididos entre arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta.

Sabe-se que:

- todos os ingressos foram vendidos;
- o preço do ingresso para a numerada coberta é igual à soma dos preços dos ingressos dos outros dois setores;
- 60% do total de ingressos foram vendidos para a arquibancada, 25% para a numerada descoberta e os demais para a numerada coberta, gerando uma arrecadação de 4,32 milhões de reais;
- a razão entre os preços dos ingressos para a numerada descoberta e coberta é, nessa ordem, igual a $\frac{3}{5}$. Determine o preço dos ingressos para cada setor.

40 Uma fábrica de colchões utiliza três tipos de molas $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$ na confecção de três tipos de colchões $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$, todos com dimensões 2 m × 1,20 m. O número de molas usados na confecção dos três tipos de colchões é dado na tabela seguinte.

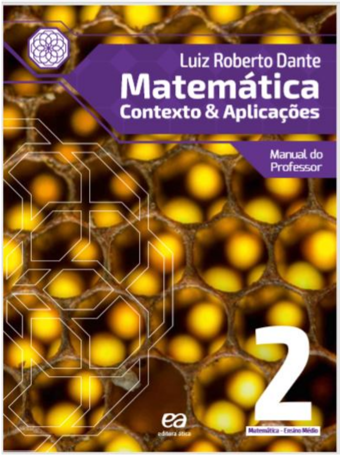
Mola \ Colchão	C_1	C_2	C_3
M_1	96	144	240
M_2	96	48	24
M_3	96	96	24

Sabendo que, em uma semana, foram utilizados, 19 200 molas do tipo $\mathbf{M_1}$, 10 080 molas do tipo $\mathbf{M_2}$ e 12 480 molas do tipo $\mathbf{M_3}$, determine a soma das quantidades de colchões produzidos naquela semana.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 115).

6.3 Matemática Contexto e Aplicações

Figura 18 – Capa do livro



Fonte: Dante (2016).

No livro do autor Dante (2016), intitulado *Matemática Contexto e Aplicações - Volume 2*, inicia-se o conteúdo com uma curiosidade sobre o jogo sudoku, o qual é um problema de lógica baseado na alocação de números em forma de matriz, cujo objetivo é prencher uma matriz 9×9. O autor afirma que em 2008 foi proposta uma solução para o jogo através de uma programação linear. Após, o conteúdo é iniciado retomando o Método Chinês, anteriormente mencionado no capítulo 4 do mesmo livro. O autor resgata o assunto no capítulo de sistemas lineares criando uma ligação entre o Método Chinês e um sistema de ordem 2×2. Em seguida são definidos equações lineares, sistema de equações lineares e suas classificações, exibindo a interpretação gráfica dos sistemas 2×2.

Figura 19 – Exemplo de exercícios

Exercício resolvido — **passo a passo:** exercício 3

Resolvido passo a passo

3. (Unisa-SP) Augusto, Vinícius e Leonardo estudam no mesmo colégio e vão caminhando de suas casas ao colégio todos os dias. Somadas as distâncias percorridas pelos três colegas, mensalmente, obtém-se 350 km. Sabe-se que Augusto percorre o dobro da distância percorrida por Vinícius e que Leonardo percorre 10 km a menos que os outros dois colegas juntos. Desse modo, Leonardo percorre mensalmente a mais que Augusto no trajeto casa-escola uma distância, em km, igual a:

a) 80.

b) 70.

c) 50.

d) 60.

e) 40.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

As informações referentes às distâncias percorridas pelos três estudantes, bem como a comparação das distâncias entre eles.

b) O que se pede?

O quanto Leonardo anda, mensalmente, a mais que Augusto, em km.

2. Planejando a solução

A partir das informações obtidas no enunciado podemos montar um sistema de equações, mostrado a seguir:

$$\begin{cases} A + V + L = 350 \\ A = 2V \\ A + V = L + 10 \end{cases}$$

Depois de montado o sistema, tentamos simplificá-lo para encontrar as distâncias percorridas. Após encontrar as distâncias percorridas mensalmente por Leonardo e Augusto, basta subtraí-las para encontrar a resposta desejada.

3. Executando o que foi planejado

Desenvolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} A + V + L = 350 \\ A = 2V \\ A + V = L + 10 \end{cases}$$

- $A + V + L = 350 \Rightarrow (L + 10) + L = 350 \Rightarrow 2L = 340 \Rightarrow L = 170$ km
- $A + V = L + 10 \Rightarrow (2V) + V = L + 10 \Rightarrow 3V = 180 \Rightarrow V = 60$ km
- $A = 2V \Rightarrow A = 120$ km

Logo, Leonardo percorre 50 km a mais que Augusto.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **c**.

5. Ampliando o problema

a) Levando em consideração que os alunos vão para a escola caminhando e que, segundo um instituto de análises físicas, a cada quilômetro percorrido por dia são gastas 20 quilocalorias e são dados 4 000 passos, quantas quilocalorias são gastas diariamente por cada estudante? E quantos passos são dados por cada um?

a) $\begin{cases} \text{Leonardo} \simeq 113 \text{ quilocalorias; } \simeq 22\,667 \text{ passos.} \\ \text{Augusto} = 80 \text{ quilocalorias; } 16\,000 \text{ passos.} \\ \text{Vinícius} = 40 \text{ quilocalorias; } 8\,000 \text{ passos.} \end{cases}$

b) *Discussão em equipe*

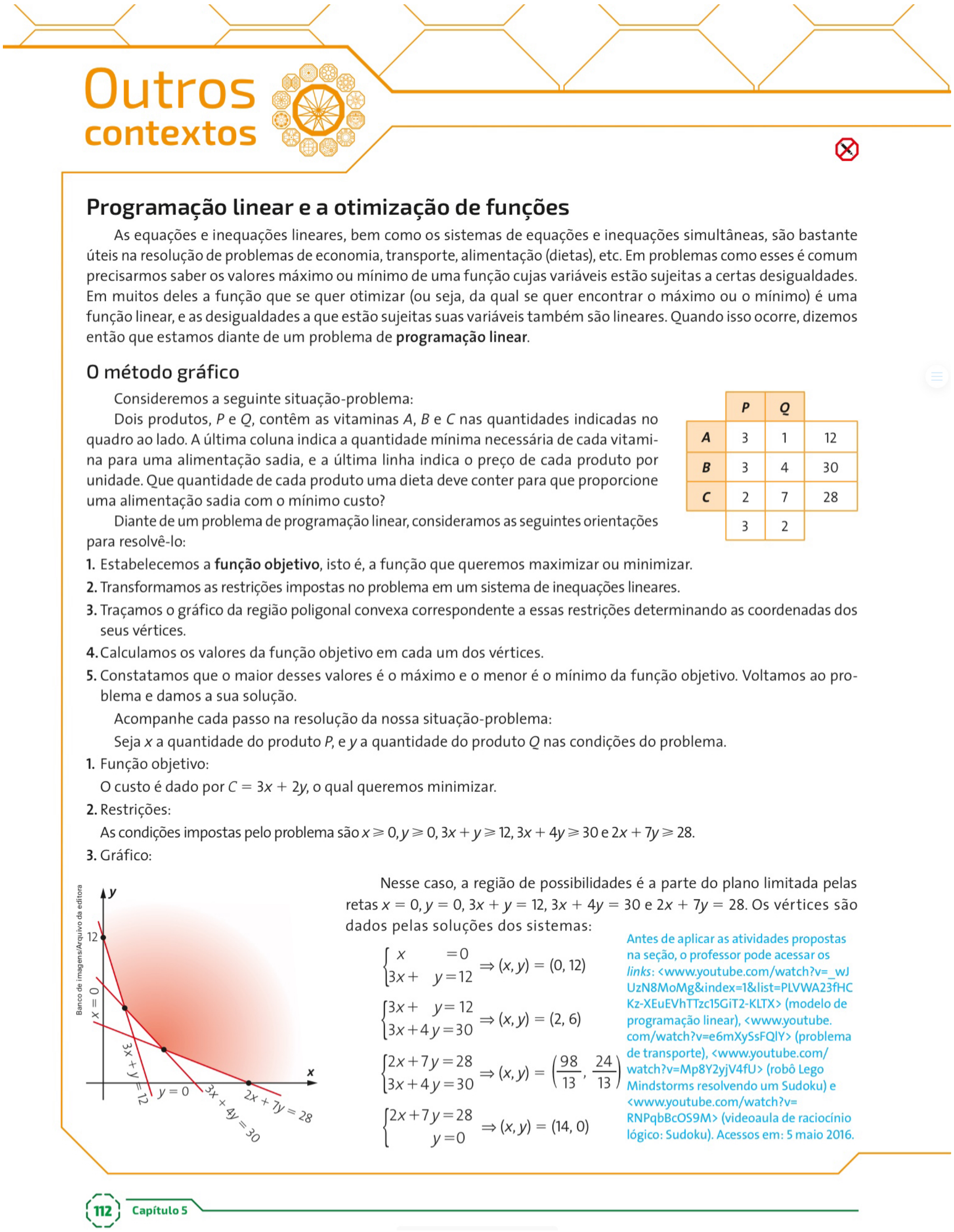
Com os colegas, troque ideias sobre a importância do exercício físico regular para a saúde, por menor que seja. Pesquisem artigos científicos sobre a melhora do bem-estar a partir da prática das atividades físicas. Ao final, combine com os amigos a prática de atividades físicas em equipe tendo em vista a saúde e a sociabilização do grupo. Resposta pessoal.

Sistemas lineares 107

Fonte: Dante (2016, p. 107).

Posteriormente, são apresentados sistemas em forma de matriz, escalonamento de sistemas lineares e sistemas equivalentes. O processo para escalonar um sistema é feito passo a passo e são exibidos seis exemplos de sistemas escalonados. No final do capítulo, é apresentado um exercício relacionado à programação linear e à otimização de funções (Fig. 20), e também questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de vestibulares para a fixação e aplicação do conteúdo.

Figura 20 – Aplicação em programação linear



Outros contextos

Programação linear e a otimização de funções

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis na resolução de problemas de economia, transporte, alimentação (dietas), etc. Em problemas como esses é comum precisarmos saber os valores máximo ou mínimo de uma função cujas variáveis estão sujeitas a certas desigualdades. Em muitos deles a função que se quer otimizar (ou seja, da qual se quer encontrar o máximo ou o mínimo) é uma função linear, e as desigualdades a que estão sujeitas suas variáveis também são lineares. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos diante de um problema de **programação linear**.

O método gráfico

Consideremos a seguinte situação-problema:

Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro ao lado. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	***Q***	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Diante de um problema de programação linear, consideramos as seguintes orientações para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a **função objetivo**, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico da região poligonal convexa correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
5. Constatamos que o maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo. Voltamos ao problema e damos a sua solução.

Acompanhe cada passo na resolução da nossa situação-problema:

Seja x a quantidade do produto P, e y a quantidade do produto Q nas condições do problema.

1. Função objetivo:

   O custo é dado por $C = 3x + 2y$, o qual queremos minimizar.

2. Restrições:

   As condições impostas pelo problema são $x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3x + y \geqslant 12, 3x + 4y \geqslant 30$ e $2x + 7y \geqslant 28$.

3. Gráfico:

Nesse caso, a região de possibilidades é a parte do plano limitada pelas retas $x = 0, y = 0, 3x + y = 12, 3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 12)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 6)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14, 0)$$

Antes de aplicar as atividades propostas na seção, o professor pode acessar os *links*: <www.youtube.com/watch?v=_wJUzN8MoMg&index=1&list=PLVWA23fHCKz-XEuEVhTTzc15GiT2-KLTX> (modelo de programação linear), <www.youtube.com/watch?v=e6mXySsFQlY> (problema de transporte), <www.youtube.com/watch?v=Mp8Y2yjV4fU> (robô Lego Mindstorms resolvendo um Sudoku) e <www.youtube.com/watch?v=RNPqbBcOS9M> (videoaula de raciocínio lógico: Sudoku). Acessos em: 5 maio 2016.

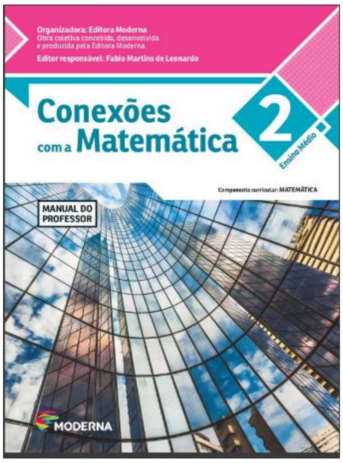
112 Capítulo 5

Fonte: Dante (2016, p. 112).

O livro traz outros exercícios aplicados na biologia e química, e também exercícios explorando a interpretação gráfica dos sistemas. No geral, a maioria das atividades são para exercitar os conteúdos assimilados.

6.4 Conexões com a Matemática

Figura 21 – Capa do livro



Fonte: Leonardo (2016).

O livro *Conexões com a Matemática - Volume 2* do organizador Leonardo (2016), dá inicio ao capítulo de sistemas lineares apresentando seus objetivos, que são: representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares; reconhecer e classificar sistemas lineares; apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa; e aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

No início do capítulo, é comentado sobre a tragédia na cidade de Mariana (MG), no ano de 2015, destacando que se pode usar sistemas lineares para o cálculo do tempo de chegada da lama ao oceano. Em seguida, é iniciado o conteúdo de equações lineares, onde se apresenta uma situação-problema, sendo exibida a definição formal de equação linear, sendo também abordadas as soluções de uma equação linear.

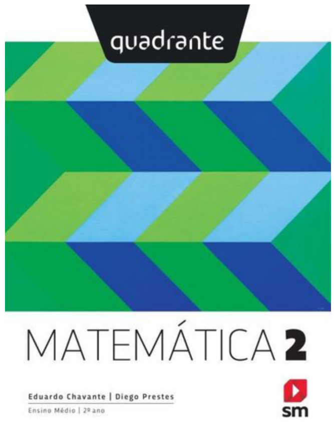
O conteúdo de sistemas de equações lineares é introduzido através de um exemplo aplicado na química, onde se precisa balancear uma equação química. Daí, expôe-se a definição de sistemas lineares junto com exemplos. Posteriormente, é apresentada a solução de um sistema linear juntamente com a interpretação gráfica do sistema dado, seguidos da classificação dos sistemas, exemplos e exercícios propostos.

Logo depois, é introduzido o conteúdo de sistemas lineares homogêneos. Em seguida, apresentam-se matrizes associadas a um sistema e representação matricial de um sistema. Tem-se então o escalonamento de sistemas lineares, sistemas escalonados e o processo do escalonamento. No final do capítulo, encontram-se exercícios propostos, complementares e exercícios de auto avaliação.

Nota-se que os únicos exercícios aplicados em outras disciplinas exibidos no livro são os de balanceamento químico e o exercício de dieta alimentar. Há a ausência da interpretação gráfica das possíveis soluções de sistemas 2×2 e 3×3 e, em sua maioria, os exercícios são voltados para a fixação de conteúdo.

6.5 Quadrante Matemática

Figura 22 – Capa do livro



Fonte: Chavante e Prestes (2016).

No livro *Quadrante Matemática - Volume 2*, de Chavante e Prestes (2016), a unidade três se destina ao estudo de sistemas lineares, antes do assunto relacionado a matrizes e determinantes. O capítulo quatro começa com a definição de uma equação linear.

O livro introduz o conteúdo com um exemplo envolvendo um sistema 2×2. Após a obtenção do sistema que modela o problema, sem resolvê-lo, é realizada a definição do que vem a ser um sistema linear $m \times n$. As classificações de um sistema linear só vêm acompanhadas de representação geométrica para os sistemas 2×2, e a apresentação dos métodos de resolução desses, a saber, método da substituição e método da adição, vêm apenas por meio de exercícios, sem uma exposição para o caso geral ou uma explicação mais detalhada.

Então, são colocados exercícios sobre o conteúdo, sendo seguidos do tópico sobre escalonamento de um sistema linear, que é credidato a Gauss. Afirma-se que um sistema está em forma escalonada se:

> [...] as equações que possuem pelo menos um coeficiente não nulo são tais que a quantidade de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo aumenta de uma equação para a seguinte; as equações com todos os coeficientes nulos estão abaixo das demais. (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 113)

Posteriormente, a forma para obter sistemas escalonados é abordada por meio de exemplos resolvidos, predominantemente por sistemas 3×3. Os exercícios do capítulo trazem, no enunciado, o sistema já montado, apenas quatro deles demandam a obtenção do sistema, sendo que um deles vem resolvido.

No capítulo sobre determinantes, tem-se uma discussão sobre sistemas lineares. O primeiro caso considerado é de um sistema 2×2. Nesse caso, se o determinante da matriz associada ao sistema é não nulo, então o sistema é possível e determinado. Caso contrário, o sistema poderá ser possível e indeterminado ou impossível. No caso de sistemas 3×3, obtém-se a mesma conclusão.

Ao longo deste capítulo, alguns pontos relacionados à abordagem de sistemas lineares no Ensino Médio foram expostos. Pode-se verficar que o conteúdo é, em grande parte, centrado em resoluções de sistemas 2×2, apresentando uma interpretação geométrica e formas diferentes de resolução.

Quanto aos sistemas 3×3, tal interpretação geométrica é, geralmente, suprimida, e o método de resolução adotado para esses sistemas e os demais é o método do escalonamento. Por isso, uma comparação entre esse método e o de determinantes (Cramer) nem chega a ser realizada, o que é uma sugestão do PNLD (BRASIL, 2018).

No próximo capítulo serão expostas algumas aplicações de sistemas lineares que são abordadas nos livros didáticos. Tais exercícios recebem atenção especial nos livros didáticos, sendo exibidos em páginas bem ilustradas, de maneira a chamar mais atenção que os demais. Atividades desse tipo podem ajudar na compreensão do assunto, melhorando a relação do aluno com a álgebra linear. Tal fato ocorre pelo estabelecimento de relações dos exercícios com problemas reais, envolvendo inclusive outras ciências.

7 APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES EM OUTRAS CIÊNCIAS

Tem-se que os sistemas de equações lineares são ricos em aplicações e podem ser utilizados em várias áreas do conhecimento. Este capítulo busca mostrar algumas aplicações dos mesmos em ciências diversas. Todas as aplicações aqui retratadas, por meio das atividades, estão presentes em algum dos livros que fazem parte do PNLD (BRASIL, 2018) para o Ensino Médio, discutidos no capítulo anterior. Outros trabalhos que abordam sistemas lineares foram utilizados, para melhor elaboração dos enunciados dos exercícios.

7.1 Aplicação na Química

7.1.1 Exercício 1

Esse exercício foi adaptado de Pedrini (2013). Seu objetivo é balancear uma reação química por meio de sistemas lineares. Em uma reação química qualquer, é necessário verificar se o número de cada elemento é o mesmo em ambos os lados da equação. Para efetuar o balanceamento devem ser obtidos números, chamados de coeficientes estequiométricos, que são colocados antes dos símbolos que representam os elementos.

No presente caso, devem ser obtidos os menores coeficientes inteiros de balanceamento da reação que envolve o perclorato de potássio ($KCLO_4$) e o alumínio (Al), que forma o cloreto de potássio (KCl) e o óxido de alumínio (Al_2O_3).

O exercício pode ser resolvido da seguinte forma:

Considere a reação abaixo não balanceada:

$$KClO_4 + Al \rightarrow KCl + Al_2O_3$$

Sejam x, y, z e w os coeficientes que irão auxiliar para que a equação seja balanceada. Assim:

$$x\ KClO_4 + y\ Al \rightarrow z\ KCl + w\ Al_2O_3$$

Por meio da análise da reação, segue que $x = z$, pois na primeira e na segunda parcelas o potássio possui apenas 1 átomo. Além disso, $4x = 3w$, pois na primeira parcela o oxigênio possui 4 átomos, e na segunda parcela possui 3 átomos.

Obtém-se também que $y = 2w$, pois na primeira parcela o alumínio possui apenas 1 átomo, e na segunda possui 2. Desta forma, através das equações acima pode-se montar o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x &= z \\ 4x &= 3w \\ y &= 2w \end{cases} \tag{3}$$

O sistema pode ser facilmente resolvido através do Método da Substituição. Da primeira equação tem-se que $x = z$. Substituindo na segunda equação, segue que:

$$4x = 3w \Rightarrow 3w = 4z \Rightarrow w = \frac{4z}{3}$$

Substituindo o valor de w na terceira equação encontra-se:

$$y = 2\left(\frac{4z}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{8z}{3}$$

Assim, tem-se que $x = z$, $y = \frac{8z}{3}$, $z = z$ e $w = \frac{4z}{3}$, fornecendo a solução do balanceamento dada por:

$$S = \left(z,\ \frac{8z}{3},\ z,\ \frac{4z}{3}\right)$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado, pois possui infinitas soluções de acordo com o valor de z. Quando $z = 1$ ou $z = 2$, as soluções não são inteiras, como pedido no enunciado do exercício. Assim, para uma solução particular, tomando $z = 3$, obtêm-se os coeficientes inteiros $S_1 = (3,\ 8,\ 3,\ 4)$.

7.1.2 Exercício 2

Esse exercício foi adaptado de Pereira (2017). Novamente aqui deve-se balancear os coeficientes de uma reação química. A reação a ser considerada é:

$$C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

onde C_4H_{10} é o butano, O_2 é oxigênio, CO_2 é dióxido de carbono e H_2O é a água.

Primeiramente, sejam x, y e z os coeficientes que auxiliam no balanceamento da equação acima. Escreve-se assim:

$$x\ C_4H_{10} + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + w\ H_2O$$

Analisando ambos os membros da equação e sabendo que cada sigla representa os seguintes elementos: C representa o carbono; H representa o hidrogênio e O representa o oxigênio, são determinados os valores dos coeficientes x, y, z e w para que a equação fique balanceada.

Organizando as informações contidas em cada parcela tem-se: $4x = z$, pois na primeira parcela o carbono possui 4 átomos e na segunda parcela o carbono possui apenas 1 átomo; $10x = 2w$, pois o hidrogênio na primeira parcela possui 10 átomos e na segunda parcela o hidrogênio possui 2 átomos; $2y = 2z + w$, visto que na primeira parcela o oxigênio possui 2 átomos e na segunda parcela possui, respectivamente, 2 átomos e 1 átomo. Desta forma, através das equações acima, pode-se montar o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4x & = & z \\ 10x & = & 2w \\ 2y & = & 2z + w \end{cases} \tag{4}$$

Segue que o sistema pode ser resolvido através do Método da Substituição. Observa-se que na primeira equação $z = 4x$. Na segunda equação, verifica-se que $10x = 2w$, logo:

$$2w = 10x \Rightarrow w = 5x$$

Substituindo os valores de z e w na terceira equação, obtém-se:

$$2y = 2(4x) + 5x \Rightarrow y = 13xy = \frac{13x}{2}$$

Portanto, a solução do conjunto será: $x = x$, $y = \dfrac{13x}{2}$, $z = 4x$ e $w = 5x$, ou ainda $S = (x,\ \dfrac{13x}{2},\ 4x,\ 5x), x \in \mathbb{R}$. Temos que este sistema é possível e indeterminado, pois possui mais de uma solução.

Como no exercício pedem-se coeficientes inteiros, o primeiro valor de x para o qual isso acontece é $x = 2$, o que fornece a seguinte solução para o sistema: $S_1 = (2,\ 13,\ 8,\ 10)$. Logo, os coeficientes x, y, z e w devem assumir os valores 2, 13, 8 e 10, respectivamente, para que a equação seja balanceada.

7.2 Aplicação na Biologia

7.2.1 Exercício 3

O presente exercício é adaptado de Dante (2016). Objetiva-se obter o número de ingredientes que uma pessoa deve consumir para que atinja um certo consumo de nutrientes.

O organismo humano necessita de diversos tipos de substâncias para que funcione bem. Essas substâncias incluem sais minerais, vitaminas e proteínas.

Suponha que uma pessoa fará uma receita, verificando a quantidade de cada alimento a ser ingerido de acordo com as demandas diárias de vitamina C, cálcio e magnésio. Ela se alimentará de três diferentes ingredientes, sendo que cada um deles possui uma determinada quantidade de nutrientes (dada em miligramas) por unidade de ingrediente (por exemplo, por colher), de acordo com a Fig. 23.

Figura 23 – Alimento e quantidade de nutrientes em mg

Nutriente	1	2	3	Total necessário de nutrientes (mg)
Vitamina C	10	20	30	100
Cálcio	40	40	10	210
Magnésio	20	10	30	110

Fonte: Dante (2016, p. 109).

Temos que x, y e z representam os nutrientes 1, 2, e 3 respectivamente. Assim, organizando a tabela, é obtido o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z &= 100 \\ 40x + 40y + 10z &= 210 \\ 20x + 10y + 30z &= 110 \end{cases} \tag{5}$$

Assim, multiplicando a linha 3 por (-2) e somando com a linha 2 do sistema em (5), encontra-se:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z &= 100 \\ 0 + 20y - 50z &= -10 \\ 20x + 10y + 30z &= 110 \end{cases} \tag{6}$$

Multiplicando a linha 1 por (-2) e somando-a com a linha 3 em (6):

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z &= 100 \\ 0 + 20y - 50z &= -10 \\ 0 - 30y - 30z &= -90 \end{cases} \tag{7}$$

Multiplicando a linha 3 por $\frac{1}{30}$ em (7):

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z &= 100 \\ 0 + 20y - 50z &= -10 \\ 0 - y - z &= -3 \end{cases} \tag{8}$$

Multiplicando a linha 3 por 20 e somando com a linha 2 em (8):

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z & = & 100 \\ 0 + 0 - 70z & = & -70 \\ 0 - y - z & = & -3 \end{cases} \tag{9}$$

Trocando as linhas 2 e 3:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z & = & 100 \\ 0 - y - z & = & -3 \\ 0 + 0 - 70z & = & -70 \end{cases} \tag{10}$$

Portanto, chega-se a um sistema escalonado, e, desta forma, será mais simples de resolvê-lo. Resolvendo o sistema em (10):

$$-70z = -70 \Rightarrow z = \frac{-70}{-70} \Rightarrow z = 1$$

Substituindo o valor de z na segunda linha do sistema em (10), obtém-se:

$$-y - 1 = -3 \Rightarrow -y = -3 + 1 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo os valores de y e z na primeira equação do sistema:

$$10x + 20(2) + 30(1) = 100 \Rightarrow 10x = 100 - 40 - 30 \Rightarrow x = \frac{30}{10} \Rightarrow x = 3$$

Por isso, a solução do sistema é $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$, ou ainda, $S = (3,\ 2,\ 1)$, e segue que o sistema é possível e determinado.

7.3 Aplicação na Física

7.3.1 Exercício 4

Esse exercício foi adaptado de Pedrini (2013). Seu objetivo é, a partir das funções que descrevem as posições de dois veículos, obter o instante em que eles se encontram. Suponha que um veículo v_1 saia de Campo Grande – MS com destino a Jales – SP, às dez horas da manhã. A função que fornece a posição do veículo v_1, a saber, S_{v_1}, em relação ao tempo t é dada por: $S_{v_1} = 35 + 80t$, onde S_{v_1} é dada em quilômetros e t em horas. No mesmo dia, um outro veículo v_2 parte da mesma cidade com o mesmo destino, ao meio dia, com o mesmo trajeto de v_1. A função horária do veículo v_2 é dada por $S_{v_2} = 15 + 120t$. Deve-se obter o instante de tempo t em que o veículo v_2 alcança o veículo v_1.

Considerando o seguinte sistema linear de equações com duas incógnitas formado pelas duas funções horárias dos veículos v_1 e v_2:

$$\begin{cases} 35 + 80t &= S_{v_1} \\ 15 + 120t &= S_{v_2} \end{cases} \tag{11}$$

O exercício pede o instante em que o veículo v_2 alcançará o veículo v_1, isto é, $S_{v_1} = S_{v_2}$. Neste exercício, pode-se usar o Método da Subtração ou Adição para resolver o sistema, visto que é um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Assim, fazendo a segunda equação de (11) menos a primeira equação de (11), encontra-se:

$$-40 + 40t = S_{v_2} - S_{v_1} \Rightarrow -40 + 40t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Portanto, o veículo v_2 alcançará o veículo v_1 no instante $t = 1\ h$.

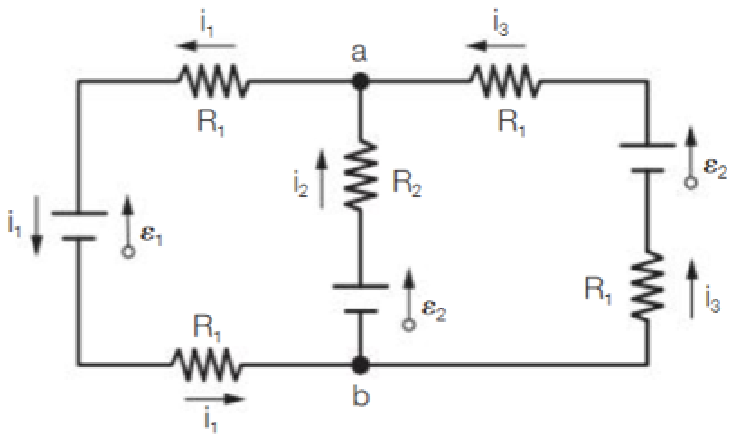
7.3.2 Atividade 5

Essa atividade foi adaptada de Souza e Garcia (2016). Objetiva-se, nesse exercício, a obtenção do valor de correntes elétricas por meio de sistemas lineares.

Sabe-se que inúmeras experiências diárias, como o funcionamento de eletrodomésticos, por exemplo, implicam a utilização da energia elétrica. Tal fato é possível em decorrência dos circuitos elétricos que, quando fechados, são percorridos por cargas elétricas. Os circuitos, em geral, possuem três componentes mínimos: um dispositivo que funciona com energia elétrica (um motor, um eletrodoméstico ou uma lâmpada); fios metálicos condutores (fios de cobre) e uma fonte de energia elétrica (uma pilha, uma bateria ou tomadas elétricas, que possibilitam acesso à energia elétrica propiciada por uma usina).

O condutor é encarregado do transporte de carga elétrica. A quantidade de carga elétrica que passa por uma seção transversal desse condutor, em determinado intervalo de tempo, denomina-se intensidade de corrente elétrica. A representação de um circuito elétrico pode ser verificada na Fig. 24.

Figura 24 – Circuito elétrico



Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 87).

No circuito, tem-se que: ϵ_1 e ϵ_2 são as forças elemotrizes nas quais as cargas elétricas são transportadas, dadas em volts (V); R_1 e R_2 representam as resistências, que são dadas em ohms (Ω); i_1, i_2 e i_3 são as intensidades das correntes elétricas, em ampère (A).

Para resolver o exercício, é necessário o conhecimento sobre as duas leis a seguir:

Primeira Lei de Kirchhoff (lei dos nós): A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

Segunda Lei de Kirchhoff (lei das malhas): Ao se percorrer uma malha fechada, a soma algébrica das variações de potencial é sempre zero.

Por meio das duas Leis de Kirchhoff e tomando $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $\epsilon_1 = 8V$ e $\epsilon_1 = 10V$, é obtido o sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 & = & 0 \\ -4i_1 - 5i_2 & = & -2 \\ -5i_2 + 4i_3 & = & 0 \end{cases} \tag{12}$$

Para resolver o sistema em (12), deve-se multiplicar a primeira linha por 4 e somar com a segunda linha.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 & = & 0 \\ -9i_2 - 4i_3 & = & -2 \\ -5i_2 + 4i_3 & = & 0 \end{cases} \tag{13}$$

Somando a segunda linha com a terceira linha, segue que:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 & = & 0 \\ -9i_2 - 4i_3 & = & -2 \\ -14i_2 & = & -2 \end{cases} \tag{14}$$

Pela terceira linha de (14), tem-se que $-14i_2 = -2 \Rightarrow i_2 = \dfrac{(-2)}{(-14)} \Rightarrow i_2 = \dfrac{1}{7}$.

Substituindo o valor de i_2 na segunda linha do sistema (14), encontra-se:

$$-9\left(\frac{1}{7}\right) - 4i_3 = -2 \Rightarrow -\frac{9}{7} + 2 = 4i_3 \Rightarrow \frac{5}{7} = 4i_3 \Rightarrow \frac{5}{28} = i_3$$

Substituindo os valores de i_2 e i_3 na primeira linha do sistema (14):

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{7} + \frac{5}{28} \Rightarrow i_1 = \frac{9}{28}$$

Logo, a solução do sistema é $i_1 = \dfrac{9}{28}$, $i_2 = 17$ e $i_3 = \dfrac{5}{28}$.

As aplicações de sistemas lineares aqui expostas são apenas alguns exemplos de como esse assunto pode ser trabalhado em sala de aula. Acredita-se que se tais atividades aparecessem com maior frequência em livros didáticos, o tema poderia ser melhor compreendido pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo abordou o conteúdo de sistemas lineares com foco em suas aplicações em outras disciplinas, tendo sido realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o tema. Foram consideradas sua história e evolução, as formas de resolução, o ensino de álgebra linear e sistemas lineares, bem como a análise das aplicações considerando livros didáticos.

Através da presente pesquisa, foi possível verificar que as aplicações de sistemas lineares estão relacionadas com várias áreas de conhecimento, tais como biologia, física e química. Diante dessas considerações, pode-se afirmar que a pergunta-problema que originou o trabalho foi respondida.

Quanto à abordagem histórica, verificou-se a importância da utilização de sistemas lineares desde aproximadamente 200 a.E.C, quando os chineses já utilizavam técnicas de resoluções equivalentes ao método de eliminação de Gauss, o que veio a ser desenvolvido apenas no século XIX. Foi evidenciada a evolução do assunto com o decorrer do tempo e também em outros países.

Em relação ao ensino de sistemas lineares no Ensino Médio, nota-se que muitas pesquisas não se aprofundam nessa área. Verifica-se que na abordagem utilizada pelos professores falta aplicação do conteúdo em outras disciplinas e resolução de problemas cotidianos. Foi possível inferir que caso os professores passassem exercícios aplicados em assuntos cotidianos e integrados com outras disciplinas, os alunos se sentiriam mais interessados e motivados a participarem das aulas e a buscarem um conhecimento maior sobre sistemas lineares.

No que tange aos métodos de resolução de sistemas lineares, todos os livros didáticos apresentam os métodos da adição e substituição para a resolução de sistemas 2×2. Para a resolução de sistemas 3×3, todos os livros apresentam apenas o método do escalonamento demonstrando-se, assim, que poucos são os métodos abordados. É importante destacar que se objetivou levantar um panorama geral de como o assunto é abordado nos livros, e não realizar uma retratação detalhada sobre os mesmos.

A presença de aplicações em outras ciências foi notada nos livros didáticos. No entanto, elas foram encontradas em pouca quantidade e variedade, sendo que em quantidade superior são exibidas atividades que envolvem situações hipotéticas. Quando encontrados os exercícios eram, em grande parte, limitados a aplicações na química, para o balanceamento de equações; na biologia, para o cálculo de nutrientes e na física, para o cálculo de circuitos elétricos, conforme exibido no capítulo 7.

Quando tais aplicação são exibidas, geralmente ocupam lugar de destaque em comparação aos demais exercícios. Pode ser verificado, assim, que os livros didáticos abordam exercícios aplicados, sendo que cabe aos professores a tarefa de dar atenção a um ensino que aproxime o conteúdo do aluno, dando maior foco a essas questões.

Diante do que se abordou nos parágrafos anteriores, tanto os objetivos específicos quanto o objetivo principal desta pesquisa foram alcançados. Recomenda-se que pesquisas futuras sejam realizadas em relação ao ensino de sistemas lineares, pois não foram encontradas muitas obras na literatura e nos repositórios acadêmicos sobre o assunto em questão.

BIBLIOGRAFIA

ALTHOEN, S. C.; MCLAUGHLIN, R. Gauss-Jordan reduction: A brief history. **The American mathematical monthly**, v. 94, n. 2, p. 130-142, 1987.

ANDRADE, F. J. **O Ensino de Sistema de Equações Lineares por Meio da Solução de Problemas.** Dissertação (Mestrado) - Univerdade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ANDREWS-LARSON, C. Roots of Linear Algebra: An Historical Exploration of Linear Systems. **PRIMUS**, v. 25, n. 6, p. 507-528, 2015.

BERTI, N. M. **O ensino de matemática no Brasil: buscando uma compreensão histórica**. Universidade Federal de Ponta Grossa, Paraná, 2005.

BOURBAKI, Nicolás. **Elementos de historia de las matemáticas**. 1972.

BOYER, C. B. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRANDÃO, J. D. P. **O Papel e a Importância do Livro Didático no Processo de Ensino Aprendizagem**. Congresso Nacional de Educação – CONEDU, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL, MEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + - Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC / SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018:** matemática - guia de livros didáticos - Ensino Médio/ Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica - SEB - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** LDB 9394/96. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2018.

CARDOSO, V. C. **Ensino de Aprendizagem de Álgebra Linear: Uma Discussão Acerca de Aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 2**. São Paulo: SM, 2016.

COIMBRA, J. L. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino** - Aprendizagem da Álgebra Linear. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Pará, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações 2**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

FERREIRA, A. E. G. **A importância dos Sistemas Lineares no Ensino Médio e a contribuição para Matemática e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado) –

Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, 2013.

FRATELLI, B. C.; MONTEIRO, M, S. **Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear**. Artigo – Universidade de São Paulo, 2007.

GARCÊS, S. B. B. **Classificação e tipos de Pesquisas** . 2010. Disponível em: <http://www.redepoc.com/jovensinovadores/ClassificacaoeTiposdePesquisas.doc>. Acesso em: 26 jul. 2019.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisas**. 1. ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GUERRA, E. L. A. **Manual de Pesquisa Qualitativa**. Belo Horizonte: Anima Educação, 2014.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**. São Paulo: Atual Editora. 1977.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática Ciência e Aplicações**, 2 ano. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KLINE, M. **Mathematical Thought From Ancient to Modern Times**. 1972.

LAMIN, M. R. N. **Resolução de problemas modelados com sistemas de equações lineares**. 2000.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**, 2 ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LEVORATO, G. B. P. **Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Aplicações na Engenharia e Economia**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.

LIMA, E. L. Sobre o ensino de sistemas lineares. **Revista do Professor de Matemática**, n. 23, 1993.

MORO, Graciela et al. **Ensino de Álgebra Linear: traços de uma pesquisa**. II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação - Joinville, Santa Catarina, 2016.

MOURA, D. A. S.; SANTOS, L. T. A. **O Estudo de Sistemas Lineares na Educação Básica:** Uma Sequência Didática com Recurso Computacional Aplicada. Artigo – Faculdade de Pará de Minas; Universidade de Itaúna, 2015.

OLIVEIRA, J. P. T. **A eficiência/ou ineficiência do livro didático no processo de ensino aprendizagem**. PUC – Rio de Janeiro, 2014.

PANTOJA, L. F. L. et al. O Ensino de Sistemas Lineares Através da Conversão de Registro de Representações Semióticas. **VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática**, 2013.

PEDRINI, L. C. **O Estudo de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2013.

PEREIRA, W. L. **Sistemas Lineares: Uma Sequência Didática para o Ensino Mé-**

dio e Aplicações. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Paraíba, 2017.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico.** 2. ed. Novo Hamburgo: Editora FEEVALE, 2013.

RANGEL, W. S. A. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: Contribuições para a formação de Professores de Matemática.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

RUFATO, S. A. C. **Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2014.

SANTOS, V. A; MARTINS, L. **A Importância do Livro Didático**. Candombá – Revista Virtual, v. 7, n. 1, p. 20-33, Janeiro/Dezembro 2011.

SCHWARTZ, R. K. A Classic from China: The Nine Chapters. **The Right Angle**, n. 2, 2008.

SILVA, J. C. **A Álgebra Linear no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Rio Grande do Norte, 2013.

SILVA, C. D. M. **A essência dos determinantes na sua origem**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará. 2014.

SILVEIRA, L. F. B. A. **Resolução de problemas no ensino de sistemas de equações lineares: um olhar sob as teorias de aprendizagem na realidade da escola contemporânea**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2018.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato matemática**, 2º ano. São Paulo: FTD, 2016.

TEIXEIRA, R. F. B. **Significados do Livro Didático na Cultura Escolar**. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. UFPR – CURITIBA, 2011.

TEIXEIRA, N. F. Metodologias de pesquisas em Educação: Possibilidades de Adequações. **Caderno Pedagógico**, v.12, n.2, p.7-17, 2015.